MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Paolo Piccione

23 de Novembro de 2011

Prova 2 — $\boxed{\textbf{A}}$

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.1).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais, e $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de pares ordenados de números reais: $\mathbb{R}^2 = \big\{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\big\}$.
- $\sin x$ é a função "seno de x"; $\ln x$ é a função "logaritmo natural de x".
- Uma *direção* é um vetor de comprimento 1.

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

Questão 1. *Determine o máximo M e o mínimo m da função $f(x,y) = y^2 - x^2$ no conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.*

(a) $M = \sqrt{2}$, $m = -4$;
(b) $M = 4$, $m = -4$;
(c) $M = 4\sqrt{2}$, $m = -4\sqrt{2}$;
(d) $M = 4$, $m = -2\sqrt{2}$;
(e) $M = 2\sqrt{2}$, $m = -2\sqrt{2}$.

Questão 2. *Seja $\gamma(t)$ uma **curva de nível** da função $f(x,y)$.
Seja $g(x,y) = e^{f(x,y)}$ e $h(t) = (g \circ \gamma)(t)$. Calcule $h'(t)$.*

(a) $h'(t) = 1$;
(b) $h'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot e^{f(\gamma(t))}$;
(c) h não é derivável;
(d) $h'(t) = 0$;
(e) $h'(t) = e^{\nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)}$.

Questão 3. *Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

(a) Se $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) > 0$, então (x_0,y_0) é um ponto de máximo ou de mínimo local da f;
(b) Se o determinante da matriz Hessiana da f em (x_0,y_0) é negativo, então (x_0,y_0) é um ponto de sela para f;
(c) Se (x_0,y_0) for um ponto crítico da f, então (x_0,y_0) é um ponto de máximo ou de mínimo local da f;
(d) Se $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) < 0$, então (x_0,y_0) é um ponto de sela para f;
(e) Se f admitir derivadas segundas contínuas numa vizinhança de (x_0,y_0), então a matriz Hessiana da f em (x_0,y_0) é simétrica.

Questão 4. *Calcule a derivada $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$ para a função $f(x,y) = x^2 e^{xy}$.*

(a) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = (x^2 + x^3 y)e^{xy}$;
(b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = (3x^2 + x^3 y)e^{xy}$;
(c) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = (x^2 + 3x^3 y)e^{xy}$;
(d) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = (3x^2 + 3x^3 y)e^{xy}$;
(e) $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = (3x^2 + x^2 y)e^{xy}$.

Questão 5. *Determine em qual direção $\vec{u}$ a função $f(x,y) = xy^2$ tem derivada direcional $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,-1)$ de valor* ***mínimo****.*

(a) $\vec{u} = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$;
(b) $\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$;
(c) $\vec{u} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$;
(d) $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$;
(e) $\vec{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

Questão 6. *Seja f uma função diferenciável, $f(x_0,y_0) = 1$, $\gamma(t)$ uma curva diferenciável, com $\gamma(t_0) = (x_0,y_0)$, $\gamma'(t_0) = (-1,2)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = -2$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0) = 3$. Seja $g(t) = (f \circ \gamma)(t)$. Calcule $g'(t_0)$.*

(a) $g'(t_0) = 0$;
(b) $g'(t_0) = -6$;
(c) $g'(t_0) = -4$;
(d) $g'(t_0) = 4$;
(e) $g'(t_0) = 6$.

Questão 7. *Determine o ponto do plano $2x + y - z = 4$ mais próximo da origem.*

(a) $(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, 0)$;
(b) $(2,0,0)$;
(c) $(1,1,-1)$;
(d) $(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$;
(e) $(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3})$.

Questão 8. *Qual é o volume máximo de um paralelepípedo cuja superfície lateral é 12 mt^2?*

(a) 4 mt^3;
(b) $2\sqrt{2}$ mt^3;
(c) 8 mt^3;
(d) 36 mt^3;
(e) $4\sqrt{2}$ mt^3.

Questão 9. *Determine a reta tangente à curva de equação* $x^2 + 2y^2 = 3$ *no ponto* $(1, 1)$.

(a) $2x + 2y - 4 = 0$;
(b) $x + 2y - 3 = 0$;
(c) $-x + 2y - 1 = 0$;
(d) $2x + y - 3 = 0$;
(e) $x + y - 2 = 0$.

Questão 10. *Determine um vetor ortogonal à curva* $xe^y - ye^x = e^2 - 2e$ *no ponto* $(1, 2)$.

(a) $(e^2 - e, 2e - e^2)$;
(b) $(2e + e^2, e - e^2)$;
(c) $(e^2 - e, e^2 - 2e)$;
(d) $(e^2 - 2e, e^2 - e)$;
(e) (e, e^2).

Questão 11. *Sabendo que* f *é uma função diferenciável em* (x_0, y_0), *que* $2\,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 4$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -1$, *calcule a derivada direcional* $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$, *onde* $\vec{u}$ *é a direção* $\vec{u} = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

(a) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;
(b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
(c) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = 0$;
(d) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = -\frac{3}{\sqrt{2}}$;
(e) $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \frac{3}{\sqrt{2}}$.

Questão 12. *Seja* f *uma função diferenciável numa vizinhança de* (x_0, y_0), *cujo Hessiano* $H^f(x_0, y_0)$ *é* $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. *Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

(a) (x_0, y_0) é um ponto de mínimo local;
(b) Se (x_0, y_0) for um ponto crítico da f então (x_0, y_0) é um máximo.;
(c) (x_0, y_0) é um ponto de máximo local;
(d) (x_0, y_0) é um ponto de sela;
(e) Se (x_0, y_0) for um ponto crítico da f então (x_0, y_0) não é um mínimo..

Questão 13. *Seja* $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5$. *Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

(a) O ponto $(1,2)$ é um máximo da f;
(b) O ponto $(1,2)$ é um mínimo da f;
(c) O ponto $(2,1)$ é um mínimo da f;
(d) O ponto $(2,1)$ é um máximo da f;
(e) O ponto $(2,1)$ é um ponto de sela da f.

Questão 14. *Determine os pontos críticos da função*

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2.$$

(a) $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, $(1,-1)$ e $(-1,-1)$;
(b) $(0,0)$ e $(1,1)$;
(c) f não possui pontos críticos;
(d) $(0,0)$, $(1,1)$, e $(-1,-1)$;
(e) $(0,0)$.

Questão 15. *Calcule a derivada* $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z}$ *da função* $f(x,y,z) = e^{xyz}$.

(a) $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xyz}(1 + 2xyz + x^2y^2z^2)$;
(b) $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xyz}(1 + 3xyz)$;
(c) $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)$;
(d) $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xyz}(1 + xyz + x^2y^2z^2)$;
(e) $\frac{\partial^3 f}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = e^{xyz}(x + y + z)$.

Questão 16. *Dada a função* $f(x,y) = 2x^2 - xy - y^2 - 3x + 3y$, *o que podemos dizer sobre o ponto* $(1,1)$*?*

(a) é um máximo local para f;
(b) não é um ponto crítico da f;
(c) é um ponto de mínimo global da f;
(d) é um mínimo local da f;
(e) é um ponto de sela para f.

Questão 17. *Dada a curva $\gamma(t) = (t^2, t^4)$, $t > 0$, determine a equação da reta tangente a γ no ponto $(1, 1)$.*

(a) $2x - y - 1 = 0$;
(b) $x + 2y - 3 = 0$;
(c) $x + y - 2 = 0$;
(d) $x - 2y - 1 = 0$;
(e) $2x + y - 3 = 0$.

Questão 18. *Quais são os pontos críticos da função $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$?*

(a) $(0, 0)$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ e $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$;
(b) $(0, 0)$ e $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$;
(c) $(0, 0)$;
(d) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$;
(e) $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ e $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

Questão 19. *Determine o máximo M e o mínimo m da função $f(x, y) = 3x - y$ em $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.*

(a) $M = 2\sqrt{5}$, $m = -2\sqrt{5}$;
(b) $M = \sqrt{5}$, $m = -\sqrt{5}$;
(c) $M = 10$, $m = -10$;
(d) $M = \sqrt{10}$, $m = -\sqrt{10}$;
(e) $M = \sqrt{10}$, $m = -2\sqrt{5}$.

Questão 20. *Qual das seguintes afirmações sobre máximos e mínimos vinculados é verdadeira?*

(a) Dadas funções diferenciáveis $f(x, y)$ e $g(x, y)$, se (x_0, y_0) é um extremo da f com vínculo $g(x, y) = 0$, então $\nabla f(x_0, y_0)$ e $\nabla g(x_0, y_0)$ são nulos.;
(b) Dadas funções diferenciáveis $f(x, y)$ e $g(x, y)$, se (x_0, y_0) é um extremo da f com vínculo $g(x, y) = 0$, então $\nabla f(x_0, y_0)$ é nulo.;
(c) Dadas funções diferenciáveis $f(x, y)$ e $g(x, y)$, se (x_0, y_0) é um extremo da f com vínculo $g(x, y) = 0$, então $\nabla f(x_0, y_0)$ é ortogonal a $\nabla g(x_0, y_0)$;
(d) Dadas funções diferenciáveis $f(x, y)$ e $g(x, y)$, se (x_0, y_0) é um extremo da f com vínculo $g(x, y) = 0$, então $\nabla f(x_0, y_0)$ é proporcional a $\nabla g(x_0, y_0)$;
(e) Dadas funções diferenciáveis $f(x, y)$ e $g(x, y)$, se (x_0, y_0) é um extremo da f com vínculo $g(x, y) = 0$, então o Hessiano da f em (x_0, y_0) é proporcional ao Hessiano da g em (x_0, y_0).

MAT 3210 — Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Paolo Piccione

Prova 2 — $\boxed{\textbf{A}}$

23 de Novembro de 2011

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Folha de Respostas

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota