

MAT 2219
Cálculo III para Química
Prof. Paolo Piccione
Prova 1
23 de outubro de 2015

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *é permitido deixar questões em branco*.
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- \mathbb{R} denota o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
- $\sin x$ é a função *seno* de x , $\ln x$ é o *logaritmo natural* de x .
- $A \cup B$ denota a *união* dos conjuntos A e B .

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

D

Questão 1. Calcule o módulo do determinante da matriz Jacobiana associada à mudança de coordenadas no espaço:

$$\begin{cases} x = \rho^2 \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho^2 \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho^2 \cos \phi. \end{cases}$$

- (a) $\rho^4 \sin \phi$;
- (b) $\rho^3 \sin^2 \theta \cos \phi$;
- (c) $\rho^4 \sin \theta$;
- (d) $2\rho^5 \sin \theta$;
- (e) $2\rho^5 \sin \phi$.

Questão 2. Calcule a integral dupla $\iint_D \frac{x+y}{x-y}$ onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é a região do plano delimitada pelas retas:

$$y = -x, \quad y = 1 - x, \quad y = x - 1, \quad e \quad y = x - 2.$$

- (a) $\ln 2$;
- (b) a integral não existe, pois a função dada não é contínua em D ;
- (c) 0;
- (d) $\frac{1}{2} \ln 2$;
- (e) $\frac{1}{4} \ln 2$.

Questão 3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e tal que $f(x, -y) = -f(x, y)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Para quais destes domínios D podemos afirmar que $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = 0$?

- (a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$;
- (b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^3\}$;
- (c) $D = [0, 1] \times [0, 1]$;
- (d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$;
- (e) $D = [-1, 1] \times [0, 1]$.

Questão 4. Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ o domínio:

$$B = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2 \right\},$$

e $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Usando coordenadas cilíndricas, a integral tripla $\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz$ é dada por qual quais das seguintes integrais iteradas?

- (a) $\int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_0^1 d\rho \left(\int_{\rho^2}^{1-\rho^2} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) dz \right) \right);$
- (b) $\int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_0^1 d\rho \left(\int_{\rho^2}^{\sqrt{1-\rho^2}} \rho \cdot f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) dz \right) \right);$
- (c) $\int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_0^{\sqrt{2}} d\rho \left(\int_{\rho^2}^{\sqrt{1-\rho^2}} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) dz \right) \right);$
- (d) $\int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} d\rho \left(\int_{\rho^2}^{1-\rho^2} \rho^2 \sin \theta \cdot f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) dz \right) \right);$
- (e) $\int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_0^{\sqrt{2}} d\rho \left(\int_{\rho^2}^{1-\rho^2} \rho \cdot f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) dz \right) \right).$

Questão 5. Calcule a massa de uma bola de raio R cuja densidade de massa num ponto P é igual à distância entre P e o centro da bola.

- (a) $\frac{5}{3}\pi R^3;$
 (b) $4\pi R^3;$
 (c) $\pi R^4;$
 (d) $\frac{4}{3}\pi R^4;$
 (e) $4\pi R^4.$

Questão 6. Seja $f(x, y) = xy$. Calcule a integral dupla $\iint_D f(x, y) dx dy$, onde D é o pentágono com vértices nos pontos $(-1, 0)$, $(1, 0)$, $(-1, 1)$, $(1, 1)$, e $(0, 2)$.

- (a) $-1;$
 (b) $-2;$
 (c) $2;$
 (d) $1;$
 (e) $0.$

Questão 7. Calcular a integral dupla $\iint_D \frac{2y}{x^2 + 1} dx dy$, onde D é o domínio $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$.

- (a) $\frac{1}{4} \ln 2$;
- (b) $\frac{1}{2} \ln 2$;
- (c) $\ln 2$;
- (d) $\frac{1}{5} \ln 2$;
- (e) $\frac{1}{3} \ln 2$.

Questão 8. Calcule a integral dupla $\iint_D x^2 y dx dy$, onde $D \subset \mathbb{R}^2$ é o retângulo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

- (a) $\frac{1}{2}$;
- (b) $\frac{2}{3}$;
- (c) $\frac{1}{6}$;
- (d) 3;
- (e) $\frac{1}{3}$.

Questão 9. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, tal que

$$\iint_Q f(x, y) dx dy = 1,$$

onde Q é o quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Calcule $\iint_R f(2x, 3y) dx dy$, onde R é o retângulo $[0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{3}]$.

- (a) $\frac{5}{6}$;
- (b) $\frac{1}{6}$;
- (c) 1;
- (d) $\frac{6}{5}$;
- (e) 6.

Questão 10. *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}^3$ dois domínios limitados, e $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas. Quais das afirmações abaixo é sempre verdadeira?*

(A) *Se $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in A$, então*

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \geq \iiint_A g(x, y, z) \, dx \, dy \, dz;$$

(B) *$\iiint_{A \cup B} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ é igual à soma:*

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz + \iiint_B f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz;$$

(C) *$\iiint_A (f(x, y, z) + g(x, y, z)) \, dx \, dy \, dz$ é igual à soma:*

$$\iiint_A f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz + \iiint_A g(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

- (a) apenas a (B) e a (C) são sempre verdadeiras;
- (b) são todas verdadeiras;
- (c) são todas falsas;
- (d) apenas a (A) e a (B) são sempre verdadeiras;
- (e) apenas a (A) e a (C) são sempre verdadeiras.

Questão 11. *Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ o domínio:*

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, x^2 + y^2 \leq 1 \right\},$$

e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. A integral dupla $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$ é dada por qual das integrais iteradas abaixo?

(a) $\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} dx \left(\int_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \right)$, com $a = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$;

(b) $\int_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}} dy \left(\int_{-1}^1 f(x, y) \, dx \right)$;

(c) $\int_{-1}^1 dx \left(\int_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \right)$;

(d) $\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} dx \left(\int_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \right)$, com $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$;

(e) $\int_{-1}^1 dx \left(\int_{x^2}^{1-x^2} f(x, y) \, dy \right)$.

Questão 12. Calcule $\iint_D x^2 \, dx \, dy$, onde D é a região limitada pela elipse $9x^2 + 4y^2 = 1$.

- (a) $\frac{\pi}{81}$;
- (b) $\frac{\pi}{18}$;
- (c) $\frac{\pi}{36}$;
- (d) $\frac{\pi}{216}$;
- (e) $\frac{\pi}{6}$.

Questão 13. Calcule o módulo do determinante da matriz Jacobiana associada à mudança de coordenadas no plano:

$$\begin{cases} x = 2 + \rho^2 \cos(2\theta) \\ y = 1 + \rho^2 \sin(2\theta) \end{cases}$$

- (a) $\rho^2 \sin(2\theta)$;
- (b) $4\rho^2$;
- (c) $2\rho^4$;
- (d) ρ^2 ;
- (e) $4\rho^3$.

Questão 14. Calcule o volume do sólido $V \subset \mathbb{R}^3$ definido por:

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \right. \\ \left. 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2} \right\}.$$

- (a) $\pi(\sqrt{2}-1)$;
- (b) $\sqrt{2} \frac{\pi}{3}$;
- (c) $\frac{\pi}{3}(\sqrt{2}-1)$;
- (d) $\frac{\pi}{4}(\sqrt{2}-1)$;
- (e) $\frac{\pi}{6}(\sqrt{2}-1)$.

Questão 15. Calcule a integral tripla $\iiint_D (x+y+z) \, dx \, dy \, dz$, onde $D \subset \mathbb{R}^3$ é o paralelepípedo $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 2 \leq z \leq 3\}$.

- (a) 15;
- (b) 12;
- (c) 20;
- (d) 22;
- (e) 18.

Questão 16. Seja $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a_1, a_2], y \in [b_1, b_2], z \in [c_1, c_2]\}$ e $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua. O Teorema de Fubini afirma que:

- (a) $\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{c_1}^{c_2} \left(\int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{a_2} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right) dz$;
- (b) $\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = (c_2 - c_1)(b_2 - b_1) \left(\int_{a_1}^{a_2} f(x, y, z) \, dx \right)$;
- (c) $\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = (c_2 - c_1) \left(\int_{b_1}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{a_2} f(x, y, z) \, dx \right) dy \right)$;
- (d) $\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ é igual ao volume da região abaixo do gráfico da f ;
- (e) $\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)(c_2 - c_1)f(x, y, z)$.

Questão 17. Calcular a integral iterada $\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} e^{-x^2-y^2} \, dx \right) dy$.

(Sugestão: use coordenadas polares no plano)

- (a) $\pi \left(\frac{1-e}{e} \right)$;
- (b) $2\pi(e-1)$;
- (c) $\pi \left(\frac{e-1}{e} \right)$;
- (d) $(e-1)\pi$;
- (e) $2\pi \left(\frac{e-1}{e} \right)$.

Questão 18. *Sejam $f, g, h : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas, tais que:*

$$\int_0^2 f(x) \, dx = 3, \quad \int_0^2 g(x) \, dx = -2, \quad \int_0^2 h(x) \, dx = 1.$$

Calcule a integral tripla $\iiint_Q [f(x) + g(y) + h(z)] \, dx \, dy \, dz$, onde Q é o cubo $[0, 2] \times [0, 2] \times [0, 2]$.

- (a) 1;
- (b) 0;
- (c) 4;
- (d) 8;
- (e) 2.

Questão 19. *Calcule $\iint_D \cos(x^2 + y^2) \, dx \, dy$, onde D é o anel*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

- (a) $4\pi(\sin 4 - \sin 1)$;
- (b) $\pi(\sin 4 - \sin 1)$;
- (c) $\pi(\sin 2 - \sin 1)$;
- (d) 2π ;
- (e) $2\pi(\sin 4 - \sin 1)$.

Questão 20. *Calcule $\iint_D y^2 \, dx \, dy$, onde D é o domínio triangular com vértices $(0, 2)$, $(1, 1)$ e $(3, 2)$.*

- (a) $\frac{19}{4}$;
- (b) $\frac{11}{4}$;
- (c) $\frac{15}{4}$;
- (d) $\frac{13}{4}$;
- (e) $\frac{17}{4}$.

MAT 2219
Cálculo III para Química
Prof. Paolo Piccione
Prova 1
23 de outubro de 2015

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas **D**

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota