# MAT 2219

## Cálculo III para Química

Prof. Paolo Piccione

## Prova 1

23 de outubro de 2015

Nome: ______________________________________________

Número USP: ________________________________________

Assinatura: _________________________________________

**Instruções**

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *é permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

**Terminologia e Notações Utilizadas na Prova**

- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.
- $\sin x$ é a função *seno* de $x$, $\ln x$ é o *logaritmo natural* de $x$.
- $A \bigcup B$ denota a *união* dos conjuntos $A$ e $B$.

***NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME***
***NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!***

$\boxed{\mathbf{A}}$

**Questão 1.** *Calcule a integral dupla* $\iint_D x^2 y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$*, onde* $D \subset \mathbb{R}^2$ *é o retângulo* $\Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\Big\}$.

(a) $\frac{1}{3}$;
(b) $\frac{1}{2}$;
(c) $\frac{2}{3}$;
(d) $\frac{1}{6}$;
(e) 3.

**Questão 2.** *Seja* $D \subset \mathbb{R}^2$ *o domínio:*

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \ge x^2,\ x^2 + y^2 \le 1\Big\},$$

*e* $f : D \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. A integral dupla* $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ *é dada por qual das integrais iteradas abaixo?*

(a) $\displaystyle\int_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \left(\int_{-1}^{1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right)$;

(b) $\displaystyle\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \mathrm{d}x \left(\int_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)$, com $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$;

(c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \left(\int_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)$;

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \mathrm{d}x \left(\int_{x^2}^{1-x^2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)$;

(e) $\displaystyle\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} \mathrm{d}x \left(\int_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)$, com $a = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

**Questão 3.** *Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ o domiínio:*

$$B = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\Big\},$$

*e $f : B \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Usando coordenadas ciliíndricas, a integral tripla $\iiint_B f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ é dada por qual quais das seguintes integrais iteradas?*

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left(\int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\rho \left(\int_{\rho^2}^{1-\rho^2} \rho \cdot f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\mathrm{d}z\right)\right);$

(b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left(\int_0^{1} \mathrm{d}\rho \left(\int_{\rho^2}^{\sqrt{1-\rho^2}} \rho \cdot f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\mathrm{d}z\right)\right);$

(c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left(\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\rho \left(\int_{\rho^2}^{1-\rho^2} \rho^2 \sin\theta \cdot f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\mathrm{d}z\right)\right);$

(d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left(\int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}\rho \left(\int_{\rho^2}^{\sqrt{1-\rho^2}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\mathrm{d}z\right)\right);$

(e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left(\int_0^{1} \mathrm{d}\rho \left(\int_{\rho^2}^{1-\rho^2} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\mathrm{d}z\right)\right).$

**Questão 4.** *Calcular a integral dupla $\displaystyle\iint_D \frac{2y}{x^2+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, onde $D$ é o domínio $D = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq \sqrt{x}\Big\}$.*

(a) $\frac{1}{4}\ln 2$;
(b) $\frac{1}{2}\ln 2$;
(c) $\ln 2$;
(d) $\frac{1}{3}\ln 2$;
(e) $\frac{1}{5}\ln 2$.

**Questão 5.** *Calcular a integral iterada $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$.*
(Sugestão: use coordenadas polares no plano)

(a) $2\pi\left(\frac{e-1}{e}\right)$;
(b) $2\pi(e-1)$;
(c) $\pi\left(\frac{e-1}{e}\right)$;
(d) $\pi\left(\frac{1-e}{e}\right)$;
(e) $(e-1)\pi$.

**Questão 6.** *Cacular* $\iint_D y^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$*, onde* $D$ *é o domínio triangular com vértices* $(0,2)$*,* $(1,1)$ *e* $(3,2)$*.*

(a) $\frac{19}{4}$;
(b) $\frac{15}{4}$;
(c) $\frac{13}{4}$;
(d) $\frac{17}{4}$;
(e) $\frac{11}{4}$.

**Questão 7.** *Calcule o módulo do determinante da matriz Jacobiana associada à mudança de coordenadas no espaço:*

$$\begin{cases} x = \rho^2 \sin\phi\cos\theta \\ y = \rho^2 \sin\phi\sin\theta \\ z = \rho^2 \cos\phi. \end{cases}$$

(a) $\rho^4 \sin\phi$;
(b) $\rho^3 \sin^2\theta\cos\phi$;
(c) $\rho^4 \sin\theta$;
(d) $2\rho^5 \sin\phi$;
(e) $2\rho^5 \sin\theta$.

**Questão 8.** *Calcule a massa de uma bola de raio* $R$ *cuja densidade de massa num ponto* $P$ *é igual à distância entre* $P$ *e o centro da bola.*

(a) $4\pi R^3$;
(b) $\frac{5}{3}\pi R^3$;
(c) $\pi R^4$;
(d) $4\pi R^4$;
(e) $\frac{4}{3}\pi R^4$.

**Questão 9.** *Sejam* $f, g, h : [0,2] \to \mathbb{R}$ *funções contínuas, tais que:*

$$\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 3, \quad \int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x = -2, \quad \int_0^2 h(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

*Calcule a integral tripla* $\iiint_Q \big[f(x) + g(y) + h(z)\big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, *onde* $Q$ *é o cubo* $[0,2] \times [0,2] \times [0,2]$.

(a) 0;
(b) 1;
(c) 2;
(d) 8;
(e) 4.

**Questão 10.** *Calcule o volume do sólido* $V \subset \mathbb{R}^3$ *definido por:*

$$V = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2},\ \sqrt{x^2+y2} \le z \le \sqrt{2-x^2-y^2}\Big\}.$$

(a) $\sqrt{2}\,\frac{\pi}{3}$;
(b) $\frac{\pi}{3}(\sqrt{2}-1)$;
(c) $\frac{\pi}{6}(\sqrt{2}-1)$;
(d) $\pi(\sqrt{2}-1)$;
(e) $\frac{\pi}{4}(\sqrt{2}-1)$.

**Questão 11.** *Seja* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, tal que*

$$\iint_Q f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 1,$$

*onde* $Q$ *é o quadrado* $[0,1] \times [0,1]$. *Calcule* $\iint_R f(2x, 3y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, *onde* $R$ *é o retângulo* $[0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{3}]$.

(a) 1;
(b) $\frac{1}{6}$
(c) 6;
(d) $\frac{5}{6}$;
(e) $\frac{6}{5}$.

**Questão 12.** *Calcule* $\iint_D \cos(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, *onde* $D$ *ó o anel*

$$\Big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x^2+y^2\le 4\Big\}.$$

(a) $2\pi$;
(b) $2\pi(\sin 4-\sin 1)$;
(c) $\pi(\sin 2-\sin 1)$;
(d) $\pi(\sin 4-\sin 1)$;
(e) $4\pi(\sin 4-\sin 1)$.

**Questão 13.** *Calcule a integral dupla* $\displaystyle\iint_D \frac{x+y}{x-y}$ *onde* $D\subset\mathbb{R}^2$ *é a região do plano delimitada pelas retas:*

$$y=-x,\ y=1-x,\ y=x-1,\ \textbf{\textit{e}}\ y=x-2.$$

(a) $0$;
(b) a integral não existe, pois a função dada não é contínua em $D$;
(c) $\ln 2$;
(d) $\frac{1}{4}\ln 2$;
(e) $\frac{1}{2}\ln 2$.

**Questão 14.** *Calcule a integral tripla* $\iiint_D (x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, *onde* $D\subset\mathbb{R}^3$ *é o paralelepípedo* $\Big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\le x\le 3,\ 0\le y\le 2,\ 2\le z\le 3\Big\}$.

(a) 20;
(b) 12;
(c) 15;
(d) 18;
(e) 22.

**Questão 15.** *Calcule* $\iint_D x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, *onde* $D$ *é a região limitada pela elipse* $9x^2+4y^2=1$.

(a) $\dfrac{\pi}{216}$;
(b) $\dfrac{\pi}{18}$;
(c) $\dfrac{\pi}{6}$;
(d) $\dfrac{\pi}{36}$;
(e) $\dfrac{\pi}{81}$.

**Questão 16.** *Seja* $D = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [a_1,a_2],\ y \in [b_1,b_2], z \in [c_1,c_2]\Big\}$ *e* $f : D \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua. O Teorema de Fubini afirma que:*

(a) $\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ é igual ao volume da região abaixo do gráfico da $f$;

(b) $\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{c_1}^{c_2}\left(\int_{b_1}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{a_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$;

(c) $\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = (c_2-c_1)\left(\int_{b_1}^{b_2}\left(\int_{a_1}^{a_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\right)$;

(d) $\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = (c_2-c_1)(b_2-b_1)\left(\int_{a_1}^{a_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\right)$;

(e) $\iiint_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = (a_2-a_1)(b_2-b_1)(c_2-c_1)f(x,y,z)$.

**Questão 17.** *Calcule o módulo do determinante da matriz Jacobiana associada à mudança de coordenadas no plano:*

$$\begin{cases} x = 2 + \rho^2\cos(2\theta) \\ y = 1 + \rho^2\sin(2\theta) \end{cases}$$

(a) $4\rho^2$;

(b) $\rho^2$;

(c) $4\rho^3$;

(d) $2\rho^4$;

(e) $\rho^2\sin(2\theta)$.

**Questão 18.** *Seja* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função contínua e tal que* $f(x,-y) = -f(x,y)$ *para todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$*. Para quais destes domínios* $D$ *podemos afirmar que* $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$*?*

(a) $D = [-1,1]\times[0,1]$;

(b) $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\Big\}$;

(c) $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 4\Big\}$;

(d) $D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^3\Big\}$;

(e) $D = [0,1]\times[0,1]$.

**Questão 19.** *Seja* $f(x,y) = xy$. *Calcule a integral dupla* $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, *onde* $D$ *é o pentâgono com vértices nos pontos* $(-1,0)$, $(1,0)$, $(-1,1)$, $(1,1)$, *e* $(0,2)$.

(a) 0;
(b) $-1$;
(c) 2;
(d) $-2$;
(e) 1.

**Questão 20.** *Sejam* $A, B \subset \mathbb{R}^3$ *dois domínios limitados, e* $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *funções contínuas. Quais das afirmações abaixo é sempre verdadeira?*

(A) *Se* $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$ *para todo* $(x,y,z) \in A$, *então*
$$\iiint_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \geq \iiint_A g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z;$$

(B) $\iiint_{A\bigcup B} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ *é igual à soma:*
$$\iiint_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iiint_B f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z;$$

(C) $\iiint_A \big(f(x,y,z) + g(x,y,z)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ *é igual à soma:*
$$\iiint_A f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iiint_A g(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z.$$

(a) apenas a (A) e a (B) são sempre verdadeiras;
(b) apenas a (B) e a (C) são sempre verdadeiras;
(c) são todas verdadeiras;
(d) são todas falsas;
(e) apenas a (A) e a (C) são sempre verdadeiras.

MAT 2219

Cálculo III para Química

Prof. Paolo Piccione

Prova 1

23 de outubro de 2015

Nome: ______________________________________________

Número USP: ________________________________________

Assinatura: _________________________________________

## Folha de Respostas $\boxed{\textbf{A}}$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **1** | a | b | c | d | e |
| **2** | a | b | c | d | e |
| **3** | a | b | c | d | e |
| **4** | a | b | c | d | e |
| **5** | a | b | c | d | e |
| **6** | a | b | c | d | e |
| **7** | a | b | c | d | e |
| **8** | a | b | c | d | e |
| **9** | a | b | c | d | e |
| **10** | a | b | c | d | e |
| **11** | a | b | c | d | e |
| **12** | a | b | c | d | e |
| **13** | a | b | c | d | e |
| **14** | a | b | c | d | e |
| **15** | a | b | c | d | e |
| **16** | a | b | c | d | e |
| **17** | a | b | c | d | e |
| **18** | a | b | c | d | e |
| **19** | a | b | c | d | e |
| **20** | a | b | c | d | e |

**Deixe em branco.**

| Corretas | Erradas | Nota |
|---|---|---|
| | | |