MAT0220 – CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV
LISTA DE EXERCÍCIOS 7

INTEGRAIS E A FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

PROF. PAOLO PICCIONE
MONITOR: GUSTAVO RAMOS

Exercício 1. Calcule a integral complexa $\displaystyle\int_\gamma \frac{\cos(\pi\, z)}{z^2+2z+1}\,\mathrm{d}z$, onde γ é o círculo centrado em $z_0 = 0$, de raio $R = 2$, e orientado no sentido **horário**.

Exercício 2. Calcule a integral complexa $\displaystyle\int_\gamma \frac{2z^3-3z^2+z-5}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$, onde γ é o círculo centrado em $z_0 = \mathfrak{i}$, de raio $R = 1$, e orientado no sentido **anti-horário**.

Exercício 3. Calcule a integral complexa $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z\,\sin z}{z^4-1}\,\mathrm{d}z$ quando:

- γ é a elipse $4x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ percorrida no sentido anti-horário;
- γ é a elipse $\frac{1}{4}x^2 + 4y^2 = 1$ percorrida no sentido horário.

Exercício 4. Enuncie corretamente os seguintes resultados:

- Princípio do Módulo Máximo
- Teorema de Cauchy–Goursat
- Teorema de Liouville
- Teorema de Cauchy (sobre integral de funções holomorfas)
- Teorema de Moreira

Exercício 5. Seja f uma função holomorfa no disco de centro 0 e raio 2, e γ o círculo centrado em 0, de raio 1, orientado no sentido anti-horário. Sabendo que $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z\cdot f(z)}{z^3}\,\mathrm{d}z = \pi$, calcule $f''(0)$.

Exercício 6. Seja f uma função holomorfa no disco de centro 0 e raio 2, e γ o círculo centrado em 0, de raio 1, orientado no sentido anti-horário. Sabendo que $\displaystyle\int_\gamma \frac{\log\left(1+\frac{1}{2}z\right)\cdot f(z)}{z^3}\,\mathrm{d}z = \pi$, calcule $f''(0)$.

Data: 16 de novembro de 2019.

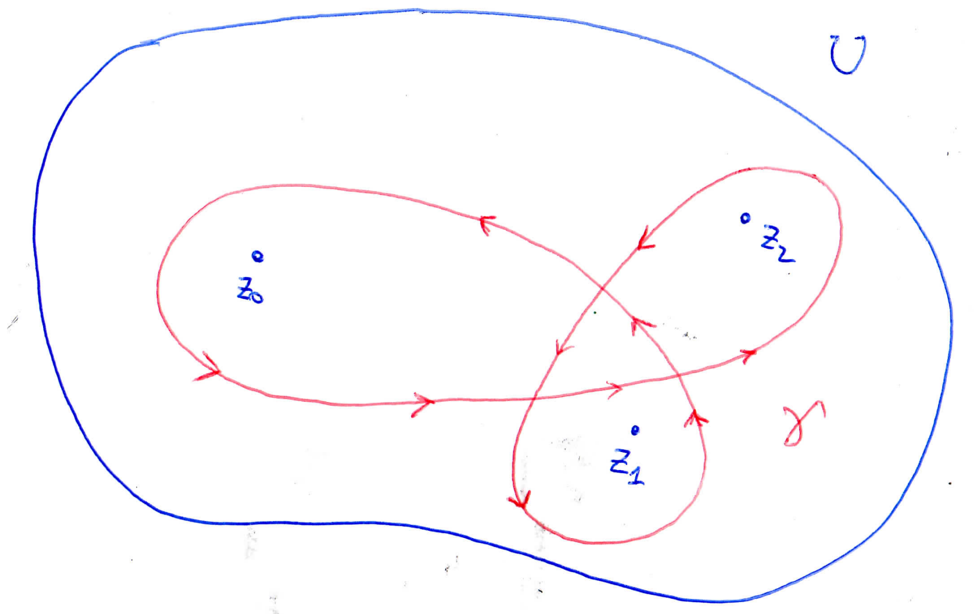

FIGURA 1. Figura do exercício 7.

Exercício 7. Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio, $z_0, z_1, z_2 \in U$ pontos distintos, e γ um caminho suave em U como na Figura 1. Seja $f\colon U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, com:

$$f(z_0) = \mathfrak{i}, \quad f'(z_0) = 1, \quad f(z_1) = 1 + \mathfrak{i},$$
$$f'(z_1) = -\mathfrak{i}, \quad f(z_2) = -1, \quad f'(z_2) = 2 - \mathfrak{i}.$$

Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)(z - z_1)^2(z - z_2)}\,\mathrm{d}z$.

Exercício 8. Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio, e $f\colon U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Quais das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) f é analítica em U;
(B) se γ é uma curva em U suave e fechada, então $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$;
(C) f admite uma primitiva em U;
(D) se V é um domínio com fronteira suave por parte, com $\overline{V} \subset U$, e $\gamma = \partial V$, então $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$;
(E) se $z_0 \in U$ e $R > 0$ é tal que $\overline{D}(z_0; R) \subset U$, então existe uma série de potências centrada em z_0, cujo raio de convergência é maior ou igual a R, que converge a f em $D(z_0; R)$.

REFERÊNCIAS

[1] Marcio G. Soares, *Cálculo em uma variável complexa*, Coleção Matemática Universitária, IMPA.
[2] Donald Sarason, *Complex function theory*, American Mathematical Society.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
E-mail address: piccione.p@gmail.com.br
gustavopramos@gmail.com