MAT0220 – CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV

LISTA DE EXERCÍCIOS 6
(ATUALIZADA)

INTEGRAIS E A FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

PROF. PAOLO PICCIONE
MONITOR: GUSTAVO RAMOS

Obs. a menos de menção contrária, consideramos parametrizações orientadas no sentido anti-horário.

1. INTEGRAIS

Todos os exercícios dessa seção podem ser feitos sem a fórmula integral de Cauchy.

Def. O *círculo unitário* é o conjunto

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Dado $r > 0$,

$$rS^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$$

Def. Dados um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ e $\xi \in \mathbb{C}$, denotamos

$$\xi + A = \{\xi + z : z \in A\}$$

Exercício 1. (A) Dado $k \in \mathbb{Z}$, calcule

$$\int_{S^1} z^k \,\mathrm{d}z$$

(B) Dados $r > 0$ e $k \in \mathbb{Z}$, calcule

$$\int_{rS^1} z^k \,\mathrm{d}z$$

Data: 6 de novembro de 2019.

(C) Dados $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ e $k \in \mathbb{Z}$, calcule

$$\int_{z_0 + rS^1} (z - z_0)^k \, \mathrm{d}z$$

Lembrete. Dados $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ e n inteiro não-negativo,

$$(z_1 + z_2)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z_1^j z_2^{n-j}$$

Exercício 2. (A) Calcule

$$\int_{S^1} z^{-1}(z + z^{-1})^{2n} \, \mathrm{d}z$$

(B) Conclua que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n} \, \mathrm{d}t = \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2n)}$$

Exercício 3. Fixe $k \in \mathbb{R}$.

(A) Calcule

$$\int_{S^1} \frac{e^{kz}}{z} \, \mathrm{d}z$$

(B) Deduza que

$$\int_0^{\pi} e^{k \cos t} \cos(k \sin t) \, \mathrm{d}t = \pi$$

Obs. Considere o resultado a seguir para fazer os exercícios abaixo:

$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

A dedução detalhada desse resultado pode ser encontrada em [2], seção VI.12.

Exercício 4. (A) Fixe $R > 0$. Integre a função $f(z) = e^{-z^2}$ ao longo do bordo de $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R, 0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \pi/8\}$.

(B) Estude o limite das integrais no ítem anterior conforme $R \to \infty$.

(C) Conclua que

$$\int_0^{2\pi} e^{-t^2} \cos(t^2) \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \sqrt{1 + \sqrt{2}}$$

Exercício 5 (Integrais de Fresnel). (A) Fixe $R > 0$. Integre a função $f(z) = e^{-z^2}$ ao longo do bordo de $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R, 0 \leq \operatorname{Arg} z \leq \pi/4\}$.

(B) Estude o limite das integrais no ítem anterior conforme $R \to \infty$.

(C) Deduza o valor das integrais

$$\int_0^\infty \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^\infty \sin(t^2)\,\mathrm{d}t$$

Dica. (exercícios 4 e 5) considere certa função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Como garantir que $\lim_{R\to\infty} f(R) = 0$ sem saber o valor explícito de f?

2. A FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY

Lembrete. Dado $A \subset \mathbb{C}$, o *bordo* de A, ou *fronteira* de A, é o conjunto

$$\partial A = \{z \in \mathbb{C} : \forall r > 0;\ B_r(z) \cap A \neq \emptyset,\ B_r(z) \cap (\mathbb{C} \setminus A) \neq \emptyset\}$$

Exercício 6. Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio.

Sejam $z_1, ..., z_k$ pontos distintos em Ω e Λ um domínio com $\overline{\Lambda} \subset \Omega$ tal que $\{z_1, ..., z_k\} \subset \Lambda$.

Deduza que

$$\sum_{j=1}^{k} \int_{\partial\Lambda} \frac{1}{z - z_j}\,\mathrm{d}z = 2k\pi\mathfrak{i}$$

Lembrete. Se $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, então

$$\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\beta} = \frac{\alpha - \beta}{z^2 - (\alpha+\beta)z + \alpha\beta}$$

em $\mathbb{C} \setminus \{\alpha, \beta\}$

Exercício 7. Calcule

(A)

$$\int_{S^1} z\bar{z}\,\mathrm{d}z$$

(B)
$$\int_{3S^1} \frac{z+1}{z}\,\mathrm{d}z$$
(C)
$$\int_{\frac{1}{4}S^1} \frac{z+1}{z}\,\mathrm{d}z$$
(D)
$$\int_{5\mathrm{i}+S^1} \frac{z+1}{z}\,\mathrm{d}z$$
(E)
$$\int_{\frac{1}{2}S^1} \frac{2z+1}{z^2+z}\,\mathrm{d}z$$
(F)
$$\int_{2+S^1} \frac{1}{z^2-2}\,\mathrm{d}z$$
(G)
$$\int_{S^1} \frac{1}{z^2-2}\,\mathrm{d}z$$
(H)
$$\int_{Q} \pi e^{\pi\bar{z}}\,\mathrm{d}z$$
onde Q é o quadrado de vértices $0, 1, 1+\mathfrak{i}$ e $\mathfrak{i}$.

(I)
$$\int_{z_0+rS^1} \frac{1}{z-z_0}\,\mathrm{d}z$$
onde $r > 0$.

(J)
$$\int_{z_0+rS^1} \frac{1}{(z-z_0)^n}\,\mathrm{d}z$$
onde $n \geq 2$.

(K)
$$\int_{S^1} \frac{e^{\mathrm{i}z}}{z^2}\,\mathrm{d}z$$
(L)
$$\int_{S^1} \frac{\sin z}{z^4}\,\mathrm{d}z$$
(M)
$$\int_{1+\frac{1}{4}S^1} \frac{\log z}{z^n}\,\mathrm{d}z$$
onde $n \geq 1$.

(N)
$$\int_{S^1} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n}\,\mathrm{d}z$$
onde $n \geq 1$.

(O)
$$\int_{2S^1} \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$$

(P)
$$\int_{S^1} \frac{e^{-z}}{z^2}\,\mathrm{d}z$$

(Q)
$$\int_{(2|\xi|)S^1} \frac{e^z}{z^2+\xi^2}\,\mathrm{d}z$$
onde $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(R)
$$\int_{1+2S^1} \frac{ze^z}{(z-1)^3}\,\mathrm{d}z$$

Algumas respostas.

Ítem	**Resposta**
(A)	0
(B)	$2\pi\mathfrak{i}$
(D)	0
(K)	-2π
(R)	$3e\pi\mathfrak{i}$

Referências

[1] Marcio G. Soares, *Cálculo em uma variável complexa*, Coleção Matemática Universitária, IMPA.
[2] Donald Sarason, *Complex function theory*, American Mathematical Society.

Universidade de São Paulo, Departamento de Matemática
Email address: `piccione.p@gmail.com.br, gustavopramos@gmail.com`