MAT0220 – CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV
LISTA DE EXERCÍCIOS 4

ARGUMENTO, LOGARITMO E POTÊNCIAS COMPLEXAS. SÉRIES EM $\mathbb{C}$.

PROF. PAOLO PICCIONE
MONITOR: GUSTAVO RAMOS

1. EQUAÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN E DIFERENCIABILIDADE (PARTE 2)

Notação. ao longo dessa seção, $G \subset \mathbb{C}$ é aberto e $f : G \to \mathbb{C}$ é uma função complexa.

Lembrete. Seja I um intervalo em $\mathbb{R}$.

- $\gamma : I \to \mathbb{C}$ é dita *regular* em $t_0 \in I$ quando γ é diferenciável em t_0 e $\gamma'(t_0) \neq 0$.
- f é dita *conforme* em $z_0 \in G$ quando dadas $\gamma_1 : I \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : I \to \mathbb{C}$, onde γ_i é regular em t_i e $z_0 = \gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2)$, vale:
  (A) $f'(z_0) \neq 0$
  (B) $(f \circ \gamma_1)$ faz o mesmo ângulo com $(f \circ \gamma_2)$ em z_0 que γ_1 faz com γ_2 em z_0

Exercício 1 (Função holomorfa é conforme). Prove que se f é diferenciável em $z_0 \in G$ com $f'(z_0) \neq 0$, então f é conforme em z_0.

Exercício 2 (Função conforme é holomorfa). Prove que se f é conforme com partes real e imaginária de classe C^1, então f é holomorfa.

O leitor interessado pode consultar [3] para encontrar esboços de como aplicações holomorfas distorcem os subconjuntos de $\mathbb{C}$.

Lembrete. f é dita *harmônica* quando f é de classe C^2 e

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Exercício 3 (Função holomorfa é harmônica). Suponha que f é de classe C^2 e holomorfa. Prove que f é harmônica.

Data: 19 de setembro de 2019.

Lembrete. Se $H \subset \mathbb{R}^2$ é aberto e $u : H \to \mathbb{R}$ é de classe C^2 e harmônica, um *conjugado harmônico de* u é uma função $v : H \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

é harmônica.

Exercício 4. Para quais valores de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ a função

$$u(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

é real harmônica? Determine todos os conjugados harmônicos de u quando u é harmônica.

Exercício 5. Determine todas as funções $h\colon\ [0, \infty[\to \mathbb{R}$ tais que

$$u(x, y) = h(x^2 + y^2)$$

é harmônica. Note que essas são todas as funções harmônicas com simetria radial.

Exercício 6. Prove que se u é função real harmônica, então $\frac{\partial u}{\partial z}$ é holomorfa.

2. FUNÇÃO EXPONENCIAL (PARTE 2)

Exercício 7. Prove que valem as seguintes fórmulas

(A) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$
(B) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$
(C) $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$
(D) $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$

Exercício 8. Resolva a equação diferencial abaixo para $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ com derivada holomorfa:

$$f'' = f$$

Exercício 9. Descreva as imagens dos conjuntos abaixo pela função $\cos z$:

(A) $\Im(z)$ constante
(B) $\Re(z)$ constante

3. LOGARITMO E ARGUMENTO

Notação. O ramo principal do logaritmo se denota Log.

Exercício 10. Determine $\operatorname{Arg} z$ e $\operatorname{Log} z$, onde:

(A) $z = (1 + \mathrm{i})$
(B) $z = (1 + \mathrm{i})^4$
(C) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \mathrm{i}\right)^5$

Exercício 11. Encontre todos os valores de:

(A) $\cosh(\log 2)$
(B) $\log(\log \mathfrak{i})$
(C) $(1+\mathfrak{i})^{\mathfrak{i}}$

Exercício 12. Determine o ramo principal de $f(z) = \sqrt{z-1}$.

Exercício 13. Derive a função $f(z) = \log\left(\tanh z^2\right)$

Exercício 14. Usando o ramo principal de $f(z) = z^\lambda$, calcule:

(A) $2^{\sqrt{2}}$
(B) $12^{\sqrt{2}}$
(C) $(5\mathfrak{i})^{1+\mathfrak{i}}$
(D) $1^{\mathfrak{i}}$
(E) $1^{-\mathfrak{i}}$

4. Séries

Lembrete.

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Exercício 15 (Série geométrica). Na lista 1, provamos que dado $z \neq 1$;

$$1 + z + ... + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1-z}$$

(A) Prove que dado $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < 1$;

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$$

(B) Prove que dado $z \in \mathbb{C}$ com $|z| > 1$;

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{z}{z-1}$$

Exercício 16. Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{1-z} \quad (\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\})$$

No exercício anterior, provamos que dado $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < 1$, vem $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

Se $z \in \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$, podemos calcular $f(z)$.

Nessa situação, ainda vale $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$?

Exercício 17. Mostre que as séries abaixo divergem:

(A)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\mathfrak{i}}$$

(B)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n + \mathrm{i}}$$

REFERÊNCIAS

[1] Marcio G. Soares, *Cálculo em uma variável complexa*, Coleção Matemática Universitária, IMPA.
[2] Donald Sarason, *Complex function theory*, American Mathematical Society.
[3] Tristan Needham, *Visual Complex Analysis*, Clarendon Press.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
E-mail address: piccione.p@gmail.com.br, gustavopramos@gmail.com