MAT0220 – CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV
LISTA DE EXERCÍCIOS 3

FÓRMULA DE GREEN NO PLANO
DERIVADA COMPLEXA
FUNÇÃO EXPONENCIAL

PROF. PAOLO PICCIONE
MONITOR: GUSTAVO RAMOS

1. Equações de Cauchy-Riemann e diferenciabilidade

Exercício 1. Verifique se as funções a seguir satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:

- $f(z) = x^3 - 3xy^2 + \mathfrak{i}(3x^2 - y^3)$
- $f(z) = e^{-y}(\cos x + \mathfrak{i}\sin x)$
- $f(z) = e^{-x}(\cos y - \mathfrak{i}\sin y)$
- $f(z) = e^{y}(\cos x + \mathfrak{i}\sin x)$

Lembrete. Sejam $G \subset \mathbb{C}$ aberto e $f : G \to \mathbb{C}$. Então f é *diferenciável* em $z_0 \in G$ se, e só se, u, v são diferenciáveis no sentido real em z_0 e u, v satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em z_0.

Exercício 2. Determine os pontos onde as funções abaixo são diferenciáveis:

(A) $f(z) = |z|^2$.
(B) $f(z) = \Re(z)$
(C) $f(z) = \overline{z}$
(D) $f(z) = \overline{z}^2$

Exercício 3. Seja $f\colon A \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa no aberto $A \subset \mathbb{C}$, e denote com $A^- \subset \mathbb{C}$ o aberto:

$$A^- = \big\{\overline{z} : z \in A\big\}.$$

Prove que a função $g\colon A^- \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

é holomorfa em A^-.

Data: 31 de agosto de 2019.

Exercício 4. Considere a função

$$f(z) = \sqrt{|xy|}$$

(A) Mostre que f satisfaz as equações de Cauchy-Riemann na origem.
(B) Mostre que f não é diferenciável na origem.
(C) Os ítens anteriores são contraditórios?

Exercício 5 (Cauchy-Riemann na forma polar). Prove que as equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares se escrevem

$$r\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial v}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -r\frac{\partial v}{\partial r}$$

2. Fórmula de Green no plano

Exercício 6. Seja $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ o campo vetorial definido por:

$$\mathbf{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right).$$

(A) Calcule a integral de linha $\int_{\gamma_R} \mathbf{F}$, onde γ_R é o círculo de raio $R > 0$ centrado na origem de $\mathbb{R}^2$, e orientada no sentido anti-horário.
(B) Calcule $\int_{\partial V} \mathbf{F}$, onde ∂V está orientada no sentido anti-horário para cada V abaixo:
  (a) $V_1 = \{z \in \mathbb{C} : 1/2 \leq |z| \leq 1\}$
  (b) $V_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1,\ \Re(z) \geq 0\}$

3. Função exponencial

Exercício 7. Calcule:
(A) $\exp\left(\frac{5+\pi\mathrm{i}}{4}\right)$
(B) $\exp\left(\frac{7+3\pi\mathrm{i}}{2}\right)$
(C) $\exp\left(\frac{-1-5\pi\mathrm{i}}{6}\right)$

Exercício 8. Determine a região onde a função abaixo é diferenciável:

$$f(z) = \exp(\overline{z})$$

Exercício 9. Determine os números $z \in \mathbb{C}$ para os quais vale:

$$\exp(\mathrm{i}\overline{z}) = \overline{\exp(i\overline{z})}$$

Exercício 10 (Funções trigonométricas). Defina

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}\right)$$

$$\sin z = \frac{1}{2\mathfrak{i}}\left(e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}\right)$$

(A) Mostre que essas funções são holomorfas e calcule suas derivadas
(B) Dê essas funções na forma $u + \mathrm{i}v$

Exercício 11. Determine
(A) $\Re\left(\exp(\mathfrak{i}z^2)\right)$
(B) $\Im\left(\exp(\mathfrak{i}\sin x)\right)$

Exercício 12 (Funções hiperbólicas). Defina

$$\cosh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right)$$

$$\sinh z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right)$$

(A) Mostre que essas funções são holomorfas e calcule suas derivadas
(B) Dê essas funções na forma $u + \mathrm{i}v$

REFERÊNCIAS

[1] Marcio G. Soares, *Cálculo em uma variável complexa*, Coleção Matemática Universitária, IMPA.
[2] Donald Sarason, *Complex function theory*, American Mathematical Society.

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
E-mail address: piccione.p@gmail.com.br, gustavopramos@gmail.com