MAT 133 — Cálculo II

Prof. Paolo Piccione

12 de fevereiro de 2015

Prova REC — $\boxed{\textbf{B}}$

2014210

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Instruções

- A duração da prova é de **uma hora e quarenta minutos**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{10}}$ *de ponto* (0.1).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página)
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- $\mathbb{R}$ denota o conjunto dos números reais
- $\sin x$ é a função "seno de x"; $\ln x$ é a função "logaritmo natural de x".
- $]a, b[$ denota o intervalo *aberto* de extremos a e b.
- $\cosh x$ é a função cosseno hiperbólico, dada por $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

Questão 1. *Seja f uma função de duas variáveis, que admite derivadas segundas contínua em $\mathbb{R}^2$. Seja (x_0, y_0) um ponto crítico de f, e seja $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ a matriz Hessiana da f em (x_0, y_0). Se $\alpha\gamma - \beta^2 < 0$ e $\alpha + \gamma > 0$, o que podemos concluir sobre (x_0, y_0)?*

(a) é um mínimo local para f;
(b) o teste da matriz Hessiana falha em (x_0, y_0);
(c) é um ponto de acumulação da f;
(d) é um ponto de sela para f;
(e) é um máximo local para f.

Questão 2. *Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

(a) Se f é uma função diferenciável, então seus pontos críticos são máximos ou mínimos locais;
(b) Um máximo local para uma função diferenciável f, que seja um ponto interior do domínio de f, é necessariamente um ponto crítico de f;
(c) Se f se anula em (x_0, y_0), e (x_0, y_0) é um ponto crítico da f, então (x_0, y_0) é um mínimo local da f;
(d) Se o Hessiano de f em (x_0, y_0) tem dois autovalores negativos, então (x_0, y_0) é um ponto de mínimo da f;
(e) Se f é diferenciável em (x_0, y_0), então as derivadas parciais da f em (x_0, y_0) se anulam.

Questão 3. *O ponto $(2, 2)$ é crítico para a função*

$$f(x, y) = \frac{1}{2}xy + \frac{4}{x} + \frac{4}{y}.$$

Que tipo de ponto crítico é?

(a) um máximo local;
(b) não é um ponto crítico;
(c) o teste do Hessiano falha;
(d) um mínimo local;
(e) um ponto de sela.

Questão 4. *Calcule o gradiente da função* $f(x,y) = e^y \sin x$ *no ponto* $(0,0)$.

(a) $\nabla f(0,0) = (-1,0)$;
(b) $\nabla f(0,0) = (1,1)$;
(c) $\nabla f(0,0) = (0,-1)$;
(d) $\nabla f(0,0) = (-1,1)$;
(e) $\nabla f(0,0) = (1,0)$.

Questão 5. *Calcule o volume* V *do sólido gerado pela rotação em torno do eixo* x *da região* R *dada por:*

$$R = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le 2\sin x\big\}.$$

(a) $V = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$;
(b) $V = \pi^2$;
(c) $V = \dfrac{\pi}{2}$;
(d) $V = 2\pi^2$;
(e) $V = 0$.

Questão 6. *Determine os pontos críticos da função*

$$f(x,y) = 3y^2x + x^3 - 3x.$$

(a) $(1,1)$ e $(-1,1)$;
(b) f não possui pontos críticos;
(c) $(-1,0)$ e $(1,0)$;
(d) $(0,0)$, $(1,-1)$ e $(-1,1)$;
(e) $(0,1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ e $(0,-1)$.

Questão 7. *Calcule o limite* $L = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 e^{-2x}$.

(a) $L = 0$;
(b) $L = +\infty$;
(c) $L = e$;
(d) $L = 1$;
(e) $L = -\infty$.

Questão 8. *Dada a função* $f(x,y) = \dfrac{y}{x+y}$*, calcule a derivada parcial segunda* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

(a) $\dfrac{(x-y)^2}{(x+y)^4}$;

(b) $\dfrac{x+y}{(x+y)^3}$;

(c) $\dfrac{y-x}{(x+y)^3}$;

(d) $\dfrac{x-y}{(x+y)^4}$;

(e) $\dfrac{(x-y)^2}{(x+y)^3}$.

Questão 9. *Dada a função* $f(x,y) = x^2 e^{xy}$*, calcule a derivada parcial* $\frac{\partial f}{\partial y}(2,2)$.

(a) $3e^4$;

(b) $5e^4$;

(c) $8e^4$;

(d) $2e^4$;

(e) e^4.

Questão 10. *Dada a função de três variáveis*

$$f(x,y,z) = x^3y^2 + xe^z \cos y + \arctan(x^2y^3),$$

calcule a derivada terceira $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$,

(a) $-e^z \sin y$;

(b) $e^z \cos y$;

(c) $-xe^z \cos y$;

(d) $xe^z \sin y$;

(e) $x \cos y$.

Questão 11. *Partindo do ponto $(1,1)$, em qual direção a função*

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^3$$

decresce mais rapidamente?

(a) $\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$;
(b) $\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$;
(c) $\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$;
(d) $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$;
(e) $\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

Questão 12. *Dada a função $f(x) = -8x^4 + 9x^2 - 5$, determine em quais intervalos é crescente.*

(a) $]-\infty, 0[$ e $]\frac{3}{4}, +\infty[$;
(b) $]-\infty, -\frac{3}{4}[$ e $]0, \frac{3}{4}[$;
(c) $]0, \frac{3}{4}[$;
(d) $]-\frac{3}{4}, 0[$;
(e) $]-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}[$.

Questão 13. *Determine os pontos críticos da função*

$$f(x,y) = x^3 - y^3 - 3x^2 + 3y.$$

(a) $(0,-1)$ e $(2,1)$;
(b) $(0,1)$, $(0,-1)$, $(2,1)$ e $(2,-1)$;
(c) $(0,0)$, $(1,-1)$, $(2,1)$ e $(2,-1)$;
(d) $(1,0)$, $(-1,0)$, $(2,1)$ e $(2,-1)$;
(e) $(0,1)$ e $(2,-1)$.

Questão 14. *Calcule a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, do gráfico da função $f(x) = x + 1$, $1 \le x \le 4$.*

(a) $21\sqrt{3}\,\pi$;
(b) $20\sqrt{2}\,\pi$;
(c) $23\sqrt{2}\,\pi$;
(d) $21\sqrt{2}\,\pi$;
(e) $20\sqrt{3}\,\pi$.

Questão 15. *Calcule a derivada direcional da* $f(x,y) = \cos(2x+3y)$ *no ponto* $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ *e na direção* $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

(a) $-\sqrt{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}$;
(b) $\sqrt{6} + \frac{2}{\sqrt{3}}$;
(c) $\sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}$;
(d) $\sqrt{6} - \frac{2}{\sqrt{3}}$;
(e) $-\sqrt{6} - \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Questão 16. *Qual é o ponto do plano* $2x + y + z = 1$ *mais próximo da origem?*

(a) $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$;
(b) $\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$;
(c) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$;
(d) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$;
(e) $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.

Questão 17. *Considere o conjunto* $A \subset \mathbb{R}^2$ *definido por:*

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\right\}.$$

Quais das seguintes afirmações é verdadeira?

(a) A é fechado e limitado;
(b) A é aberto e ilimitado;
(c) A é aberto e limitado;
(d) A é compacto;
(e) A é fechado e ilimitado.

Questão 18. *Calcule a integral definida* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x \, \mathrm{d}x$.

(a) $\dfrac{1}{4}$;
(b) $\dfrac{1}{5}$;
(c) $\dfrac{1}{3}$;
(d) 0;
(e) $\dfrac{1}{2}$.

Questão 19. *Considere as seguintes afirmações:*

(A1) *A união de dois subconjuntos abertos de* $\mathbb{R}^3$ *é aberta.*
(A2) *A interseção de dois subconjuntos fechados de* $\mathbb{R}^3$ *é fechada.*
(A3) *A interseção entre um compacto e um aberto de* $\mathbb{R}^3$ *é compacta.*

Quais delas são verdadeiras?

(a) (A1) e (A2) são verdadeiras. (A3) é falsa;
(b) (A1) e (A3) são verdadeiras. (A2) é falsa;
(c) São todas verdadeiras;
(d) (A3) e (A2) são verdadeiras. (A1) é falsa;
(e) São todas falsas.

Questão 20. *O ponto* $\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *é crítico para a função*

$$f(x, y) = -y^4 + 4xy - 4x^2.$$

Que tipo de ponto crítico é?

(a) o teste do Hessiano falha;
(b) um máximo local;
(c) um ponto de sela;
(d) não é um ponto crítico;
(e) um mínimo local.

MAT 133 — Cálculo II

Turma 2014210

Prof. Paolo Piccione

Prova REC — $\boxed{\mathbf{B}}$

12 de fevereiro de 2015

Nome: ____

Número USP: ______________________________________

Assinatura: _______________________________________

Folha de Respostas

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota