MAT 220 — Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof. Paolo Piccione

Prova SUB

05 de dezembro de 2019

Nome: ____

Número USP: ______________________________________

Assinatura: ______________________________________

Instruções

- A duração da prova é de **duas horas**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- O corpo dos número complexos é denotado por $\mathbb{C}$. A *unidade imaginária* é denotada por $\mathfrak{i}$. Dado um número complexo $z \in \mathbb{C}$, a *parte real* e a *parte imaginária* de z são denotadas respectivamente por $\Re(z)$ e $\Im(z)$. Assim, $z = \Re(z) + \mathfrak{i}\,\Im(z)$.
- Dado um número complexo z_0 e um número positivo R, $D(z_0;R)$ denota o disco aberto centrado em z_0 e de raio R, e $\overline{D(z_0;R)}$ denota o disco fechado. O símbulo $D(z_0;R)^*$ denota o conjunto $D(z_0;R)\setminus\{z_0\}$.
- Dado $z_0 \in \mathbb{C}$, e $0 \le \rho_1 < \rho_2$, $A(z_0;\rho_1,\rho_2)$ denota o anel aberto
$$\big\{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\big\}.$$
- Dada uma função holomorfa $f\colon D(a;R)^* \to \mathbb{C}$ com uma singularidade isolada em a, $\mathrm{res}(f;a)$ é o *resíduo* de f em a.

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

$\boxed{\mathbf{D}}$

Questão 1. *Calcule*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)}\,\mathrm{d}x.$$

Sugestão: *Denote por* $f(z) = \dfrac{4}{(z^2-2z+2)(z^2+2z+2)}$*; pode utilizar os seguintes limites:*

$$\lim_{z\to 1-\mathrm{i}} (z-1+\mathrm{i})f(z) = -\frac{1-\mathrm{i}}{4}, \quad \lim_{z\to 1+\mathrm{i}} (z-1-\mathrm{i})f(z) = -\frac{1+\mathrm{i}}{4},$$

$$\lim_{z\to -1-\mathrm{i}} (z+1+\mathrm{i})f(z) = \frac{1+\mathrm{i}}{4}, \quad \lim_{z\to -1+\mathrm{i}} (z+1-\mathrm{i})f(z) = \frac{1-\mathrm{i}}{4}.$$

(a) 2π;
(b) $\frac{\pi}{2}$;
(c) $\frac{\pi}{4}$;
(d) 4π;
(e) π.

Questão 2. *Calcule o raio de convergência da série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 4^n \frac{2n^2}{3n+1} (z-\mathrm{i})^n.$$

(a) $R = +\infty$;
(b) $R = 3$;
(c) $R = \dfrac{1}{4}$;
(d) $R = 0$;
(e) $R = \dfrac{1}{3}$.

Questão 3. *Classifique a singularidade* 0 *da função abaixo*

$$f(z) = \frac{1-z^2-\cos z}{z^2}.$$

(a) polo simples (de ordem 1);
(b) polo de ordem 2;
(c) polo de ordem 3;
(d) singularidade removível;
(e) singularidade essencial.

Questão 4. *Determine* $\text{res}(f;0)$, *onde*

$$f(z) = 6z^5 e^{1/z^2}.$$

(a) 1;
(b) 0;
(c) $\frac{1}{6}$;
(d) 2;
(e) 6.

Questão 5. *Sejam* p, q *inteiros positivos. Classifique as singularidades da função* f *abaixo:*

$$\frac{z^p}{1 - z^q}$$

(a) há uma singularidade removível e $(q - 1)$ polos simples;
(b) todas as singularidades são essenciais;
(c) todas singularidades são removíveis;
(d) há um polo simples e $(q - 1)$ singularidades removíveis;
(e) todas as singularidades são polos simples.

Questão 6. *Qual é o conjunto dos pontos nos quais a função abaixo admite derivada complexa?*

$$f(x + \mathrm{i}y) = x^2 + \mathrm{i}y^2$$

(a) $\{t + \mathrm{i}t : t \in \mathbb{R}\}$;
(b) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;
(c) $\mathbb{C}$;
(d) $\{t - \mathrm{i}t : t \in \mathbb{R}\}$;
(e) $\emptyset$.

Questão 7. *Calcule o valor principal de* $\mathrm{i}^{4\mathrm{i}}$.

(a) e^{π};
(b) $e^{-2\mathrm{i}\pi}$;
(c) $e^{2\pi}$;
(d) $e^{-2\pi}$;
(e) $e^{-\pi}$.

Questão 8. *Calcule*

$$\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)}\,\mathrm{d}z,$$

onde C *é o quadrado de vértices* $(-2-2\mathrm{i}), (2-2\mathrm{i}), (2+2\mathrm{i}), (-2+2\mathrm{i})$ *orientado em sentido anti-horário.*

(a) $\dfrac{\pi\mathrm{i}}{2}$;
(b) $2\pi\mathrm{i}$;
(c) $\pi\mathrm{i}$;
(d) 0;
(e) $\dfrac{\pi\mathrm{i}}{4}$.

Questão 9. *Determine a função* f *que é igual à seguinte série de potências num disco aberto centrado em* $z_0 = 0$*:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$$

(a) $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)^2}$;
(b) $f(z) = -\dfrac{z}{(1-z)^2}$;
(c) $f(z) = -\dfrac{1}{(1-z)^2}$;
(d) $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$;
(e) $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$.

Questão 10. *Quantas raízes o polinômio abaixo possui no disco aberto* $D(0;1)$*?*

$$g(z) = z^7 + 7z^3 + 4z + 1$$

Sugestão: *use o Teorema de Rouché, com* $f(z) = 7z^3$*.*

(a) 0;
(b) 3;
(c) 7;
(d) 1;
(e) 2.

Questão 11. *Em qual anel é convergente a espansão de Laurent da função* $f(z) = \dfrac{e^z}{(z^2+1)(z-3)}$ *centrada em* $z_0 = 3$*?*

(a) $\mathbb{C} \setminus \{1,\ -1,\ 3\}$;

(b) $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i},\ -\mathrm{i},\ 3\}$;

(c) $\Big\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-3| < \sqrt{10}\Big\}$;

(d) $\Big\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-3| < 4\Big\}$;

(e) $\Big\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-\mathrm{i}| < 4\Big\}$.

Questão 12. *Obtenha a série de Taylor de* f *centrada em* $z_0 = 2$*, onde*

$$f(z) = \frac{1}{z^2}.$$

(a) $\displaystyle \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{z-2}{2}\right)^n$;

(b) $\displaystyle \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{z-2}{4}\right)^n$;

(c) $\displaystyle \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{z-2}{4}\right)^n$;

(d) $\displaystyle \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{z-2}{2}\right)^n$;

(e) $\displaystyle \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{z-2}{2}\right)^n$.

Questão 13. *Qual é o conjunto* S *das singularidades da função* f *abaixo e a qual é a classificação dessas singularidades?*

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

(a) $S = \big\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\big\}$, as singularidades são polos simples;

(b) $S = \big\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\big\}$, as singularidades são polos simples;

(c) $S = \big\{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\big\}$, as singularidades são removíveis;

(d) $S = \big\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\big\}$, as singularidades são essenciais;

(e) $S = \big\{k\pi : k \in \mathbb{Z}\big\}$, as singularidades são removíveis.

Questão 14. *Qual das alternativas é um conjugado harmônico da função abaixo?*

$$u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

(a) $v(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$;

(b) $v(x, y) = -\dfrac{2x}{x^2 + y^2}$;

(c) $v(x, y) = -\dfrac{x}{x^2 + y^2}$;

(d) $v(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$;

(e) $v(x, y) = \dfrac{2x}{x^2 + y^2}$.

Questão 15. *Qual é o raio de convergência R da série de potências abaixo?*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+2}} z^{4n+1}$$

Sugestão: $\dfrac{z^{4n+1}}{3^{2n+2}} = \dfrac{z}{9}\left(\dfrac{z^4}{9}\right)^n$.

(a) $R = 3$;

(b) $R = 1/\sqrt{3}$;

(c) $R = \sqrt{3}$;

(d) $R = 1/3$;

(e) $R = 3\sqrt{3}$.

Questão 16. *Calcule*

$$\int_{S^1} \frac{1}{z^2 - 2}\, \mathrm{d}z$$

onde S^1 é o círculo centrado em 0, de raio 1, e orientado positivamente.

(a) $2\pi\mathrm{i}$;

(b) $4\pi\mathrm{i}$;

(c) 0;

(d) $-4\pi\mathrm{i}$;

(e) $-2\pi\mathrm{i}$.

Questão 17. *Calcule a derivada terceira* $f'''(1+\mathfrak{i})$ *da função*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^3 (z-1-\mathfrak{i})^{n+1}.$$

(a) -54;
(b) 9;
(c) -9;
(d) 54;
(e) 48.

Questão 18. *Calcule*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$

(a) $\dfrac{3\pi}{2}$;
(b) π;
(c) 2π;
(d) $\dfrac{\pi}{4}$;
(e) $\dfrac{\pi}{2}$.

Questão 19. *Se* a *é um polo de ordem* 2 *da função holomorfa*

$$f\colon D(a;R)^* \to \mathbb{C}$$

e $h(z) = (z-a)^2 f(z)$*, qual é a fórmula correta para o resíduo da* f *em* a*?*

(a) $\operatorname{res}(f;a) = \frac{1}{2}h'(a)$;
(b) $\operatorname{res}(f;a) = \frac{1}{2}h''(a)$;
(c) $\operatorname{res}(f;a) = \lim_{z\to a}(z-a)h(z)$;
(d) $\operatorname{res}(f;a) = h'(a)$;
(e) $\operatorname{res}(f;a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$.

Questão 20. *Obtenha a série de Laurent que converge em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ para a função abaixo*

$$f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

(a) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{z^{4n}}$;

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{4n}}$;

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{4n}}$;

(d) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{4n}}$;

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} \frac{1}{z^{4n}}$.

MAT 220 — Cálculo Diferencial e Integral IV
Prof. Paolo Piccione
Prova SUB
05 de dezembro de 2019

Nome: ____

Número USP: ______________________________________

Assinatura: ____

Folha de Respostas $\boxed{\textbf{D}}$

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	**Erradas**	**Nota**