

MAT 220 — Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof. Paolo Piccione

Prova SUB

05 de dezembro de 2019

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **duas horas**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- O corpo dos número complexos é denotado por \mathbb{C} . A *unidade imaginária* é denotada por i . Dado um número complexo $z \in \mathbb{C}$, a *parte real* e a *parte imaginária* de z são denotadas respectivamente por $\Re(z)$ e $\Im(z)$. Assim, $z = \Re(z) + i\Im(z)$.
- Dado um número complexo z_0 e um número positivo R , $D(z_0; R)$ denota o disco aberto centrado em z_0 e de raio R , e $\overline{D}(z_0; R)$ denota o disco fechado. O símbolo $D(z_0; R)^*$ denota o conjunto $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$.
- Dado $z_0 \in \mathbb{C}$, e $0 \leq \rho_1 < \rho_2$, $A(z_0; \rho_1, \rho_2)$ denota o anel aberto $\{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$.
- Dada uma função holomorfa $f: D(a; R)^* \rightarrow \mathbb{C}$ com uma singularidade isolada em a , $\text{res}(f; a)$ é o *resíduo* de f em a .

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

C

Questão 1. Qual das alternativas é um conjugado harmônico da função abaixo?

$$u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

(a) $v(x, y) = -\frac{2x}{x^2 + y^2}$;

(b) $v(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$;

(c) $v(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$;

(d) $v(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$;

(e) $v(x, y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}$.

Questão 2. Determine a função f que é igual à seguinte série de potências num disco aberto centrado em $z_0 = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nz^n$$

(a) $f(z) = \frac{1}{1-z}$;

(b) $f(z) = -\frac{z}{(1-z)^2}$;

(c) $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$;

(d) $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$;

(e) $f(z) = -\frac{1}{(1-z)^2}$.

Questão 3. Qual é o raio de convergência R da série de potências abaixo?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{2n+2}} z^{4n+1}$$

Sugestão: $\frac{z^{4n+1}}{3^{2n+2}} = \frac{z}{9} \left(\frac{z^4}{9}\right)^n$.

(a) $R = 1/3$;

(b) $R = 3\sqrt{3}$;

(c) $R = 1/\sqrt{3}$;

(d) $R = 3$;

(e) $R = \sqrt{3}$.

Questão 4. Calcule

$$\int_C \frac{\cos z}{z(z^2 + 8)} dz,$$

onde C é o quadrado de vértices $(-2-2i)$, $(2-2i)$, $(2+2i)$, $(-2+2i)$ orientado em sentido anti-horário.

- (a) $\frac{\pi i}{4}$;
- (b) $2\pi i$;
- (c) πi ;
- (d) 0 ;
- (e) $\frac{\pi i}{2}$.

Questão 5. Determine $\text{res}(f; 0)$, onde

$$f(z) = 6z^5 e^{1/z^2}.$$

- (a) 0 ;
- (b) 1 ;
- (c) 2 ;
- (d) $\frac{1}{6}$;
- (e) 6 .

Questão 6. Em qual anel é convergente a expansão de Laurent da função $f(z) = \frac{e^z}{(z^2 + 1)(z - 3)}$ centrada em $z_0 = 3$?

- (a) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 3| < \sqrt{10}\}$;
- (b) $\mathbb{C} \setminus \{1, -1, 3\}$;
- (c) $\mathbb{C} \setminus \{i, -i, 3\}$;
- (d) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - 3| < 4\}$;
- (e) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - i| < 4\}$.

Questão 7. Calcule a derivada terceira $f'''(1+i)$ da função

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^3 (z - 1 - i)^{n+1}.$$

- (a) -9 ;
- (b) -54 ;
- (c) 48 ;
- (d) 54 ;
- (e) 9 .

Questão 8. Quantas raízes o polinômio abaixo possui no disco aberto $D(0; 1)$?

$$g(z) = z^7 + 7z^3 + 4z + 1$$

Sugestão: use o Teorema de Rouché, com $f(z) = 7z^3$.

- (a) 0;
- (b) 7;
- (c) 1;
- (d) 3;
- (e) 2.

Questão 9. Obtenha a série de Laurent que converge em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ para a função abaixo

$$f(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} \frac{1}{z^{4n}}$;
- (b) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{4n}}$;
- (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{4n}}$;
- (d) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{z^{4n}}$;
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{4n}}$.

Questão 10. Se a é um polo de ordem 2 da função holomorfa

$$f: D(a; R)^* \rightarrow \mathbb{C}$$

e $h(z) = (z - a)^2 f(z)$, qual é a fórmula correta para o resíduo da f em a ?

- (a) $\text{res}(f; a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)h(z)$;
- (b) $\text{res}(f; a) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$;
- (c) $\text{res}(f; a) = \frac{1}{2}h'(a)$;
- (d) $\text{res}(f; a) = h'(a)$;
- (e) $\text{res}(f; a) = \frac{1}{2}h''(a)$.

Questão 11. Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx.$$

- (a) π ;
- (b) $\frac{\pi}{2}$;
- (c) 2π ;
- (d) $\frac{3\pi}{2}$;
- (e) $\frac{\pi}{4}$.

Questão 12. Calcule o valor principal de i^{4i} .

- (a) $e^{2\pi}$;
- (b) e^{π} ;
- (c) $e^{-2i\pi}$;
- (d) $e^{-2\pi}$;
- (e) $e^{-\pi}$.

Questão 13. Sejam p, q inteiros positivos. Classifique as singularidades da função f abaixo:

$$\frac{z^p}{1 - z^q}$$

- (a) todas as singularidades são polos simples;
- (b) todas singularidades são removíveis;
- (c) todas as singularidades são essenciais;
- (d) há uma singularidade removível e $(q - 1)$ polos simples;
- (e) há um polo simples e $(q - 1)$ singularidades removíveis.

Questão 14. Qual é o conjunto S das singularidades da função f abaixo e a qual é a classificação dessas singularidades?

$$f(z) = \frac{1}{\sin z}$$

- (a) $S = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, as singularidades são essenciais;
- (b) $S = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, as singularidades são removíveis;
- (c) $S = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, as singularidades são polos simples;
- (d) $S = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, as singularidades são removíveis;
- (e) $S = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, as singularidades são polos simples.

Questão 15. Calcule o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 4^n \frac{2n^2}{3n+1} (z-i)^n.$$

- (a) $R = \frac{1}{3}$;
- (b) $R = \frac{1}{4}$;
- (c) $R = 0$;
- (d) $R = 3$;
- (e) $R = +\infty$.

Questão 16. Qual é o conjunto dos pontos nos quais a função abaixo admite derivada complexa?

$$f(x+iy) = x^2 + iy^2$$

- (a) $\mathbb{C} \setminus \{0\}$;
- (b) $\{t + it : t \in \mathbb{R}\}$;
- (c) $\{t - it : t \in \mathbb{R}\}$;
- (d) \mathbb{C} ;
- (e) \emptyset .

Questão 17. Classifique a singularidade 0 da função abaixo

$$f(z) = \frac{1 - z^2 - \cos z}{z^2}.$$

- (a) singularidade essencial;
- (b) singularidade removível;
- (c) polo simples (de ordem 1);
- (d) polo de ordem 2;
- (e) polo de ordem 3.

Questão 18. Calcule

$$\int_{S^1} \frac{1}{z^2 - 2} dz$$

onde S^1 é o círculo centrado em 0, de raio 1, e orientado positivamente.

- (a) $-4\pi i$;
- (b) $-2\pi i$;
- (c) 0;
- (d) $2\pi i$;
- (e) $4\pi i$.

Questão 19. Calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{(x^2 - 2x + 2)(x^2 + 2x + 2)} dx.$$

Sugestão: Denote por $f(z) = \frac{4}{(z^2 - 2z + 2)(z^2 + 2z + 2)}$; pode utilizar os seguintes limites:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 1-i} (z - 1 + i)f(z) &= -\frac{1-i}{4}, & \lim_{z \rightarrow 1+i} (z - 1 - i)f(z) &= -\frac{1+i}{4}, \\ \lim_{z \rightarrow -1-i} (z + 1 + i)f(z) &= \frac{1+i}{4}, & \lim_{z \rightarrow -1+i} (z + 1 - i)f(z) &= \frac{1-i}{4}. \end{aligned}$$

- (a) 4π ;
- (b) $\frac{\pi}{2}$;
- (c) $\frac{\pi}{4}$;
- (d) 2π ;
- (e) π .

Questão 20. Obtenha a série de Taylor de f centrada em $z_0 = 2$, onde

$$f(z) = \frac{1}{z^2}.$$

- (a) $\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \left(\frac{z-2}{2}\right)^n$;
- (b) $\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{4}\right)^n$;
- (c) $\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{2}\right)^n$;
- (d) $\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-2}{2}\right)^n$;
- (e) $\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n \left(\frac{z-2}{4}\right)^n$.

MAT 220 — Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof. Paolo Piccione

Prova SUB

05 de dezembro de 2019

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas C

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota