MAT 220 — Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof. Paolo Piccione

Prova 1

17 de outubro de 2019

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Instruções

- A duração da prova é de **duas horas**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\mathbf{\frac{1}{2}}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de* $\mathbf{\frac{1}{10}}$ *de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- O corpo dos número complexos é denotado por $\mathbb{C}$. A *unidade imaginária* é denotada por i. Dado um número complexo $z \in \mathbb{C}$, a *parte real* e a *parte imaginária* de z são denotadas respectivamente por $\Re(z)$ e $\Im(z)$. Assim, $z = \Re(z) + \mathrm{i}\,\Im(z)$.
- Para uma função holomorfa $f\colon \mathcal{A} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e $z \in \mathcal{A}$, as derivadas da f em z são denotadas $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z)$, etc.
- O ramo principal do logaritmo se denota Log, e o ramo principal do argumento se denota Arg. Com $\ln\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ denotaremos o logaritmo natural (real).
- O *conjugado* do número complexo z é denotado por $\overline{z}$.

NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!

$\boxed{\mathbf{F}}$

Questão 1. *Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{C}$, e assuma que a serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ seja convergente. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?*

(A) *Também a serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ é convergente.*

(B) *A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$ é convergente.*

(C) *A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-\mathrm{i})^n$ é convergente absolutamente no disco aberto de centro i e raio 1.*

(a) Nenhuma afirmação é verdadeira;
(b) Apenas a afirmação (B) é verdadeira;
(c) Apenas as afirmações (B) e (C) são verdadeiras;
(d) Apenas as afirmações (A) e (B) são verdadeiras;
(e) Todas as afirmações são verdadeiras.

Questão 2. *Calcule o raio de convergência R da série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^n n^2 z^n.$$

(a) $R = 2$;
(b) $R = \dfrac{1}{2n}$;
(c) $R = +\infty$;
(d) $R = \frac{1}{2}$;
(e) $R = 1$.

Questão 3. *Qual série de potências corresponde à função*

$$f(z) = \frac{5z}{(z-2)^2}$$

num disco aberto centrado em 0?

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5(n+1)}{2^n} z^n$;
(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-5n)}{2^n} z^{n+1}$;
(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{2^{n+1}} z^n$;
(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)(n+1)}{2^{n+1}} z^n$;
(e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{-5n}{2^{n+1}} z^n$.

Questão 4. *No plano complexo, o conjunto dos pontos z que satisfazem a equação $\overline{z}^2 = z^2$ forma:*

(a) Uma circunferência;
(b) Uma reta;
(c) Um único ponto;
(d) Duas retas concorrentes;
(e) Duas retas paralelas distintas.

Questão 5. *Considere o campo vetorial $\mathbf{F} = \big(y + e^{x^2}, xy(x-1)(y-1)\big)$ em $\mathbb{R}^2$. Calcule a integral de linha $I = \int_\gamma \mathbf{F}$, onde γ é o bordo do quadrado com vértices nos pontos $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ e $(1,0)$ orientado no sentido horário.*

(a) $I = 1 + \mathfrak{i}$;
(b) $I = 1$;
(c) $I = -2$;
(d) $I = -1$;
(e) $I = 0$.

Questão 6. *Calcule a derivada terceira $f'''(1-\mathfrak{i})$ da função*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^3 (z - 1 + \mathfrak{i})^{n+1}.$$

(a) -9;
(b) 54;
(c) 48;
(d) 9;
(e) -54.

Questão 7. *Determine o domínio da função complexa*

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2+1}.$$

(a) $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$;
(b) $\mathbb{C} \setminus \{1, \mathfrak{i}\}$;
(c) $\mathbb{C} \setminus \{-\mathfrak{i}, \mathfrak{i}\}$;
(d) $\mathbb{C} \setminus \{-1, -\mathfrak{i}\}$;
(e) $\mathbb{C}$.

Questão 8. *O conjugado harmônico de* $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$ *é:*

(a) $x^3 - 3xy^2 + c$, onde $c \in \mathbb{R}$;
(b) $-y^3 + 3x^2y + c$, onde $c \in \mathbb{R}$;
(c) $y^3 - 3xy^2 + c$, onde $c \in \mathbb{R}$;
(d) $x^3 + 6xy + c$, onde $c \in \mathbb{R}$;
(e) $x^3 - 3x^2y + c$, onde $c \in \mathbb{R}$.

Questão 9. *Se* $u(x,y) = e^{ax}\cos(by)$ *é harmônica, com* $a, b \in \mathbb{R}$*, determine a relação entre* a *e* b*.*

(a) $a = b = 0$;
(b) $a = \pm b$;
(c) $a = -b$;
(d) $a = b + 1$;
(e) $a = 1$, $b = -1$.

Questão 10. *Qual é a forma polar de* $(\mathrm{i} - \sqrt{3})^6$*?*

(a) $2^6 e^{\mathrm{i}\pi}$;
(b) 2^6;
(c) $2^6 e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$;
(d) $2^6 e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$;
(e) $2^6 e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

Questão 11. *Calcule o raio de convergência da série de potências*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 3^n \frac{n^2}{n+1} (z - \mathrm{i})^n.$$

(a) $R = 1$;
(b) $R = \frac{1}{3}$;
(c) $R = 0$;
(d) $R = 3$;
(e) $R = +\infty$.

Questão 12. *Quais são as soluções complexas da equação abaixo?*

$$e^{2z} = \mathrm{i}$$

(a) $(2\mathrm{i})\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, com k inteiro;
(b) $(2\mathrm{i})\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, com k inteiro;
(c) $\frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, com k inteiro;
(d) $\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right)$, com k inteiro;
(e) $\frac{\mathrm{i}}{2}\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, com k inteiro.

Questão 13. *Qual é o conjunto de pontos onde $f(z) = |z|^2$ é diferenciável como função complexa?*

(a) $\mathbb{R}$;
(b) $\mathbb{C}$;
(c) $\{1\}$;
(d) $\{0\}$;
(e) $\emptyset$.

Questão 14. *Seja $f(x + \mathrm{i}y) = (x + ay) + i(bx + cy)$ uma função holomorfa, onde a, b e c são constantes complexas. Determine a,b e c.*

(a) $a = b = c = 1$;
(b) $a = 1$ e $b = -c$;
(c) $a = b = c = 0$;
(d) $a = -c$ e $b = 1$;
(e) $a = -b$ e $c = 1$.

Questão 15. *Seja $f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ uma função holomorfa. Se $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(1, 1) = 2$, determine $v(4, 1)$.*

(a) 0;
(b) 5;
(c) 8;
(d) -4;
(e) 15.

Questão 16. *Calcule o valor principal de $\mathrm{i}^{2\mathrm{i}}$.*

(a) 1;
(b) $e^{\frac{\pi}{2}}$;
(c) $e^{-\frac{\pi}{2}}$;
(d) e^{π};
(e) $e^{-\pi}$.

Questão 17. *Seja*

$$z = e^{\frac{2}{5}\pi\mathrm{i}}$$

Calcule

$$1 + z + z^2 + z^3 + 5z^4 + 4z^5 + 4z^6 + 4z^7 + 4z^8 + 5z^9$$

(a) $5e^{\frac{3}{5}\pi\mathrm{i}}$;
(b) $5e^{\frac{8}{5}\pi\mathrm{i}}$;
(c) 1;
(d) 5;
(e) 0.

Questão 18. *Calcule a série de potências centrada em* $z_0 = 0$ *da função:*

$$f(z) = (1+z)\,\mathrm{Log}(1+z).$$

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} z^{n+1}$;

(b) $z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n^2} z^{n+1}$;

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} z^{n+1}$;

(d) $z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} z^{n+1}$;

(e) $z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} z^{n+1}$.

Questão 19. *Qual é o conjunto dos valores possíveis para* 1^{i}*?*

(a) $\{-2\pi k\mathrm{i} : k \in \mathbb{Z}\}$;
(b) $\{1\}$;
(c) $\{e^{2\pi k} : k \in \mathbb{Z}\}$;
(d) $\{e^{-2\pi k\mathrm{i}} : k \in \mathbb{Z}\}$;
(e) $\{e^{\pi k} : k \in \mathbb{Z}\}$.

Questão 20. *Qual é o conjunto dos valores possíveis para* $\log(\log \mathrm{i})$*?*

(a) $\left\{\ln\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\ell\right) : k, \ell \in \mathbb{Z},\ k \geq 0\right\} \bigcup$
$\left\{\ln\left|(2k+1)\pi\right| + \mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\ell\right) : k, \ell \in \mathbb{Z},\ k < 0\right\}$;

(b) $\left\{\ln\left|\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right| + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\ell\right) : k, \ell \in \mathbb{Z}\right\}$;

(c) $\left\{\ln\left|\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right| + \mathrm{i}\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$;

(d) $\left\{\ln\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\ell\right) : k, \ell \in \mathbb{Z},\ k \geq 0\right\} \bigcup$
$\left\{\ln\left|\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right| + \mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\ell\right) : k, \ell \in \mathbb{Z},\ k < 0\right\}$;

(e) $\left\{\ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + \mathrm{i}k\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Rascunho

Rascunho

MAT 220 — Cálculo Diferencial e Integral IV
Prof. Paolo Piccione
Prova 1
17 de outubro de 2019

Nome: ____

Número USP: ____

Assinatura: ____

Folha de Respostas $\boxed{\textbf{F}}$

1	a	b	c	d	e
2	a	b	c	d	e
3	a	b	c	d	e
4	a	b	c	d	e
5	a	b	c	d	e
6	a	b	c	d	e
7	a	b	c	d	e
8	a	b	c	d	e
9	a	b	c	d	e
10	a	b	c	d	e
11	a	b	c	d	e
12	a	b	c	d	e
13	a	b	c	d	e
14	a	b	c	d	e
15	a	b	c	d	e
16	a	b	c	d	e
17	a	b	c	d	e
18	a	b	c	d	e
19	a	b	c	d	e
20	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	**Erradas**	**Nota**