

MAT 220 — Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof. Paolo Piccione

Prova 1

17 de outubro de 2019

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Instruções

- A duração da prova é de **duas horas**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale $\frac{1}{2}$ ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de $\frac{1}{10}$ de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

Terminologia e Notações Utilizadas na Prova

- O corpo dos número complexos é denotado por \mathbb{C} . A *unidade imaginária* é denotada por i . Dado um número complexo $z \in \mathbb{C}$, a *parte real* e a *parte imaginária* de z são denotadas respectivamente por $\Re(z)$ e $\Im(z)$. Assim, $z = \Re(z) + i\Im(z)$.
- Para uma função holomorfa $f: \mathcal{A} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e $z \in \mathcal{A}$, as derivadas da f em z são denotadas $f'(z)$, $f''(z)$, $f'''(z)$, etc.
- O ramo principal do logaritmo se denota Log , e o ramo principal do argumento se denota Arg . Com $\ln: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ denotaremos o logaritmo natural (real).
- O *conjugado* do número complexo z é denotado por \bar{z} .

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

C

Questão 1. Calcule a derivada terceira $f'''(1 - i)$ da função

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^3 (z - 1 + i)^{n+1}.$$

- (a) -54 ;
- (b) 9 ;
- (c) -9 ;
- (d) 48 ;
- (e) 54 .

Questão 2. Considere o campo vetorial $\mathbf{F} = (y + e^{x^2}, xy(x - 1)(y - 1))$ em \mathbb{R}^2 . Calcule a integral de linha $I = \int_{\gamma} \mathbf{F}$, onde γ é o bordo do quadrado com vértices nos pontos $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$ e $(1, 0)$ orientado no sentido horário.

- (a) $I = -1$;
- (b) $I = 1 + i$;
- (c) $I = -2$;
- (d) $I = 1$;
- (e) $I = 0$.

Questão 3. Seja

$$z = e^{\frac{2}{5}\pi i}$$

Calcule

$$1 + z + z^2 + z^3 + 5z^4 + 4z^5 + 4z^6 + 4z^7 + 4z^8 + 5z^9$$

- (a) 0 ;
- (b) 1 ;
- (c) $5e^{\frac{8}{5}\pi i}$;
- (d) 5 ;
- (e) $5e^{\frac{3}{5}\pi i}$.

Questão 4. Qual é o conjunto dos valores possíveis para 1^i ?

- (a) $\{1\}$;
- (b) $\{e^{\pi k} : k \in \mathbb{Z}\}$;
- (c) $\{e^{-2\pi ki} : k \in \mathbb{Z}\}$;
- (d) $\{e^{2\pi k} : k \in \mathbb{Z}\}$;
- (e) $\{-2\pi ki : k \in \mathbb{Z}\}$.

Questão 5. Calcule o raio de convergência R da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n n^2 z^n.$$

- (a) $R = 2$;
- (b) $R = 1$;
- (c) $R = \frac{1}{2n}$;
- (d) $R = +\infty$;
- (e) $R = \frac{1}{2}$.

Questão 6. Quais são as soluções complexas da equação abaixo?

$$e^{2z} = i$$

- (a) $\frac{i}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \pi k \right)$, com k inteiro;
- (b) $i \left(\frac{\pi}{4} + \pi k \right)$, com k inteiro;
- (c) $(2i) \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k \right)$, com k inteiro;
- (d) $(2i) \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)$, com k inteiro;
- (e) $\frac{i}{2} \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)$, com k inteiro.

Questão 7. Qual é o conjunto dos valores possíveis para $\log(\log i)$?

- (a) $\left\{ \ln \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) + i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \ell \right) : k, \ell \in \mathbb{Z}, k \geq 0 \right\} \cup$
 $\left\{ \ln |(2k+1)\pi| + i \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi \ell \right) : k, \ell \in \mathbb{Z}, k < 0 \right\}$;
- (b) $\left\{ \ln \left| \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right| + i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \ell \right) : k, \ell \in \mathbb{Z} \right\}$;
- (c) $\left\{ \ln \left(\frac{\pi}{2} \right) + ik \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$;
- (d) $\left\{ \ln \left| \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right| + i \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}$;
- (e) $\left\{ \ln \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) + i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi \ell \right) : k, \ell \in \mathbb{Z}, k \geq 0 \right\} \cup$
 $\left\{ \ln \left| \frac{\pi}{2} + 2\pi k \right| + i \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi \ell \right) : k, \ell \in \mathbb{Z}, k < 0 \right\}$.

Questão 8. Seja $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ uma função holomorfa.

Se $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(1, 1) = 2$, determine $v(4, 1)$.

- (a) 15;
- (b) 8;
- (c) -4;
- (d) 5;
- (e) 0.

Questão 9. Calcule o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 3^n \frac{n^2}{n+1} (z - i)^n.$$

- (a) $R = \frac{1}{3}$;
- (b) $R = +\infty$;
- (c) $R = 0$;
- (d) $R = 3$;
- (e) $R = 1$.

Questão 10. No plano complexo, o conjunto dos pontos z que satisfazem a equação $\bar{z}^2 = z^2$ forma:

- (a) Uma reta;
- (b) Duas retas paralelas distintas;
- (c) Um único ponto;
- (d) Duas retas concorrentes;
- (e) Uma circunferência.

Questão 11. Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em \mathbb{C} , e assumamos que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ seja convergente. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) Também a série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ é convergente.

(B) A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$ é convergente.

(C) A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - i)^n$ é convergente absolutamente no disco aberto de centro i e raio 1.

- (a) Apenas as afirmações (B) e (C) são verdadeiras;
- (b) Apenas a afirmação (B) é verdadeira;
- (c) Todas as afirmações são verdadeiras;
- (d) Apenas as afirmações (A) e (B) são verdadeiras;
- (e) Nenhuma afirmação é verdadeira.

Questão 12. Qual é o conjunto de pontos onde $f(z) = |z|^2$ é diferenciável como função complexa?

- (a) \mathbb{R} ;
- (b) \mathbb{C} ;
- (c) $\{1\}$;
- (d) $\{0\}$;
- (e) \emptyset .

Questão 13. O conjugado harmônico de $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ é:

- (a) $x^3 + 6xy + c$, onde $c \in \mathbb{R}$;
- (b) $-y^3 + 3x^2y + c$, onde $c \in \mathbb{R}$;
- (c) $x^3 - 3x^2y + c$, onde $c \in \mathbb{R}$;
- (d) $x^3 - 3xy^2 + c$, onde $c \in \mathbb{R}$;
- (e) $y^3 - 3xy^2 + c$, onde $c \in \mathbb{R}$.

Questão 14. Se $u(x, y) = e^{ax} \cos(by)$ é harmônica, com $a, b \in \mathbb{R}$, determine a relação entre a e b .

- (a) $a = \pm b$;
- (b) $a = b + 1$;
- (c) $a = 1, b = -1$;
- (d) $a = b = 0$;
- (e) $a = -b$.

Questão 15. Determine o domínio da função complexa

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 + 1}.$$

- (a) \mathbb{C} ;
- (b) $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$;
- (c) $\mathbb{C} \setminus \{-1, -i\}$;
- (d) $\mathbb{C} \setminus \{1, i\}$;
- (e) $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$.

Questão 16. Calcule o valor principal de i^{2i} .

- (a) e^π ;
- (b) $e^{-\frac{\pi}{2}}$;
- (c) 1;
- (d) $e^{-\pi}$;
- (e) $e^{\frac{\pi}{2}}$.

Questão 17. Qual é a forma polar de $(i - \sqrt{3})^6$?

- (a) $2^6 e^{i\frac{\pi}{3}}$;
- (b) 2^6 ;
- (c) $2^6 e^{i\pi}$;
- (d) $2^6 e^{i\frac{\pi}{6}}$;
- (e) $2^6 e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Questão 18. Calcule a série de potências centrada em $z_0 = 0$ da função:

$$f(z) = (1+z) \operatorname{Log}(1+z).$$

- (a) $z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} z^{n+1}$;
- (b) $z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} z^{n+1}$;
- (c) $z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} z^{n+1}$;
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} z^{n+1}$;
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} z^{n+1}$.

Questão 19. Qual série de potências corresponde à função

$$f(z) = \frac{5z}{(z-2)^2}$$

num disco aberto centrado em 0?

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{2^{n+1}} z^n$;
- (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5n)}{2^n} z^{n+1}$;
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)(n+1)}{2^{n+1}} z^n$;
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5(n+1)}{2^n} z^n$;
- (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-5n}{2^{n+1}} z^n$.

Questão 20. *Seja $f(x + iy) = (x + ay) + i(bx + cy)$ uma função holomorfa, onde a , b e c são constantes complexas. Determine a, b e c .*

- (a) $a = b = c = 1$;
- (b) $a = 1$ e $b = -c$;
- (c) $a = -c$ e $b = 1$;
- (d) $a = b = c = 0$;
- (e) $a = -b$ e $c = 1$.

Rascunho

Rascunho

MAT 220 — Cálculo Diferencial e Integral IV
Prof. Paolo Piccione

Prova 1

17 de outubro de 2019

Nome: _____

Número USP: _____

Assinatura: _____

Folha de Respostas C

| | | | | | |
|-----------|---|---|---|---|---|
| 1 | a | b | c | d | e |
| 2 | a | b | c | d | e |
| 3 | a | b | c | d | e |
| 4 | a | b | c | d | e |
| 5 | a | b | c | d | e |
| 6 | a | b | c | d | e |
| 7 | a | b | c | d | e |
| 8 | a | b | c | d | e |
| 9 | a | b | c | d | e |
| 10 | a | b | c | d | e |
| 11 | a | b | c | d | e |
| 12 | a | b | c | d | e |
| 13 | a | b | c | d | e |
| 14 | a | b | c | d | e |
| 15 | a | b | c | d | e |
| 16 | a | b | c | d | e |
| 17 | a | b | c | d | e |
| 18 | a | b | c | d | e |
| 19 | a | b | c | d | e |
| 20 | a | b | c | d | e |

Deixe em branco.

| Corretas | Erradas | Nota |
|----------|---------|------|
| | | |