

MAT 220 — Cálculo Diferencial e Integral IV

Prof. Paolo Piccione

Prova 1

17 de outubro de 2019

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

**Instruções**

- A duração da prova é de **duas horas**.
- Assinale as alternativas corretas na **folha de respostas** que está no final da prova. *É permitido deixar questões em branco.*
- Cada questão tem apenas **uma resposta correta**.
- O valor total da prova é de **10** pontos; cada questão correta vale  $\frac{1}{2}$  ponto (0.5) e *cada questão errada implica num desconto de  $\frac{1}{10}$  de ponto* (0.10).
- No final da prova, deve ser entregue apenas a folha de respostas (na última página).
- **Boa Prova!**

**Terminologia e Notações Utilizadas na Prova**

- O corpo dos número complexos é denotado por  $\mathbb{C}$ . A *unidade imaginária* é denotada por  $i$ . Dado um número complexo  $z \in \mathbb{C}$ , a *parte real* e a *parte imaginária* de  $z$  são denotadas respectivamente por  $\Re(z)$  e  $\Im(z)$ . Assim,  $z = \Re(z) + i\Im(z)$ .
- Para uma função holomorfa  $f: \mathcal{A} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $z \in \mathcal{A}$ , as derivadas da  $f$  em  $z$  são denotadas  $f'(z)$ ,  $f''(z)$ ,  $f'''(z)$ , etc.
- O ramo principal do logaritmo se denota  $\text{Log}$ , e o ramo principal do argumento se denota  $\text{Arg}$ . Com  $\ln: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  denotaremos o logaritmo natural (real).
- O *conjugado* do número complexo  $z$  é denotado por  $\bar{z}$ .

**NÃO ESQUEÇA DE POR SEU NOME  
NA FOLHA DE RESPOSTAS!!!**

**A**

**Questão 1.** Calcule o valor principal de  $i^{2i}$ .

- (a)  $e^{-\pi}$ ;
- (b)  $e^{-\frac{\pi}{2}}$ ;
- (c)  $e^{\frac{\pi}{2}}$ ;
- (d) 1;
- (e)  $e^{\pi}$ .

**Questão 2.** Qual é o conjunto dos valores possíveis para  $1^i$ ?

- (a)  $\{e^{-2\pi ki} : k \in \mathbb{Z}\}$ ;
- (b)  $\{e^{\pi k} : k \in \mathbb{Z}\}$ ;
- (c)  $\{1\}$ ;
- (d)  $\{-2\pi ki : k \in \mathbb{Z}\}$ ;
- (e)  $\{e^{2\pi k} : k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Questão 3.** Se  $u(x, y) = e^{ax} \cos(by)$  é harmônica, com  $a, b \in \mathbb{R}$ , determine a relação entre  $a$  e  $b$ .

- (a)  $a = 1, b = -1$ ;
- (b)  $a = -b$ ;
- (c)  $a = b + 1$ ;
- (d)  $a = b = 0$ ;
- (e)  $a = \pm b$ .

**Questão 4.** Qual série de potências corresponde à função

$$f(z) = \frac{5z}{(z-2)^2}$$

num disco aberto centrado em 0?

- (a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-5n)}{2^n} z^{n+1}$ ;
- (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-5)(n+1)}{2^{n+1}} z^n$ ;
- (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5(n+1)}{2^n} z^n$ ;
- (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n}{2^{n+1}} z^n$ ;
- (e)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{-5n}{2^{n+1}} z^n$ .

**Questão 5.** Calcule a derivada terceira  $f'''(1 - i)$  da função

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n^3 (z - 1 + i)^{n+1}.$$

- (a) 48;
- (b) 9;
- (c) 54;
- (d) -9;
- (e) -54.

**Questão 6.** No plano complexo, o conjunto dos pontos  $z$  que satisfazem a equação  $\bar{z}^2 = z^2$  forma:

- (a) Duas retas concorrentes;
- (b) Um único ponto;
- (c) Uma reta;
- (d) Uma circunferência;
- (e) Duas retas paralelas distintas.

**Questão 7.** Qual é o conjunto dos valores possíveis para  $\log(\log i)$ ?

- (a)  $\left\{ \ln\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\ell\right) : k, \ell \in \mathbb{Z}, k \geq 0 \right\} \cup$   
 $\left\{ \ln|(2k+1)\pi| + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\ell\right) : k, \ell \in \mathbb{Z}, k < 0 \right\};$
- (b)  $\left\{ \ln\left(\frac{\pi}{2}\right) + ik\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\};$
- (c)  $\left\{ \ln\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\ell\right) : k, \ell \in \mathbb{Z}, k \geq 0 \right\} \cup$   
 $\left\{ \ln\left|\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right| + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi\ell\right) : k, \ell \in \mathbb{Z}, k < 0 \right\};$
- (d)  $\left\{ \ln\left|\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right| + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi\ell\right) : k, \ell \in \mathbb{Z} \right\};$
- (e)  $\left\{ \ln\left|\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right| + i\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z} \right\}.$

**Questão 8.** Calcule a série de potências centrada em  $z_0 = 0$  da função:

$$f(z) = (1 + z) \operatorname{Log}(1 + z).$$

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} z^{n+1};$
- (b)  $z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} z^{n+1};$
- (c)  $z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} z^{n+1};$
- (d)  $z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} z^{n+1};$
- (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} z^{n+1}.$

**Questão 9.** Calcule o raio de convergência  $R$  da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n n^2 z^n.$$

- (a)  $R = \frac{1}{2}$ ;
- (b)  $R = 2$ ;
- (c)  $R = +\infty$ ;
- (d)  $R = \frac{1}{2n}$ ;
- (e)  $R = 1$ .

**Questão 10.** Seja  $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  uma função holomorfa. Se  $u(x, y) = x^2 - y^2$  e  $v(1, 1) = 2$ , determine  $v(4, 1)$ .

- (a) 15;
- (b) 8;
- (c) -4;
- (d) 0;
- (e) 5.

**Questão 11.** Considere o campo vetorial  $\mathbf{F} = (y + e^{x^2}, xy(x-1)(y-1))$  em  $\mathbb{R}^2$ . Calcule a integral de linha  $I = \int_{\gamma} \mathbf{F}$ , onde  $\gamma$  é o bordo do quadrado com vértices nos pontos  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 1)$  e  $(1, 0)$  orientado no sentido horário.

- (a)  $I = 0$ ;
- (b)  $I = 1 + i$ ;
- (c)  $I = -2$ ;
- (d)  $I = -1$ ;
- (e)  $I = 1$ .

**Questão 12.** Seja  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  uma sequência em  $\mathbb{C}$ , e assuma que a série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  seja convergente. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- (A) Também a série  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$  é convergente.
- (B) A série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$  é convergente.
- (C) A série  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - i)^n$  é convergente absolutamente no disco aberto de centro  $i$  e raio 1.

- (a) Apenas as afirmações (B) e (C) são verdadeiras;  
 (b) Apenas as afirmações (A) e (B) são verdadeiras;  
 (c) Apenas a afirmação (B) é verdadeira;  
 (d) Todas as afirmações são verdadeiras;  
 (e) Nenhuma afirmação é verdadeira.

**Questão 13.** Determine o domínio da função complexa

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 + 1}.$$

- (a)  $\mathbb{C} \setminus \{-1, 1\}$ ;  
 (b)  $\mathbb{C} \setminus \{-1, -i\}$ ;  
 (c)  $\mathbb{C}$ ;  
 (d)  $\mathbb{C} \setminus \{1, i\}$ ;  
 (e)  $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$ .

**Questão 14.** Quais são as soluções complexas da equação abaixo?

$$e^{2z} = i$$

- (a)  $(2i) \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ , com  $k$  inteiro;  
 (b)  $(2i) \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ , com  $k$  inteiro;  
 (c)  $\frac{i}{2} \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ , com  $k$  inteiro;  
 (d)  $\frac{i}{2} \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ , com  $k$  inteiro;  
 (e)  $i \left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right)$ , com  $k$  inteiro.

**Questão 15.** O conjugado harmônico de  $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$  é:

- (a)  $x^3 + 6xy + c$ , onde  $c \in \mathbb{R}$ ;  
 (b)  $-y^3 + 3x^2y + c$ , onde  $c \in \mathbb{R}$ ;  
 (c)  $x^3 - 3xy^2 + c$ , onde  $c \in \mathbb{R}$ ;  
 (d)  $y^3 - 3xy^2 + c$ , onde  $c \in \mathbb{R}$ ;  
 (e)  $x^3 - 3x^2y + c$ , onde  $c \in \mathbb{R}$ .

**Questão 16.** Qual é o conjunto de pontos onde  $f(z) = |z|^2$  é diferenciável como função complexa?

- (a)  $\mathbb{R}$ ;
- (b)  $\emptyset$ ;
- (c)  $\{1\}$ ;
- (d)  $\{0\}$ ;
- (e)  $\mathbb{C}$ .

**Questão 17.** Qual é a forma polar de  $(i - \sqrt{3})^6$ ?

- (a)  $2^6$ ;
- (b)  $2^6 e^{i\frac{\pi}{3}}$ ;
- (c)  $2^6 e^{i\frac{\pi}{6}}$ ;
- (d)  $2^6 e^{i\frac{\pi}{2}}$ ;
- (e)  $2^6 e^{i\pi}$ .

**Questão 18.** Calcule o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} 3^n \frac{n^2}{n+1} (z-i)^n.$$

- (a)  $R = 0$ ;
- (b)  $R = 1$ ;
- (c)  $R = \frac{1}{3}$ ;
- (d)  $R = +\infty$ ;
- (e)  $R = 3$ .

**Questão 19.** Seja  $f(x+iy) = (x+ay) + i(bx+cy)$  uma função holomorfa, onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são constantes complexas. Determine  $a$ ,  $b$  e  $c$ .

- (a)  $a = b = c = 0$ ;
- (b)  $a = 1$  e  $b = -c$ ;
- (c)  $a = -b$  e  $c = 1$ ;
- (d)  $a = b = c = 1$ ;
- (e)  $a = -c$  e  $b = 1$ .

**Questão 20.** *Seja*

$$z = e^{\frac{2}{5}\pi i}$$

*Calcule*

$$1 + z + z^2 + z^3 + 5z^4 + 4z^5 + 4z^6 + 4z^7 + 4z^8 + 5z^9$$

- (a) 1;
- (b) 0;
- (c)  $5e^{\frac{3}{5}\pi i}$ ;
- (d)  $5e^{\frac{8}{5}\pi i}$ ;
- (e) 5.

**Rascunho**



**Rascunho**

MAT 220 — Cálculo Diferencial e Integral IV  
Prof. Paolo Piccione

Prova 1

17 de outubro de 2019

Nome: \_\_\_\_\_

Número USP: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

Folha de Respostas **A**

<b>1</b>	a	b	c	d	e
<b>2</b>	a	b	c	d	e
<b>3</b>	a	b	c	d	e
<b>4</b>	a	b	c	d	e
<b>5</b>	a	b	c	d	e
<b>6</b>	a	b	c	d	e
<b>7</b>	a	b	c	d	e
<b>8</b>	a	b	c	d	e
<b>9</b>	a	b	c	d	e
<b>10</b>	a	b	c	d	e
<b>11</b>	a	b	c	d	e
<b>12</b>	a	b	c	d	e
<b>13</b>	a	b	c	d	e
<b>14</b>	a	b	c	d	e
<b>15</b>	a	b	c	d	e
<b>16</b>	a	b	c	d	e
<b>17</b>	a	b	c	d	e
<b>18</b>	a	b	c	d	e
<b>19</b>	a	b	c	d	e
<b>20</b>	a	b	c	d	e

Deixe em branco.

Corretas	Erradas	Nota