MAT0220 – CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV

UMA NOTA SOBRE A FÓRMULA DE GREEN NO PLANO

PROF. PAOLO PICCIONE

Queremos provar a fórmula de Green:

$$\int_{\partial R} \mathbf{F} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y, \tag{1}$$

onde $\mathbf{F}(x, y) = \big(F_1(x, y), F_2(x, y)\big)$ é um campo vetorial de classe C^1 definido num aberto U que contem R, e $R \subset \mathbb{R}^2$ é a região do plano definida por:

$$R = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\big\},$$

$[a, b]$ é um intervalo em $\mathbb{R}$, e $g_1, g_2 \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1 em $[a, b]$, com $g_1(x) \le g_2(x)$ para todo x. Do lado direito da (1) entende-se que ∂R, que é um *caminho de Jordan* (i.e., simples e fechado) C^1-por partes, é orientado no sentido anti-horário. Dada γ uma curva parametrizada em $\mathbb{R}^2$, denotaremos com γ^- a curva obtida reparameterizando γ com o sentido oposto. Dados caminhos γ_1 e γ_2 com ponto final de γ_1 igual ao ponto inicial de γ_2, denotaremos com $\gamma_1 \diamond \gamma_2$ a *concatenação* de γ_1 e γ_2.

O caminho ∂R pode ser expressado como concatenação dos caminhos C^1:

$$\partial R = \gamma_1 \diamond \gamma_2 \diamond \gamma_3^- \diamond \gamma_4^-,$$

onde as parametrizações das γ_i, $i = 1, \ldots, 4$ são dadas por:

- $\gamma_1(t) = \big(t, g_1(t)\big), \quad t \in [a, b];$
- $\gamma_2(t) = \big(b, t\big), \quad t \in \big[g_1(b), g_2(b)\big];$
- $\gamma_3(t) = \big(t, g_2(t)\big), \quad t \in [a, b];$
- $\gamma_4(t) = \big(a, t\big), \quad t \in \big[g_1(a), g_2(a)\big].$

O lado esquerdo de (1) é calculado como segue:

$$\int_{\partial R} \mathbf{F} = \int_{\gamma_1} \mathbf{F} + \int_{\gamma_2} \mathbf{F} - \int_{\gamma_3} \mathbf{F} - \int_{\gamma_4} \mathbf{F},$$

e mais especificamente:

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} = \int_a^b \big[F_1\big(t, g_1(t)\big) + F_2\big(t, g_1(t)\big)\, g_1'(t)\big] \, \mathrm{d}t; \tag{2}$$

Data: 28 de agosto de 2019.

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} = \int_{g_1(b)}^{g_2(b)} F_2\big(b, t\big)\,\mathrm{d}t; \tag{3}$$

$$\int_{\gamma_3^-} \mathbf{F} = -\int_a^b \big[F_1\big(t, g_2(t)\big) + F_2\big(t, g_2(t)\big)\,g_2'(t)\big]\;\mathrm{d}t; \tag{4}$$

$$\int_{\gamma_4^-} \mathbf{F} = -\int_{g_1(a)}^{g_2(a)} F_2\big(a, t\big)\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Calculemos agora o lado direito de (1). Uma aplicação fácil do Teorema de Fubini fornece:

$$\begin{aligned} -\iint_R \frac{\partial F_1}{\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= -\int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}\,\mathrm{d}y\right]\,\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \big[F_1\big(x, g_1(x)\big) - F_1\big(x, g_2(x)\big)\big]\;\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{6}$$

Para o cálculo da segunda integral dupla em (1) precisamos lembrar a fórmula de derivação numa integral dependente de um parâmetro. Dada uma função $G(x,y)$ de classe C^1 na variável x, contínua na variável y, e dadas $g_1(x), g_2(x)$ funções de classe C^1, então a função:

$$H(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} G(x,y)\,\mathrm{d}y$$

é de classe C^1, e sua derivada é dada por:

$$H'(x) = G\big(x, g_2(x)\big)\,g_2'(x) - G\big(x, g_1(x)\big)\,g_1'(x) + \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial G}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Aplicando esta fórmula à função $G(x,y) = F_2(x,y)$, obtemos:

$$\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y = H'(x) - F_2\big(x, g_2(x)\big)\,g_2'(x) + F_2\big(x, g_1(x)\big)\,g_1'(x),$$

onde $H(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} F_2(x,y)\,\mathrm{d}y$. Daí:

$$
\begin{aligned}
(7)\qquad \iint_R \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \big[H'(x) - F_2\big(x, g_2(x)\big)\, g_2'(x) + F_2\big(x, g_1(x)\big)\, g_1'(x)\big]\,\mathrm{d}x \\
&= H(b) - H(a) - \int_a^b F_2\big(x, g_2(x)\big)\, g_2'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b F_2\big(x, g_1(x)\big)\, g_1'(x) \\
&= \int_{g_1(b)}^{g_2(b)} F_2(b,y)\,\mathrm{d}y - \int_{g_1(a)}^{g_2(a)} F_2(a,y)\,\mathrm{d}y \\
&\quad - \int_a^b F_2\big(x, g_2(x)\big)\, g_2'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b F_2\big(x, g_1(x)\big)\, g_1'(x).
\end{aligned}
$$

Fica agora claro que a soma de (2),(3),(4) e (5) é igual à soma de (6) e (7), provando a fórmula (1).

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
E-mail address: `piccione.p@gmail.com.br`