AULA 2

Busca em grafos

Problema do caminho
Dados nós s e t de um grafo,
encontrar um caminho de s a t.

Variante: encontrar todos os nós
que estão ao alcance de s.

Condições de inexistência
Se T separa s de t e $(N-T,T)=\emptyset$ então
não existe caminho de s a t.

Função y de N em $\{0,1\}$ é um **potencial**
se $y(j)-y(i)\leq 0$ para todo arco ij

($y(i) \cong$ temperatura de i)

Propriedade: Se existe um caminho* de s a t
então $y(t)-y(s)\leq 0$.

Prova: Se $P=(s,i,j,t)$ então

$$\begin{aligned} y(t)-y(s) &= y(t)-y(j)+y(j)-y(i)+y(i)-y(s) \\ &\leq 0+0+0 \\ &= 0\,. \end{aligned}$$

Conclusão: se y é potencial e $y(t)-y(s)>0$
então não existe caminho de s a t.

$*$ vale para qquer passeio

Algoritmo genérico

Recebe nós s e t e devolve caminho de s a t ou potencial y tal que $y(t) - y(s) > 0$.

GENÉRICO (N, A, s, t)
para cada i em N faça
    $y(i) \leftarrow 1$
    $\pi(i) \leftarrow$ NIL
$y(s) \leftarrow 0$
enquanto $y(j) > y(i)$ para algum ij em A
    faça $y(j) \leftarrow y(i)$
        $\pi(j) \leftarrow i$
se $y(t) = 1$
    então devolva y
    senão devolva o caminho de s a t
        no grafo (N, A_π)

Algoritmo está correto?

No começo de cada iteração (linha 4),

(i0) para cada arco predecssr pq,
$y(p) = y(q) = 0$

(i1) $\pi(s) = \text{NIL}$ e $y(s) = 0$

(i2) para cada $v \neq s$, $\pi(v) \neq \text{NIL} \Leftrightarrow y(v) = 0$

(i3) para cada p, se $\pi(p) \neq \text{NIL}$ então existe caminho de s a v no grf de predecssrs

Prova de (i0): Nenhum arco no grafo de predecssrs tem ponta inicial ou ponta final igual a j. ∎

Prova de (i1): Basta observar que $j \neq s$. ∎

Prova de (i3): Suponha $\pi(v) \neq \text{NIL}$. Existe caminho P de s a v no grafo de predecssrs. Temos $y(k) = 0$ para cada nó k de P. Portanto, j não está em P. No fim da iteração, P continua sendo um caminho de s a v no grafo de predecssrs.

Quando $v = i$, $P \cdot (i, j)$ é um caminho no grafo de predecssrs. ∎

Início da última iteração:

- y é um potencial
- se $y(t) = 0$ então $\pi(t) \neq$ NIL, logo existe caminho de s a t
- se $y(t) = 1$ então $y(t) - y(s) > 0$

Conclusão: o algoritmo faz o que promete.

Fato: *Para quaisquer nós s e t, existe um caminho de s a t ou existe um potencial y tal que $y(t) - y(s) > 0$.*

Consumo de tempo:
Número de iterações é $< n$,
pois $\{v \in N : y(v) = 1\}$ diminui a cada iteração.

linha	consumo
0–3	$O(n)$
4	$nO(m)$
5–6	$nO(1)$
7–9	$O(n)$
total	$O(nm)$

$n := |N|$ e $m := |A|$

Implementação do algoritmo genérico

BUSCA (N, A, s, t)
para cada i em N faça
    $A'(i) \leftarrow A(i)$
    $y(i) \leftarrow 1$
    $\pi(i) \leftarrow$ NIL
$y(s) \leftarrow 0$
$L \leftarrow \{s\}$
enquanto $L \neq \emptyset$ faça
    escolha um nó i em L
    se $A'(i) \neq \emptyset$
        então retire um arco ij de $A'(i)$
            se $y(j) = 1$
                então $y(j) \leftarrow 0$
                    $\pi(j) \leftarrow i$
                    $L \leftarrow L \cup \{j\}$
        senão $L \leftarrow L - \{i\}$
se $y(t) = 1$
    então devolva y
    senão devolva o caminho de s a t
            em (N, A_π)

O algoritmo está correto?

No início de cada iteração (linha 07),

(i0)–(i3) ;

(i4) para cada arco pq, se $y(p) = 0$ e $y(q) = 1$ então $p \in L$;

(i5) $y(p) = 0$ para cada p em L;

(i6) para cada nó p e cada arco pq em $A(p) - A'(p)$, se $y(p) = 0$ então $y(q) = 0$.

Prove essas invariantes!

Início da última iteração:

- Por (i4), $y(q) - y(p) \leq 0$ para todo pq; portanto, y é um potencial.
- Se $y(t) = 1$ então $y(t) - y(s) = 1 > 0$, por (i1).
- Senão, por (i3), há caminho de s a t.

Consumo de tempo:

linha	consumo
01–06	$O(n)$
07–15	$(n+m)O(1) = O(n+m)$
16–18	$O(n)$
total	$O(n+m)$

Explicação de 07–15:

- $\leq n$ iterações passam pela linha 15
- $\leq \sum_{k \in N} |A(k)| = m$ iterações passam por 10-14
- consumo de cada iteração é $O(1)$

Se L é fila: busca **em largura** (= *breadth-first search* = *BFS*).

Se L é pilha: busca **em profundidade** (= *depth-first search* = *DFS*).

TAREFA (AULA 2)

Exercício 2.a
Deduza das invariantes (i0) a (i3) que o grafo de predecessores gerado pelo algoritmo GENÉRICO e pelo algoritmo BUSCA não tem ciclos.

Exercício 2.A
Escreva um algoritmo de busca em largura. Procure simplificar o algoritmo.

Exercício 2.B
Escreva um algoritmo de busca em profundidade. Procure simplificar o algoritmo.

Exercício 2.C
Programe os algoritmos de busca usando a estrutura de dados do SGB (*Stanford GraphBase*). Faça testes com grafos gerados pelo SGB. Inclua no seu módulo uma função que verifique se y é de fato um potencial e se o caminho é de fato um caminho de s a t; é claro que esse função só será usada durante os testes do programa. [Uma das regras do eXtreme Programming: escreva as rotinas de teste *antes* do programa principal!]

Exercício 2.D
Analise o seguinte algoritmo de busca (inspirado na figura 7.6, p.215, de AMO):

AVANÇA-RETROCEDE (N, A, s, t)
para cada i em N faça
    $y(i) \leftarrow 1$
    $\pi(i) \leftarrow$ NIL
$i \leftarrow s$
enquanto $i \neq t$ e $y(i) = 1$ faça
    se $y(j) = y(i)$ para algum ij em $A(i)$
        então $\pi(j) \leftarrow i$
                $i \leftarrow j$ $\triangleright$ avança
        senão $y(i) \leftarrow 0$
                se $i \neq s$
                    então $i \leftarrow \pi(i)$ $\triangleright$ retrocede
se $i = t$
    então devolva o caminho de s a t em (N, A_π)
    senão devolva y

Exercício 2.E (Versão "capacitada" da busca)
Suponha dado um número inteiro u_{ij} associado a cada arco ij. Um arco ij é **positivo** se $u_{ij} > 0$. Caminho é **positivo** se todos os seus arcos são positivos.
Probema: Dados nós s e t, encontrar um caminho positivo de s a t. Escreva um algoritmo que produza um caminho positivo de s a t ou uma prova de que um tal caminho não existe. (Sugestão: A variante apropriada de potencial para esse problema é a seguinte: uma função y de N em $\mathbb{Z}$ tal que $y(j) - y(i) \leq 0$ para todo arco positivo ij.)

Exercício 2.F (Busca "inversa")
Escreva e analise um algoritmo para o seguinte problema: Dado um nó t de um grafo (N, A), encontrar todos os nós que são origem de um passeio que termina em t. (Sugestão: para cada nó i, suponha dado o conjunto $\widetilde{A}(j)$ de todos os arcos que entram em i. Qual a função-potencial apropriada para essa variante do problema?)

Exercício 2.G (Modelagem)
Suponha que (N, A) é um grafo e sejam u e u' duas funções de A em $\mathbb{Z}_{\geq}$. Um **pseudo-caminho** é uma seqüência $(i_0, i_1, \ldots, i_q)$ de nós tal que, para cada k, tem-se $(i_{k-1}, i_k) \in A$ ou $(i_k, i_{k-1}) \in A$. Os arcos do primeiro tipo são **diretos** e os do segundo são **inversos**.
Problema: dados nós s e t, encontrar um pseudo-caminho de s a t tal que $u_{ij} > 0$ para todo arco direto ij e $u'_{ji} > 0$ para todo arco inverso ji.
Qual a definição apropriada de função-potencial nesse caso (em termos de u e u')? Formule as condições de existência de solução do problema. Mostre como o problema pode ser transformado em um problema de busca usual (ou seja, um que envolva caminho e não pseudo-caminho). Para resolver esta parte, você pode supor que o grafo é anti-simétrico, ou seja, que se ij é arco então ji não é arco.