AULA 1

Programação Linear

Encontrar x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 que minimizem

$$51\,x_1 + 52\,x_2 + 53\,x_3 + 54\,x_4 + 55\,x_5$$

enquanto satisfazem as restrições

$$\begin{aligned}
11\,x_1 + 12\,x_2 + 13\,x_3 + 14\,x_4 + 15\,x_5 &= 16 \\
21\,x_1 + 22\,x_2 + 23\,x_3 + 24\,x_4 + 25\,x_5 &= 26 \\
31\,x_1 + 32\,x_2 + 33\,x_3 + 34\,x_4 + 35\,x_5 &= 36 \\
41\,x_1 + 42\,x_2 + 43\,x_3 + 44\,x_4 + 45\,x_5 &= 46
\end{aligned}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0$$

Primal: Encontrar x que

$$\begin{gathered}
\text{minimize } \; c\,x \\
\text{sob as restrições} \\
Mx = b \quad \text{e} \quad x \geq 0
\end{gathered}$$

Solução viável, solução ótima,
problema viável, problema ilimitado.

Dual: Encontrar y que

$$\text{maximize} \quad y\,b$$
$$\text{sob as restrições}$$
$$yM \leq c$$

Teorema fraco: Para qualquer x viável e qualquer y viável, $c\,x \;\geq\; y\,b$.

Prova: $cx \;\geq\; (yM)x \;=\; y(Mx) \;=\; yb$.

Corolário: Se $cx = yb$ então x e y são otimas.

Teorema forte: *Se primal e dual são viáveis então existem soluções viáveis x e y tais que $cx = yb$.*

MATRIZ DE REDE

$$M = \begin{array}{rrrrr} -1 & 0 & +1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & +1 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & -1 & +1 & -1 \end{array}$$

M pode ser representada por um grafo (N, A): arcos vão de "-1" para "$+1$".

Restrições $Mx = b$: para cada nó v,

$$\sum_{u\,:\,uv \in A} x_{uv} \;-\; \sum_{w\,:\,vw \in A} x_{vw} \;=\; b_v$$

Função-objetivo cx:

$$\sum_{uv \in A} c_{uv}\, x_{uv}$$

Problema do fluxo de custo mínimo: minimizar cx sob as restrições $Mx = b$ e $x \geq 0$

TAREFA (AULA 1)

Exercício 1.A
O enunciado do teorema forte supõe tacitamente que que os problemas primal e dual são viáveis. Complete o enunciado de modo a cuidar dos problemas inviáveis e dos ilimitados.