MAC5770
Exercícios preliminares: parte 2

IME–USP, 28/3/2005

Estes exercícios tratam de recursão e indução. Se você pretende cursar MAC5770 (Introdução à Teoria dos Grafos) — veja `http://www.ime.usp.br/~pf/mac5770-2005` — você deveria ser capaz de resolver esses exercícios em menos de uma hora.

7 Recursão

Exercício 7.1 Escreva uma função *recursiva* para resolver o seguinte problema: encontrar o valor de um elemento máximo de um vetor $v[1\,..\,n]$ de números inteiros. (Você pode escrever a função em pseudocódigo, em Pascal ou em C, como preferir.)

Exercício 7.2 Escreva uma função *recursiva* que calcule a soma dos elementos de um vetor $v[1\,..\,n]$ de números inteiros. (Você pode escrever a função em pseudocódigo, em Pascal ou em C, como preferir.)

8 Indução

Uma prova por indução é essencialmente o mesmo que um algoritmo recursivo.

Exercício 8.1 Prove, por indução em k, que $2^0 + 2^1 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$.

Exercício 8.2 [1] Seja a um número positivo qualquer. Afirmo que para todo inteiro positivo n tem-se

$$a^{n-1} = 1 \, .$$

Eis a prova (por indução): Se $n = 1$ então $a^{n-1} = a^0 = 1$ e portanto a afirmação está correta nesse caso. Agora suponha, por indução, que a afirmação está correta para $1, 2, 3, \ldots, n$. Temos então

$$a^{(n+1)-1} = a^n = a^{n-1} \cdot \frac{a^{n-1}}{a^{n-2}} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1 \, .$$

Portanto, a afimação está correta para todo n, como queríamos provar. Onde está o erro da prova?

Exercício 8.3 [2] Afirmo que, para todo número inteiro positivo n, tem-se

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} \, . \tag{1}$$

Eis a prova (por indução em n): Para $n = 1$, ambos os lados de (**??**) valem $1/2$ e portanto a afirmação está correta nesse caso. Agora suponha que a afirmação está correta para n. Teremos então

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} &= \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n \cdot (n+1)} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \, , \end{aligned}$$

e portanto a afirmação vale para $n + 1$. Onde está o erro da prova? Alguma coisa deve estar errada, pois quando $n = 6$ o lado esquerdo de (**??**) vale $5/6$ enquanto o lado direito vale $4/3$.

Exercício 8.4 [3] Imagine uma dessas barras de chocolate retangulares que consiste em quadradinhos dispostos em linhas e colunas. Uma tal barra pode ser quebrada ao longo de uma linha ou de uma coluna produzindo assim duas barras menores. Qual o número mínimo de quebras necessário para reduzir uma barra com m linhas e n colunas aos seus quadradinhos constituintes?

[1] D. E. Knuth, *Fundamental Algorithms*, série *The Art of Computer Programming*.
[2] D. E. Knuth, *Fundamental Algorithms*, série *The Art of Computer Programming*.
[3] Manuel Blum.

Exercício 8.5 [4] Imagine uma jarra contendo um certo número de bolas brancas e bolas pretas. Agora repita o seguinte procedimento enquanto ele fizer sentido: Retire duas bolas da jarra; se as duas tiverem a mesma cor, coloque uma bola branca na jarra; se as duas tiverem cores diferentes, coloque uma bola preta na jarra. Qual a cor da última bola a sobrar na jarra?

[4] Manuel Blum.