MAC5770
Exercícios preliminares: parte 1

IME–USP, 7/3/2005

Estes exercícios tratam de rudimentos da teoria dos conjuntos e de algumas outras trivialidades. Se você pretende cursar MAC5770 (Introdução à Teoria dos Grafos) — veja http://www.ime.usp.br/~pf/mac5770-2005 — você deveria ser capaz de resolver esses exercícios em meia hora.

1 Conjuntos e seqüências

A seqüência cujos elementos são a, b e c — nesta ordem — é denotada por $(\,)$ $(\,)$

$$(a, b, c) \quad \text{ou por} \quad (a, b, c) \quad \text{ou por} \quad abc\,.$$

O conjunto[1] (usa-se também o termo *coleção*) cujos elementos são a, b e c é denotado por $\{\,\}$

$$\{a, b, c\}\,.$$

A união de conjuntos X e Y é denotada por $X \cup Y$. A interseção de X e Y é denotada por $X \cap Y$. A diferença entre X e Y é denotada por $X \cup Y$ $X \cap Y$ $X - Y$ $X \smallsetminus Y$

$$X - Y \quad \text{ou por} \quad X \smallsetminus Y\,.$$

Um conjunto X é *disjunto* de um conjunto Y se $X \cap Y = \emptyset$. disjunto

[1] Loterias como a sena sorteiam um *conjunto* de números: qualquer pessoa que tenha um bilhete com o conjunto de números sorteados leva o prêmio. Já o jogo do bicho sorteia uma *seqüência* de números: qualquer pessoa que tenha um bilhete com a seqüência sorteada leva o prêmio.

Exercício 1.1 Quais das afirmações abaixo são verdadeiras? Por que?

$$\{1,2,3\} = \{3,1,2\} \qquad\qquad (1,2,3) = (3,1,2)$$
$$\{1,2,2,3\} = \{1,2,3\} \qquad\qquad (1,2,2,3) = (1,2,3)$$
$$\{1,2,3\} = (1,2,3)$$

Exercício 1.2 Sejam A e B os conjuntos $\{1,2,3\}$ e $\{3,1,5,4\}$ respectivamente. Quanto valem $A \cup B$, $B \cup A$ e $A \cap B$? Quanto valem $A \cup \emptyset$ e $A \cap \emptyset$?

Exercício 1.3 Qual a diferença entre $\emptyset$, $\{\,\}$ e $\{\emptyset\}$?

Exercício 1.4 Se A e B são conjuntos de números e b é um número, o que significa cada uma das expressões abaixo?

$$A \cup b \qquad A \cup B \qquad A \cup \{B\} \qquad A \cup \{b\}$$

Exercício 1.5 O conjunto $\{1,2,3\}$ é disjunto do conjunto $\{2,5,4\}$?

Exercício 1.6 Sejam A, B e C os conjuntos $\{1,2,3\}$, $\{2,4,6\}$ e $\{1,2,3,4\}$ respectivamente. Quanto valem $A \smallsetminus B$, $B \smallsetminus A$ e $A \smallsetminus C$?

Exercício 1.7 Se a é um elemento de um conjunto A, o que significam as expressões abaixo?

$$A \smallsetminus a \qquad\qquad A \smallsetminus \{a\}$$

Exercício 1.8 Qual o complemento de $\{1,2,3,5\}$ em $\{1,\ldots,10\}$? complemento

2 Cardinalidade e comprimento

O *comprimento* de uma seqüência é o número de termos da seqüência. A *cardinalidade* de um conjunto é o número de elementos do conjunto. A cardinalidade de um conjunto X é denotada por $|X|$. $|X|$

Exercício 2.1 Quais das afirmações abaixo são verdadeiras? Por que?

$$|\{1, 2, 3, 2\}| = 4 \qquad (1, 2, 2, 3) \text{ tem comprimento } 3$$

Exercício 2.2 Digamos que um conjunto A tem 10 elementos e um conjunto B tem 20 elementos. Quantos elementos tem $A \cup B$?

Exercício 2.3 Sejam A e B os conjuntos $\{1, 2, 3\}$ e $\{1, 2, 4, 5\}$ respectivamente. Quais das afirmações abaixo são verdadeiras?

$$|A| \leq |B| \qquad |A| \geq |B| \qquad |A| < |B| \qquad |A| > |B|$$

3 Subconjuntos

Uma *parte* de um conjunto X é o mesmo que um subconjunto de X. Um subconjunto S de um conjunto X é *próprio* se $S \neq X$. As expressões

parte
própria
$X \subseteq Y$
$X \subset Y$

$$X \subseteq Y \qquad \text{e} \qquad X \subset Y$$

são abreviaturas de "X é subconjunto de Y" e "X é subconjunto próprio de Y" respectivamente.

Exercício 3.1 Quais das afirmações abaixo são verdadeiras? Por que?

- $\emptyset$ é subconjunto de $\{2, 4, 6\}$
- $\{1, 2, 3\}$ é subconjunto de $\{5, 1, 2, 4, 3\}$
- $\{1, 2, 3\}$ é subconjunto próprio $\{5, 1, 2, 4, 3\}$
- $\{1, 2, 3\}$ é parte de $\{5, 1, 3, 4, 6\}$

- $\{1, 2, 3\}$ é parte própria de $\{2, 1, 3\}$

Exercício 3.2 Sejam A e B os conjuntos $\{1, 2, 3\}$ e $\{3, 1, 2, 5, 4\}$ respectivamente. Quais das afirmações abaixo são verdadeiras?

$$A \subseteq B \qquad A \supseteq B \qquad A \subset B \qquad A \supset B$$

Exercício 3.3 Quais das afirmações abaixo são verdadeiras? Por que?

- $\{\{1, 2\}, \{1\}, \{2, 4, 6\}\} \subseteq \{1, 2, 4, 6\}$
- $\{2, 4, 6\} \subseteq \{\{1, 2\}, \{1\}, \{2, 4, 6\}\}$
- $\{2, 4, 6\} \in \{\{1, 2\}, \{1\}, \{2, 4, 6\}\}$

Exercício 3.4 Escreva a sentença "$k \in X$" em português, sem usar o símbolo "$\in$".

Exercício 3.5 Faça uma lista de todos os subconjuntos de $\{1, 2, 3\}$. Quantos são os subconjuntos de um conjunto com n elementos?

Exercício 3.6 Faça uma lista de todas as permutações dos elementos do conjunto $\{3, 1, 4\}$. Quantas são as permutações dos elementos de $\{1, 2, \ldots, n\}$? permutação

4 Pares ordenados e pares não-ordenados

Um *par ordenado* é essencialmente o mesmo que uma seqüência de comprimento 2. Um *par não-ordenado* é um conjunto com exatamente 2 elementos. par ordenado não-ordenado

Exercício 4.1 Faça uma lista de todos os pares ordenados de elementos de $\{1, 2, 3\}$. Faça uma lista de todos os pares não-ordenados de elementos de $\{1, 2, 3\}$.

Exercício 4.2 Seja A um conjunto com n elementos. Quantos pares ordenados de elementos de A existem? Quantos pares não-ordenados?

5 Partições

Uma *partição* de um conjunto X é qualquer coleção de conjuntos dois a dois disjuntos cuja união é X. Em outras palavras, uma partição de X é qualquer coleção $\{X_1, \ldots, X_k\}$ de subconjuntos de X tal que partição

$$X_1 \cup \cdots \cup X_k = X \quad \text{e} \quad X_i \cap X_j = \emptyset \text{ sempre que } i \neq j.$$

(Suporemos quase sempre que $X_i \neq \emptyset$ para todo i.)

Uma *bipartição* de um conjunto X é qualquer partição de X em duas partes, ou seja, um par $\{A, B\}$ de subconjuntos de X tal que $A \cup B = X$ e $A \cap B = \emptyset$.[2] bipartição

Exercício 5.1 É verdade que $\{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}, 5\}$ é uma partição de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Exercício 5.2 Faça uma lista de todas as bipartições de $\{2, 3, 5\}$. Faça uma lista de todas as partições de $\{2, 3, 5\}$.

6 Lógica

Exercício 6.1 Suponha que as letras A e B representam afirmações (por exemplo, "n é par" e "existe k tal que $n = 3k+1$" respectivamente). Qual a diferença entre as expressões abaixo?

[2] Infelizmente, há muita bobagem rolando por aí a respeito da palavra "partição". Suponha que $\{A, B\}$ é uma partição de X. Então A é uma das *partes* da partição e B é outra *parte*. Não faz sentido dizer "A é *uma das partições* de X". Também está errada a expressão "A e B são *as partições* de X". Essas expressões têm o mesmo sabor que a par de frases "O casal Antônio e Benedita tem uma vida difícil. O casal Antônio está desempregado, e o casal Benedita trabalha como faxineira."

- A se B
- A implica B
- se A então B
- A somente se B
- A se e somente se B
- B implica A

Exercício 6.2 Se A é uma afirmação, então $\neg A$ é a negação dessa afirmação. Qual diferença entre as expressões abaixo?

- se A então $\neg B$
- se B então $\neg A$