MAP2220 - Fundamentos de Análise Numérica
Prof. Pedro da Silva Peixoto
Prof. Antoine Laurain

LISTA 3 - 2º semestre de 2018
Entregar no dia da P3

1. Consideramos a função

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \in [0,1] \\ \frac{1}{2}(x-1)^3 + a(x-1)^2 + b(x-1) + c & \text{se } x \in [1,3] \end{cases}$$

Determine os valores de a, b, c de modo que a função f seja um spline cúbico. O spline obtido é um spline natural? Justifique.

2. Seja $S(x)$ o spline cúbico natural que passa por os pontos $(-1,1), (0,0)$ e $(1,1)$ da função $f(x) = x^2$. Nos intervalos $[-1,0]$ e $[0,1]$, esse spline pode ser escrito como:

$$\begin{cases} S_1(x) = a_1 + b_1(x+1) + c_1(x+1)^2 + d_1(x+1)^3 & \text{se } x \in [-1,0], \\ S_2(x) = a_2 + b_2 x + c_2 x^2 + d_2 x^3 & \text{se } x \in [0,1]. \end{cases}$$

   (a) Determine o valor de a_2

   (b) Um aluno calculou todos os parametros (a_1, b_1, c_1, d_1) e (a_2, b_2, c_2, d_2) e achou o spline:

$$\begin{cases} S_1(x) = -x & \text{se } x \in [-1,0], \\ S_2(x) = x & \text{se } x \in [0,1]. \end{cases}$$

   Essa solução é correta ou não? Justifique.

   (c) Um aluno calculou todos os parametros (a_1, b_1, c_1, d_1) e (a_2, b_2, c_2, d_2) e achou o spline:

$$\begin{cases} S_1(x) = 1 - \frac{3}{2}(x+1) + \frac{1}{2}(x+1)^3 & \text{se } x \in [-1,0], \\ S_2(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 & \text{se } x \in [0,1]. \end{cases}$$

   Essa solução é correta ou não? Justifique.

3. (a) Interpolamos a função $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 7x + 1$ no intervalo $[0,1]$ nos quatro pontos equidistantes $x_0 = 0$, $x_1 = 1/3$, $x_2 = 2/3$ e $x_3 = 1$ por um spline cúbico natural $\gamma(x)$. Devemos esperar um erro de interpolação se aproximamos $f(1/2)$ por $\gamma(1/2)$? Justifique sem calcular $\gamma(x)$.

   (b) Consideramos a função

$$f(x) = \begin{cases} a - 2x + x^3 & \text{se } x \in [0,1] \\ 4 - bx + cx^2 + dx^3 & \text{se } x \in [1,2] \end{cases}$$

   Determine as constantes a, b, c, d de modo que $f(x)$ seja o spline cúbico natural passando pelos pontos $(0,2), (1,1)$ e $(2,4)$.

4. Considere os splines lineares definidos nos pontos $(0 = x_0 < \ldots < x_6 = 6)$, onde $x_i = i$, $i = 1, \ldots, 5$. Sendo $s_1(x_i) = \cos \frac{\pi x_i}{2}$, $i = 0, \ldots, 6$ (s_1 spline linear) e s_2 spline linear tal que $s_2(x_i) = s_1(x_i)$, $i = 0, 1, 2, 3, 6$, $s_2(x_4) = s_1(x_4) + 1$, $s_2(x_5) = s_1(x_5) + 1$. Esboce o gráfico de $(s_1 - s_2)(x)$.

5. Uma fórmula de integração aberta não faz uso dos valores da função nos extremos do intervalo. Por exemplo, para calcular $\int_a^b f(x)dx$ dividimos $[a, b]$ em pontos uniformemente espaçados $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = b$ ($x_{i+1} = x_i + h, h = (b - a)/3$) e aproximamos a integral de f pela integral do polinômio linear que interpola f nos pontos interiores x_1 e x_2.

   a) Qual fórmula de integração se obtém nesse caso?

   b) Use-a para calcular $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$. Qual a vantagem em relação ao método de Simpson?

6. Mostre que $\int_{-1}^1 p(x)dx = p(\sqrt{3}/3) + p(-\sqrt{3}/3)$, para todo polinômio p de grau menor ou igual a 3. Use esse esse valor para calcular $\int_0^3 (x^3 - 2x)$.

7. Considere a função $F(x)$ dada por

$$F(x) = \int_0^x \sin(\cos(y))dy.$$

   Utilizando a fórmula de Simpson com uma repetição, calcule

$$S = \int_0^1 F(x)dx.$$

   Para obter cada um dos valores de F necessários ao cálculo de S, utilize a fórmula dos trapézios com duas repetições. Estime os erros cometidos no cálculo desses valores.

8. Usando a Regra Trapezoidal composta encontre a aproximação para $\int_0^\pi \sin(x)dx$ com $n = 1, 2, 4, 8, 16$. Então aplique a extrapolação de Romberg nos resultados.

9. Usando a Regra Trapezoidal composta encontre a aproximação para $\int_0^\pi \sin(x)dx$ com $n = 1, 2, 4, 8, 16$. Então faça a dedução da expansão assintótica do erro dos trapézios para construir Romberg e aplique nos resultados.

10. Considere a seguinte integral

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \int_0^1 x^3 y^3 dxdy.$$

   a) Calcule a integral exatamente usando o método de integração Gaussiana com polinômios de Legendre usando apenas 2 pontos para cada integral. Justifique porquê o método é exato neste caso.

   b) Calcule a integral usando 2 trapézios para cada integral e calcule o erro com base no item anterior.

11. Considere a seguinte fórmula de integração numérica

$$I = \sum_{n=0}^{2} w_i f(x_i),$$

para aproximar a integral

$$\mathcal{I} = \int_{-2}^{2} f(x)dx.$$

Sabe-se que $x_0 = -1$, $x_2 = 1$, $w_1 = -4/3$, mas os demais parâmetros são desconhecidos.

a) Determine os valores de x_1, w_0 e w_2 de forma a garantir uma fórmula que seja exata para qualquer polinômio de grau 2.

b) Teste sua fórmula para integrar $f(x) = 1/(x+3)$ e calcule o erro de integração.

c) Integre a função acima usando o método de Simpson e compare o erro com o erro obtido da sua fórmula.

12. (Extra!) Determine α, β, x_1, x_2 tal que $\int_0^\infty p(x)e^{-x}dx = \alpha p(x_1) + \beta p(x_2)$, $\forall p \in \mathcal{P}_3$

13. (Extra!) Dado o produto interno

$$< u, v >= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} u(x)v(x)dx.$$

Determine os três primeiros elementos de uma família de polinômios ortogonais em relação a este produto interno. Use esta família de polinômios para construir um método de integração Gaussiana relativa a este produto interno.

14. (Extra!) A distribuição de probabilidade t de Student com ν graus de liberdade é dada por

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\,\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\frac{\nu+1}{2})}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Supondo que $\nu = 3$ graus de liberdade, queremos calcular a probabilidade $P(1 \leq t \leq \infty) = \int_1^\infty f(t)dt$. Para um determinado passo $h > 0$, defina $S(h)$ como sendo a aproximação dessa integral com Regra de Simpson com passo h. Calcule $S(0.5)$, $S(0.25)$ e $S(0.125)$. Com esses três valores de $S(h)$ tabelados, aproxime $\lim_{h\to 0^+} S(h)$ com o polinômio interpolador de grau 2 correspondente. Não faça arredondamentos intermediários. Apresente os resultados com pelo menos 8 algarismos significativos. Dados: $\Gamma(2) = 1$ e $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.