MAP2220 - Fundamentos de Análise Numérica
Prof. Pedro da Silva Peixoto
Prof. Antoine Laurain

LISTA 3 - 2º semestre de 2018
Entregar no dia da P3

Exercício 1: Calcule $s \in S_{2,1}$ $(a = x_0 = 0 < x_1 = 1 < x_2 = b = 2)$ que melhor aproxima $f(x) = x^2$ segundo a norma derivada do produto interno $\langle f, g\rangle = \sum_{i=0}^{4} f(y_i)g(y_i)$, $y_i = i/2$, $i = 0, 1, \ldots, 4$.

Exercício 2: Considere o espaço de splines lineares $S_{2,5}$ $(0 = x_0 < \ldots < x_6 = 6)$ com nós $x_i = i$, $i = 1, \ldots, 5$. Sendo $s_1(x_i) = \cos \frac{\pi x_i}{2}$, $i = 0, \ldots, 6$ $(s_1 \in S_{2,5})$ e $s_2 \in S_{2,5}$ tal que $s_2(x_i) = s_1(x_i)$, $i = 0, \ldots, 6$, $s_2(x_4) = s_1(x_4) + 1$, $s_2(x_5) = s_1(x_5) + 1$. Determine $(s_1 - s_2)(x)$ e seus coeficientes na base unilateral de $S_{2,5}$.

Exercício 3: Uma fórmula de integração aberta não faz uso dos valores da função nos extremos do intervalo. Por exemplo, para calcular $\int_a^b f(x)dx$ dividimos $[a, b]$ em pontos uniformemente espaçados $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 = b$ $(x_{i+1} = x_i + h, h = (b-a)/3)$ e aproximamos a integral de f pela integral do polinômio linear que interpola f nos pontos interiores x_1 e x_2.

a) Qual fórmula de integração se obtém nesse caso?

b) Use-a para calcular $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$. Qual a vantagem em relação ao método de Simpson?

Exercício 4: Mostre que $\int_{-1}^{1} p(x)dx = p(\sqrt{3}/3) + p(-\sqrt{3}/3)$, para todo polinômio p de grau menor ou igual a 3. Use esse esse valor para calcular $\int_0^3 (x^3 - 2x)$.

Exercício 5: Considere a função $F(x)$ dada por

$$F(x) = \int_0^x \sin(\cos(y))dy.$$

Utilizando a fórmula de Simpson com uma repetição, calcule

$$S = \int_0^1 F(x)dx.$$

Para obter cada um dos valores de F necessários ao cálculo de S, utilize a fórmula dos trapézios com duas repetições. Estime os erros cometidos no cálculo desses valores.

Exercício 6: Usando a Regra Trapezoidal composta encontre a aproximação para $\int_0^\pi \sin(x)dx$ com $n = 1, 2, 4, 8, 16$. Então aplique a extrapolação de Romberg nos resultados.

Exercício 3: Usando a Regra Trapezoidal composta encontre a aproximação para $\int_0^\pi \sin(x)dx$ com $n = 1, 2, 4, 8, 16$. Então faça a dedução da expansão assintótica do erro dos trapézios para construir Romberg e aplique nos resultados.

Exercício 7: Considere a seguinte integral

$$\mathcal{I} = \int_0^1 \int_0^1 x^3 y^3 dx dy.$$

a) Calcule a integral exatamente usando o método de integração Gaussiana com polinômios de Legendre usando apenas 2 pontos para cada integral. Justifique porquê o método é exato neste caso.

b) Calcule a integral usando 2 trapézios para cada integral e calcule o erro com base no item anterior.

Exercício 8: Considere a seguinte fórmula de integração numérica

$$I = \sum_{n=0}^{2} w_i f(x_i),$$

para aproximar a integral

$$\mathcal{I} = \int_{-2}^{2} f(x)dx.$$

Sabe-se que $x_0 = -1$, $x_2 = 1$, $w_1 = -4/3$, mas os demais parâmetros são desconhecidos.

a) Determine os valores de x_1, w_0 e w_2 de forma a garantir uma fórmula que seja exata para qualquer polinômio de grau 2.

b) Teste sua fórmula para integrar $f(x) = 1/(x + 3)$ e calcule o erro de integração.

c) Integre a função acima usando o método de Simpson e compare o erro com o erro obtido da sua fórmula.

Exercício Extra 1: Determine α, β, x_1, x_2 tal que $\int_0^\infty p(x)e^{-x}dx = \alpha p(x_1) + \beta p(x_2)$, $\forall p \in \mathcal{P}_3$

Exercício Extra 2: Dado o produto interno

$$< u, v >= \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} u(x)v(x)dx.$$

Determine os três primeiros elementos de uma família de polinômios ortogonais em relação a este produto interno. Use esta família de polinômios para construir um método de integração Gaussiana relativa a este produto interno.

Exercício Extra 3: A distribuição de probabilidade t de Student com ν graus de liberdade é dada por

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-(\frac{\nu+1}{2})}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Supondo que $\nu = 3$ graus de liberdade, queremos calcular a probabilidade $P(1 \leq t \leq \infty) = \int_1^\infty f(t)dt$. Para um determinado passo $h > 0$, defina $S(h)$ como sendo a aproximação dessa integral com Regra de Simpson com passo h. Calcule $S(0.5)$, $S(0.25)$ e $S(0.125)$. Com esses três valores de $S(h)$ tabelados, aproxime $\lim_{h\to 0^+} S(h)$ com o polinômio interpolador de grau 2 correspondente. Não faça arredondamentos intermediários. Apresente os resultados com pelo menos 8 algarismos significativos. Dados: $\Gamma(2) = 1$ e $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.