MAP2220 - Fundamentos de Análise Numérica

LISTA 2 - 2º semestre de 2017

Escolher 5 exercícios para entregar

Exercício 1: Seja a função $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ definida no intervalo $I = [-1, 2]$. Utilize os polinômios de Legendre $L_k(x), k = 0, 1, 2, \ldots$, ortogonais relativamente ao produto interno

$$\langle h_n(x), h_m(x) \rangle = \int_{-1}^{1} h_n(x).h_m(x)dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \frac{2}{2m+1}, & m = n \end{cases}$$

para obter uma aproximação da f da forma $g_2(x) = \sum_{k=0}^{2} b_k L_k(x)$.

Exercício 2: Construa os três primeiros polinômios mônicos $q_k(x),\ k = 0, 1, 2$ ortogonais relativamente ao produto interno

$$\langle p_n(x), p_m(x) \rangle = \int_{-1}^{2} p_n(x).p_m(x)dx$$

e obtenha uma aproximação para a função f do Exercício 1 ($f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$) da forma $g_3(x) = \sum_{k=0}^{2} c_k q_k(x)$.

Exercício 3: Dada

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2} \\ x - \frac{3\pi}{2}, & \frac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

Aproxime f por uma função da forma $g(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{2} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$.

Exercício 4: Sejam $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ e $x_3 = 3$.

a) Determine todos os polinômios de Lagrange $L_i(x)$ correspondentes a estes pontos e mostre que eles são dois a dois ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle \Phi, \Psi \rangle = \sum_{k=0}^{3} \Phi(x_k)\Phi(x_k).$$

b) Encontre o polinômio de grau ≤ 3 que melhor aproxima a função $f(x) = \sin(\pi x/2)$ segundo o produto interno dado. Qual o erro quadrático cometido?

Exercício 5: Seja $f \in C[a,b]$ e $q \in \mathbb{P}_n$ que minimiza $\|f - p\|_2 = (\int_a^b (f-p)^2(x)dx)^{1/2}$ para todo $p \in \mathbb{P}_n$. Mostre que existem pontos: $a < x_0 < x_1 < \ldots < x_n < b$ tal que $f(x_i) = q(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Exercício 6: Dados 4 pontos uniformemente espaçados x_1, x_2, x_3 e x_4 (onde $x_{i+1} = x_i + h$, $i = 1, 2, 3$), determine coeficientes a_1, a_2, a_3 e a_4 tal que para todo polinômio de grau menor ou igual a 3 tenhamos

$$p\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) = \sum_{i=1}^{4} a_i p(x_i).$$

Exercício 7: Considere a tabela

x	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
y	0.0	0.1	0.3	0.58	0.92	1.3	1.7	2.1	2.48	2.82	3.1

a) Construa a tabela das diferenças divididas e o polinômio interpolador na forma de Newton, obtido a partir desta tabela;

b) Construa a tabela de diferenças simples e o polinômio interpolador $p^*(x)$ obtido a partir desta tabela;

c) Usando somente o subconjunto de pontos $\{(0.4, 0.92), (0.5, 1.3), (0.6, 1.7), (0.7, 2.1)\}$, repita os itens (a) e (b);

d) Usando o mesmo subconjunto do item (c), construa o polinômio interpolador na forma de Lagrange $L(x)$;

e) Comparando os polinômio obtidos nos itens (a) e (d), podemos afirmar que a unicidade do polinômio interpolador foi confirmada? Justifique;

f) Escreva a fórmula do erro na interpolação polinomial e estime o erro máximo para interpolar os pontos $x = 0.05$ e $x = 0.65$.