Lista 4 - MAE5702

1ª semestre de 2022

Professor: Alexandre G. Patriota.
Monitores: Thainá Soares Silva.

Nesta lista, o conjunto dos números naturais é definido como $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$.

1. Uma urna contém n bolas (distintas) numeradas 1 a n, em que $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$. Duas bolas são retiradas sucessivamente da urna ao caso e sem reposição. Note que a ordem em que as bolas são retiradas gera eventos distintos. Considere o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, em que

$$\Omega = \{(i,j) : i, j \in \{1, \ldots, n\} \text{ e } i \neq j\},\ \mathcal{A} = 2^{\Omega} \text{ e } \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{n(n-1)}, \forall \omega \in \Omega.$$

Seja $\underset{\sim}{Z} = (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ uma função tal que X e Y representam respectivamente o número da primeira bola retirada e o número da segunda bola retirada. Ou seja, para $\omega = (i,j) \in \Omega$, $X(\omega) = i$ e $Y(\omega) = j$.

   (a) Mostre que $\underset{\sim}{Z}$ é um vetor aleatório em $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

   (b) Apresente $\mathbb{P}(\underset{\sim}{Z} = (x, y))$, com $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   (c) Apresente a função de distribuição acumulada conjunta.

   (d) Calcule $\mathbb{P}(X < Y), \mathbb{P}(X > Y), \mathbb{P}(X + 1 < Y)$ e $\mathbb{P}(X + 1 > Y)$.

2. Considere o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, em que $\Omega = (0,1)^2$, $\mathcal{A} = \mathbb{B}((0,1)^2)$ e para todo $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) = \int_A \int f(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2$, com $f(\omega_1, \omega_2) = c\omega_1\omega_2\ \mathbb{I}_{\Omega}((\omega_1, \omega_1))$, $c > 0$ fixo. Seja $\underset{\sim}{Z} = (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ uma função tal que, para cada $\omega = (\omega_1, \omega_1) \in \Omega$, temos $X(\omega) = \omega_1 + \omega_2$ e $Y(\omega) = \omega_1 - \omega_2$.

   (a) Mostre que $\underset{\sim}{Z}$ é um vetor aleatório em $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

   (b) Encontre o valor de c.

3. Considere as coordenadas dentro de um círculo de raio 1 no $\mathbb{R}^2$. Seja o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, em que $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $\mathcal{A} = \mathbb{B}(\mathbb{R}^2)$ e para todo $A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x, y) dz$, com $z = (x, y)$ e $f(x, y) = \frac{1}{\pi}\mathbb{I}_{\Omega}(x, y)$. Seja $\underset{\sim}{Z} = (X, Y) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ um vetor aleatório, tal que X e Y representam respectivamente a abcissa e a ordenada. Ou seja, para $\omega = (x, y) \in \Omega$, $X(\omega) = x$ e $Y(\omega) = y$.

   (a) Mostre que $\underset{\sim}{Z}$ é um vetor aleatório em $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

   (b) Apresente a função de distribuição acumulada de $\underset{\sim}{Z}$.

Dica:

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi}\mathbb{I}_{(-1,1)}(x)\mathbb{I}_{A_x}(y) = \frac{1}{\pi}\mathbb{I}_{A_y}(x)\mathbb{I}_{(-1,1)}(y),$$

em que $A_x = \left(-\sqrt{1-x^2}, +\sqrt{1-x^2}\right)$.

4. Suponha que a densidade conjunta do um par de variáveis aleatórias (X,Y) é constante no retângulo tal que $0 \leq x \leq 2$ e $0 \leq y \leq 1$, e nula fora deste retângulo.

   (a) Encontre o valor da constante e apresente a densidade conjunta de (X,Y).

   (b) Calcule $\mathbb{P}(X \geq 1, Y \geq 0.7)$.

5. Seja (X,Y) uma vetor de variáveis aleatórias cuja função densidade de probabilidade dada por

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{3}{80}(x^2 + xy)\mathbb{I}_{(0,2)}(x)\mathbb{I}_{(0,4)}(y).$$

   Calcule $\mathbb{P}(X \leq 1, Y \leq 1)$.

6. Seja (X,Y) um vetor aleatório com função de distribuição acumulada F. Considere $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, tais que $a < b$ e $c < d$, mostre que

$$\mathbb{P}(a < X \leq b, c < Y \leq d) = F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) + F(a,c).$$

7. Verifique se $F : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ é função de distribuição acumulada do vetor (X,Y). Caso seja, verifique se X e Y são independentes. Veja as condições para que uma função seja função de distribuição acumulada de um vetor aleatório no livro do Barry James páginas 56 a 59.

   (a) $F(x,y) = \begin{cases} 1 - e^{-x-y}, & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

   (b) $F(x,y) = \begin{cases} (1 - e^{-x})(1 - e^{-y}), & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

   (c) $F(x,y) = \begin{cases} (1 - e^{-\min\{x,y/3\}}), & \text{se } x > 0 \text{ e } y > 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

   (d) $F_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } y < 0 \text{ ou } x \geq y; \\ \dfrac{2x^2y^2 - x^4}{16}, & \text{se } 0 \leq x < y \text{ e } 0 \leq y < 2; \\ \dfrac{8x^2 - x^4}{16}, & \text{se } 0 \leq x < 2 \text{ e } y \geq 2; \\ 1, & \text{se } x \geq 2, y \geq 2 \text{ e } x < y. \end{cases}$

8. Considere o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Verifique se as variáveis aleatórias $X : \Omega \to \mathbb{R}$ e $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ são iguais quase certamente nos casos em que:

   (a) $X \sim U[a,b]$ e $Y(\omega) = X(\omega)\mathbb{I}_{X^{-1}(B)}(\omega), \forall \omega \in \Omega$, em que $B = [a,b] - \{a,b\}$.

   (b) X é uma variável aleatória contínua e $Y(\omega) = X(\omega)\mathbb{I}_B(\omega) + Z(\omega)\mathbb{I}_{B^c}(\omega), \forall \omega \in \Omega$, em que $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma variável aleatória e $\mathbb{P}(B) = 1, B \in \mathcal{A}$.