Lista 9 - Inferência Frequentista (MAE0301)

Professor: Alexandre Patriota
Monitor: Andrey Sarmento
$1^{\underline{o}}$ semestre de 2025

Data de entrega: 23/05/2025
Entregar as resoluções dos exercícios (c) e (e).

Considere a variável aleatória populacional $\boldsymbol{X} = (X_1\ X_2)^\top \sim \mathrm{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$, em que

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

são desconhecidos.

(a) Especifique o vetor de parâmetros θ e o espaço paramétrico Θ.

(b) Considere $Q = X_1 - X_2$.

- (i) Determine a função densidade de probabilidade de Q.
- (ii) Calcule $\mathbb{P}(D > 0)$ em função dos parâmetros.

(c) Considere

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{X},$$

- (i) Determine a função densidade de probabilidade de $\boldsymbol{Y}$.
- (ii) Apresente a esperança de $\boldsymbol{Y}$.
- (iii) Apresente a matriz de variâncias e covariâncias $\boldsymbol{Y}$.
- (iv) Calcule $\mathrm{Cor}(Y_1, Y_2)$.
- (v) Calcule a função geradora de momentos $M_{\boldsymbol{Y}}(t_1, t_2)$.

(d) Considere

$$W = \pi + \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

- (i) Determine a função densidade de probabilidade de W.
- (ii) Calcule a função geradora de momentos $M_W(t)$.

(e) Seja $\boldsymbol{X}_n^\star = (\boldsymbol{X}_1, \ldots, \boldsymbol{X}_n)$ uma amostra aleatória de $\boldsymbol{X} \sim \mathrm{N}_2(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Considere a amostra observada:

$$\boldsymbol{x}_n^\star = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 4 \\ 6 & 3 & 7 & 7 \end{pmatrix}^\top$$

- (i) Encontre as estimativas de máxima verossimilhança (MV) para os parâmetros.
- (ii) Apresente a estimativa de MV para $g(\theta) = \mathrm{Cor}_\theta(X_1, X_2)$.
- (iii) Apresente a estimativa de MV para $g(\theta) = \mathbb{P}_\theta(X_1 > X_2)$.

Resolução

(a) O vetor de parâmetros é dado por

$$\theta = \left(\boldsymbol{\mu}^\top \ \mathrm{vech}(\boldsymbol{\Sigma})^\top\right)^\top = (\mu_1 \ \mu_2 \ \sigma_{11} \ \sigma_{12} \ \sigma_{22})^\top .$$

A matriz de covariâncias $\boldsymbol{\Sigma}$ precisa ser positiva definida. No caso bidimensional, basta garantir que os elementos da diagonal sejam positivos ($\sigma_{11} > 0$ e $\sigma_{22} > 0$) e que o determinante de $\boldsymbol{\Sigma}$ seja maior do que zero, isto é,

$$\det(\boldsymbol{\Sigma}) = \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 > 0.$$

Isso resulta no seguinte espaço paramétrico:

$$\Theta = \left\{(\mu_1, \mu_2, \sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}) \in \mathbb{R}^5 : \sigma_{11} > 0, \sigma_{22} > 0, \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}^2 > 0\right\}.$$

(b) Seja $\boldsymbol{B} = (1 \ \ -1)$. Veja que

$$Q = X_1 - X_2 = (1 \ \ -1)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{BX}.$$

(i) Portanto, pelo resultado de transformações para normais generalizadas, a variável aleatória Q tem distribuição normal univariada (pois, $\dim(\boldsymbol{B}) = 1 \times 2$) com média e variância, respectivamente, dadas por:

$$\mathbb{E}[Q] = \boldsymbol{B\mu} = (1 \ \ -1)\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \mu_1 - \mu_2$$

e

$$\mathbb{V}ar[Q] = \boldsymbol{B\Sigma B}^\top = (1 \ \ -1)\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{12}.$$

Ou seja, $Q \sim \text{Normal}(\mu_1 - \mu_2, \sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{12})$, o que resulta na seguinte função densidade de probabilidade de Q:

$$f_Q(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{12})}} \exp\left(-\frac{(q - (\mu_1 - \mu_2))^2}{2(\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{12})}\right).$$

(ii) Tem-se que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Q > 0) &= \mathbb{P}\left(\frac{Q - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{12}}} > -\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{12}}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z > -\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{12}}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(-\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{12}}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{11} + \sigma_{22} - 2\sigma_{12}}}\right).
\end{aligned}$$

em que $\Phi(\cdot)$ é a função de distribuição da normal padrão.

(d) Seja $\boldsymbol{a} = \pi$ e $\boldsymbol{B} = (1\ 2)$. Veja que $W = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{BX}$.

(i) Portanto, pelo resultado de transformações para normais multivariadas, a variável aleatória W tem distribuição normal univariada (pois, $\dim(\boldsymbol{B}) = 1 \times 2$) com média e variância, respectivamente, dadas por:

$$\mathbb{E}[W] = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{B\mu} = \pi + (1 \quad 2)\begin{pmatrix}\mu_1 \\ \mu_2\end{pmatrix} = \pi + \mu_1 + 2\mu_2$$

e

$$\mathbb{V}ar[W] = \boldsymbol{B\Sigma B}^\top = (1 \quad 2)\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 \\ 2\end{pmatrix} = \sigma_{11} + 4\sigma_{22} + 4\sigma_{12}.$$

Assim, $W \sim \text{Normal}(\pi + \mu_1 + 2\mu_2,\ \sigma_{11} + 4\sigma_{22} + 4\sigma_{12})$, o que resulta na seguinte função densidade de probabilidade de W:

$$f_W(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\sigma_{11} + 4\sigma_{22} + 4\sigma_{12})}} \exp\left(-\frac{(w - (\pi + \mu_1 + 2\mu_2))^2}{2(\sigma_{11} + 4\sigma_{22} + 4\sigma_{12})}\right).$$

(ii) A função geradora de momentos de $X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma^2)$ é dada por

$$M_X(t) = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2\right).$$

Portanto, a função geradora de momentos de W é dada por

$$M_W(t) = \exp\left((\pi + \mu_1 + 2\mu_2)t + \frac{1}{2}t^2(\sigma_{11} + 4\sigma_{22} + 4\sigma_{12})\right).$$