
Lista 11 - Inferência Frequentista (MAE0301)

Professor: Alexandre Patriota

Monitor: Andrey Sarmiento

1º semestre de 2025

Data de entrega: 13/06/2025

1. Seja $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim \text{Uniforme}(0, \theta)$, em que $\theta \in \Theta = \mathbb{R}_+$. Suponha que seja de interesse testar:

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \theta \geq 2 \\ \mathcal{H}_1 : \theta < 2 \end{cases} .$$

Considere a seguinte função teste:

$$\delta(\mathbf{X}_n) = \begin{cases} 1, & \text{se } X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\} \leq \frac{3}{2} \\ 0, & \text{se } X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\} > \frac{3}{2} \end{cases} .$$

- (a) Determine a função poder do teste e faça o gráfico.
(b) Calcule a probabilidade máxima do erro tipo I.
(c) Calcule a probabilidade máxima do erro tipo II.
(d) Faça um gráfico com curvas das probabilidades máximas dos erros tipo I e II em função de n e interprete-as.
2. Seja $\mathbf{X}_n = (X_1, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim f_\theta$, em que $\theta \in \Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$. Suponha que seja de interesse testar:

$$\begin{cases} \mathcal{H}_0 : \theta = \theta_0 \\ \mathcal{H}_1 : \theta = \theta_1 \end{cases} .$$

Apresente o teste mais poderoso de nível α em termos da estatística suficiente para os casos abaixo. Explícite a função teste $\delta(\mathbf{X}_n)$ numericamente e a função poder do teste $\pi_\delta(\theta)$.

- (a) $X \sim \text{Exponencial}(\theta)$, $\theta_0 = 2$, $\theta_1 = 4$, $n = 20$ e $\alpha = 0.05$.
(b) $X \sim \text{Poisson}(\theta)$, $\theta_0 = 1$, $\theta_1 = 0.5$, $n = 50$ e $\alpha = 0.0861$.
(c) $X \sim \text{Beta}(1, \theta)$, $\theta_0 = 10$, $\theta_1 = 50$, $n = 10$ e $\alpha = 0.10$.

Dica: $-\log(1 - X) \sim \text{Exponencial}(\theta)$.