RESPOSTAS DO CAPÍTULO 5

1. (a) $(1-0,6B)\widetilde{Z}_t = a_t$

   (b) $\widetilde{Z}_t = (1+0,8B)a_t$

   (c) $(1-0,3B+0,6B^2)\widetilde{Z}_t = a_t$

   (d) $(1-0,4B)\widetilde{Z}_t = (1-0,3B+0,8B^2)a_t$

   (e) $(1-1,5B+0,75B^2)\widetilde{Z}_t = a_t$

   (f) $\widetilde{Z}_t = (1+0,3B+0,6B^2)a_t$

2. (a) Estácionário e invertível

   (b) Estácionário e invertível

   (c) Estácionário e invertível

   (d) Estácionário e invertível

   (e) Estácionário e invertível

   (f) Estácionário e invertível

3. (a) $\gamma_0 = \dfrac{\sigma_a^2}{0,64}$

   $\gamma_1 = 0,9375\sigma_a^2$; $\gamma_2 = 0,5625\sigma_a^2$ e $\gamma_3 = 0,3375\sigma_a^2$

   $\phi_{11} = 0,6$ e $\phi_{jj} = 0,\ k \geq 2$

   (b) $\gamma_0 = 1,64\sigma_a^2$

   $\gamma_1 = 0,8\sigma_a^2$; $\gamma_j = 0,\ j \geq 2$

   $\phi_{11} = 0,4878$; $\phi_{22} = -0,3122$ e $\phi_{33} = 0,2215$

(c) $\gamma_0 = \dfrac{\sigma_a^2}{0,6175}$

$\gamma_1 = 0,3036\sigma_a^2$; $\gamma_2 = -0,8806\sigma_a^2$ e $\gamma_3 = -0,4464\sigma_a^2$

$\phi_{11} = 0,1875$; $\phi_{22} = -0,6$ e $\phi_{jj} = 0,\ j \geq 3.$

(d) $\gamma_0 = 1,85\sigma_a^2$

$\gamma_1 = 0,52\sigma_a^2$

$\gamma_2 = 1,008\sigma_a^2$

$\gamma_3 = 0,4032\sigma_a^2$

$\phi_{11} = 0,2811$; $\phi_{22} = 0,5059$ e $\phi_{33} = 0,0000225 \approx 0$

(e) $\gamma_0 = \dfrac{\sigma_a^2}{0,116125}$

$\gamma_1 = 7,381\sigma_a^2$; $\gamma_2 = 4,613\sigma_a^2$ e $\gamma_3 = 0,9966\sigma_a^2$

$\phi_{11} = 0,8571$; $\phi_{22} = -0,75$ e $\phi_{jj} = 0,\ j \geq 3.$

(f) $\gamma_0 = 1,45\sigma_a^2$; $\gamma_1 = 0,48\sigma_a^2$; $\gamma_2 = 0,6\sigma_a^2$ e $\gamma_j = 0,\ j \geq 3$

$\phi_{11} = 0,3310$; $\phi_{22} = 0,3417$ e $\phi_{33} = -0,2586$

4. (a) $\rho_1 = 0,6$ e $\rho_2 = 0,36$

(e) $\rho_1 = 0,8571$ e $\rho_2 = 0,5357$

5. (a) $\pi_1 = 0,6$; $\pi_2 = 0$ e $\pi_3 = 0$

$\psi_1 = 0,6$; $\psi_2 = 0,36$ e $\psi_3 = 0,216$

(b) $\psi_1 = 0,8$; $\psi_2 = 0$ e $\psi_3 = 0$

$\pi_1 = 0,8$; $\pi_2 = -0,64$ e $\pi_3 = 0,512$

(c) $\pi_1 = 0,3$; $\pi_2 = -0,6$ e $\pi_3 = 0$

$\psi_1 = 0,3$; $\psi_2 = -0,51$ e $\psi_3 = -0,3330$

(d) $\pi_1 = 0,1$; $\pi_2 = 0,83$ e $\pi_3 = 0,1690$

$\psi_1 = 0,1$; $\psi_2 = 0,84$ e $\psi_3 = 0,336$

(e) $\pi_1 = 1,5$; $\pi_2 = -0,75$ e $\pi_3 = 0$

$\psi_1 = 1,5$; $\psi_2 = 1,5$ e $\psi_3 = 1,125$

(f) $\psi_1 = 0,3$; $\psi_2 = 0,6$ e $\psi_3 = 0$

$\pi_1 = 0,3$; $\pi_2 = 0,51$ e $\pi_3 = -0,3330$

10. $\mu = \frac{\theta_0}{1-\phi_1-\phi_2}$

$\widetilde{Z}_t = \phi_1 \widetilde{Z}_{t-1} + \phi_2 \widetilde{Z} t - 2 + a_t$

11. (a) $\rho_j = 0,1144(0,3521)^j + 0,8856(-0,8521)^j$

Espectro: $f(\lambda) = \dfrac{\sigma_a^2}{2\pi(1,34 + 0,7\cos\lambda - 0,6\cos 2\lambda)}$

Região na figura 5.6 $\rightarrow$ 2º quadrante do triângulo $\Rightarrow$ raízes reais.

(b) $\rho_j = 0,8856(0,8521)^j + 0,1144(-0,3521)^j$

Espectro: $f(\lambda) = \dfrac{\sigma_a^2}{2\pi(1,34 - 0,7\cos\lambda - 0,6\cos 2\lambda)}$

Região na figura 5.6 $\rightarrow$ 1º quadrante do triângulo $\Rightarrow$ raízes reais.

(c) $\rho_j = (0,7746)^j(\cos 2,2725j - 0,2113\sin 2,2725j)$

Espectro: $f(\lambda)\dfrac{\sigma_a^2}{2\pi(2,36 + 3,2\cos\lambda + 1,2\cos 2\lambda)}$

Região na figura 5.6 $\rightarrow$ 3º quadrante do triângulo, raízes complexas.

(d) $\rho_j = (0,7746)^j(\cos 0,8691j + 0,2113\sin 0,8691j)$

Espectro: $f(\lambda) = \dfrac{\sigma_a^2}{2\pi(2,36 - 3,2\cos\lambda + 1,2\cos 2\lambda)}$

Região na figura 5.6 $\Rightarrow$ 4º quadrante do triângulo, raízes complexas.

14. (a) ponto no 3º quadrante, acima da reta $\phi = \theta$

    (b) ponto no 3º quadrante, abaixo da reta $\phi = \theta$

    (c) ponto no 4º quadrante

    (d) ponto no 2º quadrante

    (e) ponto no 1º quadrante, acima da reta $\phi = \theta$

    (f) ponto no 1º quadrante, abaixo da reta $\phi = \theta$

16. AR(1): $\phi_{11}$

    MA(1): $\phi_{11}$, $\phi_{22}$ e $\phi_{55}$

    ARMA(1,1): $\phi_{11}$

17. Manchas:

    $\rho_1 = 0,8077$; $\rho_2 = 0,4292$; $\rho_3 = 0,0310$; $\cdots$

    $\phi_{11} = 0,8077$; $\phi_{22} = -0,6421$; $\phi_{33} = -0,0960$; $\cdots$

    Temperatura:

    $\rho_1 = 0,8646$; $\rho_2 = 0,7796$; $\rho_3 = 0,7211$; $\cdots$

    $\phi_{11} = 0,8646$; $\phi_{22} = 0,1269$; $\phi_{33} = 0,0919$; $\cdots$

18. (a) $|b| < 1$

(b) $\begin{cases} \psi_{3j} = (-b)^j & , \text{se } j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \\ \psi_k = 0 & , k \neq 3j \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \rho_{3j} = (-b)^j & , \text{se } j = 1,\ 2,\ \cdots \\ \rho_k = 0 & , k \neq 3j \end{cases}$

19. $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q$

$$\sigma_a^2 = \frac{\sigma_{a1}^2(1 + \theta_{1,1}^2 + \cdots + \theta_{1,q_1}^2) + \sigma_{a2}^2(1 + \theta_{2,1}^2 + \cdots + \theta_{2,q_2}^2)}{(1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2)}$$

22. $\rho_k = \frac{16}{21}(2/3)^k + \frac{5}{21}(-1/3)^k$

23. AR(1): $\phi_1 = 0,8$ e $Var(a_t) = 4,32$

AR(2): $\phi_1 = 1,2$ e $\phi_2 = -0,5$ e $\sigma_a^2 = 3,24$

AR(3): $\phi_1 = 1,2$, $\phi_2 = -0,5$ e $\phi_3 = 0$ e $\sigma_a^2 = 3,24$

24. $\phi_{11} = 0,6364$

$\phi_{22} = 0,3277$

$\gamma_0 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_0 + \sigma_a^2 - \theta_1\sigma_a^2(0,7 - \theta_1) - \theta_2\sigma_a^2\big[0,7(0,7 - \theta_1) - 0,1 - \theta_2\big]$

$\gamma_1 = \phi_1\gamma_0 + \phi_2\gamma_1 - \theta_1\sigma_a^2 - \theta_2\sigma_a^2(0,7 - \theta_1)$

$\gamma_2 = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_0 - \theta_2\sigma_a^2$

Resolvendo as equações acima de $\gamma_0$, $\gamma_1$ e $\gamma_2$ encontramos $\theta_1$ e $\theta_2$.

$\phi_{33} = -0,20497$

25. (a) Não é estacionário.

    (b) Não é estacionário.

    (c) Não é estacionário e não é invertível.

    (d) $|\phi_1| < 1,4$

    (e) $\mu = 5$

27. (a) equações de diferenças; (b) choque aleatório e (c) forma invertida

    (i)

    (a) $Z_t = a_t + 0,3a_{t-1}$

    (b) $\psi_0 = 1$, $\psi_1 = 0,3$ e $\psi_j = 0$, $j \geq 2$

    (c) $\pi_i = (-0,3)^i$

    (ii)

    (a) $Z_t = 1,5Z_{t-1} - 0,5Z_{t-1} + a_t$

    (b) $\psi_1 = 1,5$; $\psi_2 = 1,75$; $\psi_3 = 1,875$ e $\psi_j = 1,5\psi_{j-1} - 0,5\psi_{j-2}$, $j \geq 3$

    (c) $\pi_1 = 1,5$, $\pi_2 = -0,5$ e $\pi_j = 0$, $j \geq 3$

    (iii)

    (a) $Z_t = 0,7Z_{t-1} + 0,3Z_{t-2} + a_t - 0,6a_{t-1}$

    (b) $\psi_1 = 0,1$; $\psi_2 = 0,37$; $\psi_3 = 0,289$ e $\psi_j = 0,7\psi_{j-1} + 0,3\psi_{j-2}$, $j \geq 3$

    (c) $\pi_1 = 0,1$; $\pi_2 = 0,36$; $\pi_3 = 0,216$ e $\pi_j = (0,6)\pi_{j-1}$, $j \geq 3$

    (iv)

(a) $Z_t = 2Z_{t-1} - Z_{t-2} + a_t - 0,3a_{t-1} + 0,8a_{t-2}$

(b) $\psi_1 = 1,7$; $\psi_2 = 3,2$; $\psi_3 = 4,7$ e $\psi_j = 2\psi_{j-1} - \psi_{j-2}$, $j \geq 3$

(c) $\pi_1 = 1,7$; $\pi_2 = 0,31$; $\pi_3 = -1,267$ e $\pi_j = 0,3\pi_{j-1} - 0,8\pi_{j-2}$, $j \geq 3$

29. $\psi_1 = 1 + \phi - \theta$

$\psi_2 = \big[(\phi - \theta)(1 + \phi)\big] + 1$

$\psi_3 = \psi_2(1 + \phi) - \phi\psi_1$

$\psi_j = \psi_{j-1}(1 + \phi) - \phi\psi_{j-2}$, com $\psi_0 = 1$ e $\psi_1 = 1 + \phi - \theta$

33. (a) $\widetilde{Z}_1 = 0,35$; $\widetilde{Z}_2 = -1,025$; $\cdots$; $\widetilde{Z}_{10} = -0,776660$

(b) $\widetilde{Z}_1 = 1,10$; $\widetilde{Z}_2 = 1,000$; $\cdots$; $\widetilde{Z}_{10} = 177$

35. ARMA(1,1)

36. $\theta = \dfrac{(\sigma_a^2 + 2\sigma_e^2) - \sigma_a\sqrt{\sigma_a^2 + 4\sigma_e^2}}{2\sigma_e^2}$ e $\sigma^2 = \dfrac{2\sigma_e^4}{\sigma_a^2 + 2\sigma_e^2 - \sigma_a\sqrt{\sigma_a^2 + 4\sigma_e^2}}$

37. ARIMA(1,2,2)

Relação entre os parâmetros:

$\gamma_w(0) = \sigma_a^2\big[1 + (\phi + \alpha)^2 + \phi^2\alpha^2\big] + 6\sigma_e^2 = \sigma_u^2(1 + \theta_1^2 + \theta_2^2)$ (I)

$\gamma_w(1) = -(\phi + \alpha)\sigma_a^2 - (\phi + \alpha)\phi\alpha\sigma_a^2 - 4\sigma_e^2 = \sigma_u^2(-\theta_1 + \theta_1\theta_2)$ (II)

$\gamma_w(2) = -\phi\alpha\sigma_a^2 + \sigma_e^2 = -\sigma_u^2\theta_2$ (III)

Resolvendo (I), (II) e (III) acima, encontramos as relações entre os parâmetros do modelo ARIMA e os parâmetro $\phi$, $\alpha$, $\sigma_a^2$ e $\sigma_e^2$.

38. (a) Invertível e não estacionário (2 diferenças)

    (b) Não invertível e não estacionário (2 diferenças)

    (c) Invertível e estacionário

    (d) Não invertível e estacionário

    (e) Não invertível e estacionário

39. (a) $\phi(B) = 1 - 0,5B + 1/6B^2$ e $\theta(B) = 1 - 1,2B + 0,2B^2$

    (b) $\Rightarrow \gamma_0 = 0,5\gamma_1 - 1/6\gamma_2 + 1,7767$

    $\Rightarrow \gamma_1 = 0,5\gamma_0 - 1/6\gamma_1 - 1,34$

    $\Rightarrow \gamma_2 = 0,5\gamma_1 - 1/6\gamma_0 + 0,2$

    $\Rightarrow \gamma_j = 0,5\gamma_{j-1} - 1/6\gamma_{j-2}$, $j \geq 3$

    (c) $\gamma_0 = 1,5933$; $\rho_1 = -0,2923$ e $\rho_2 = -0,1873$

40. (a) $\psi_1 = \phi_1 - \theta_1$

    $\psi_2 = \phi_1(\phi_1 - \theta_1) + \phi_2 - \theta_2$

    $\psi_k = \phi_1\psi_{k-1} + \phi_2\psi_{k-2}$ , $k \geq 3$

    (b) $Z_{t+k} = a_{t+k} + (\phi_1 - \theta_1)a_{t+k-1} + \big[\phi_1(\phi_1 - \theta_1) + \phi_2 - \theta_2\big]a_{t+k-2} +$

    $\cdots + \psi_k a_t + \psi_{k+1}a_{t-1} + \cdots$

    $E[a_t Z_{t+k}] = \psi_k\sigma_a^2$

41. (a) ARIMA(1,1,2)

    $\sigma_u^2(1+\theta_1^2+\theta_2^2) = \sigma_a^2 + 4,88\sigma_e^2$ (I)

    $\sigma_u^2(-\theta_1+\theta_1\theta_2) = -3,24\sigma_e^2$ (II)

    $-\theta_2\sigma_u^2 = 0,8\sigma_e^2$ (III)

    Resolvendo as igualdades (I), (II) e (III) equacionamos os parâmetros de $Z_t$ em função de $X_t$ e $Y_t$.

    (b) não

42. (a) É estacionário.

    (b) $\rho_j = (0,7906)^j \big[\cos(0,3220j) + 0,6924\sin(0,3220j)\big]$

    $\rho_1 = 0,9231$; $\rho_2 = 0,7597$; $\rho_3 = 0,5624$; $\rho_4 = 0,3688$ e $\rho_5 = 0,2016$

    (c) Período = 19,51 unidades de tempo

43. MA(2)