MAE 0219 - Introdução à Probabilidade e Estatística
Lista 5

Professores: Pedro Morettin & Chang Chiann

1. Para verificarmos se esta função $f(x)$ pode representar uma função densidade da variável aleatória X, temos que avaliar a integral $\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 (2x+3)\,dx = (x^2+3x)\big|_0^2 = 10$. Como essa integral é maior que 1, não pode ser função densidade.

2. $f(x) = kx$, $0 \leq x \leq 1$

(a) Calcule qual o valor de k a fim de que $f(x)$ seja função densidade de uma v.a. X:

$$\int_0^1 kx\,dx = k\frac{x^2}{2}\bigg|_0^1 = k\frac{1}{2} = 1$$

Portanto, k=2.

(b) $P(0 \leq X \leq 1/2) = \int_0^{1/2} 2x\,dx = x^2\big|_0^{1/2} = 1/4$

(c)

$$E(X) = \int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^1 2x^2\,dx = 2\frac{x^3}{3}\bigg|_0^1 = 2/3$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \int_0^1 x^2 f(x)\,dx - (2/3)^2 \\ &= \int_0^1 2x^3\,dx - 4/9 \\ &= 2\frac{x^4}{4}\bigg|_0^1 - 4/9 \\ &= 1/2 - 4/9 = 0,056 \end{aligned}$$

(d) $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} 2t\, dt = t^2\big|_{-\infty}^{x}$.

Fazer o gráfico $F(x)$, considerando o suporte de X, i.e:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ,x < 0 \\ x^2 & ,0 \leq x \leq 1 \\ 1 & ,x > 1 \end{cases}$$

(e) Usando o item anterior, temos que $P(\mu-\sigma \leq X \leq \mu+\sigma) = (\mu+\sigma)^2 - (\mu-\sigma)^2 = 4\mu\sigma$

3.

(a)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\, dx = \frac{2x^3}{9}\bigg|_0^1 + \left(\frac{-x^3}{9} + \frac{x^2}{2}\right)\bigg|_1^3 = 4/3$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) - (4/3)^2 \\ &= \frac{x^4}{6}\bigg|_0^1 + \left(\frac{-x^4}{12} + \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_1^3 - (4/3)^2 \\ &= 13/6 - 16/9 = 7/18 \end{aligned}$$

(b) $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - \int_0^1 f(x)\, dx = 1 - \frac{x^2}{3}\Big|_0^1 = 1 - 1/3 = 2/3$

4.

(a) Usando a regra de área do triângulo e dado que para $x = 1/4$, $f(x) = 1$, temos que $P(X \leq 1/4) = 1/8$.

Usando a regra de área do triângulo e dado que para $x = 0,1$ e $0,9$, $f(x) = 0,4$, temos que $P(0,1 < X \leq 0,9) = 1 - 2P(X < 0,1) = 1 - 0,04 = 0,96$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{if } 0 \leq x < 1/2; \\ -4x + 4 & \text{if } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(c) $E(X) = \int_0^{1/2} 4x^2\,dx + \int_{1/2}^{1}(-4x^2 + 4x)\,dx = 1/2$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\ &= \left(\int_0^{1/2} 4x^3\,dx + \int_{1/2}^{1}(-4x^3 + 4x^2)\,dx\right) - (1/2)^2 \\ &= 7/24 - 1/4 = 1/24 \end{aligned}$$

5. Denotando por $\Phi(z) = P(Z \leq z)$ a função de distribuição acumulada da normal padrão:

(a)

$$\begin{aligned} P(8 < X < 10) &= P\left(\frac{8-10}{2} < \frac{X-10}{2} < \frac{10-10}{2}\right) \\ &= P(-1 < Z < 0) \\ &= \Phi(0) - \Phi(-1) = 0,341 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} P(9 \leq X \leq 12) &= P\left(\frac{9-10}{2} < \frac{X-10}{2} < \frac{12-10}{2}\right) \\ &= P(-1/2 < Z < 1) \\ &= \Phi(1) - \Phi(-1/2) = 0,533 \end{aligned}$$

(c) $P(X > 10) = P\left(\frac{X-10}{2} > \frac{10-10}{2}\right) = P(Z > 0) = 1 - \Phi(0) = 0,5$

(d)

$$\begin{aligned} P(X < 8 \cup X > 11) &= P(X < 8) + P(X > 11) \\ &= P(Z < -1) + P(Z > 1/2) \\ &= \Phi(-1) + 1 - \Phi(1/2) = 0,467 \end{aligned}$$

6.

(a) $P(X \leq 115) = P\left(Z \leq \frac{115-100}{10}\right) = \Phi(3/2) = 0,933$

(b) $P(X \geq 80) = P\left(Z \geq \frac{80-100}{10}\right) = 1 - \Phi(-2) = 0,977$

(c)

$$\begin{aligned}
P(|X-100| \leq 10) &= P((X-100 \leq 10) \cap (X-100 \geq -10)) \\
&= P(90 \leq X \leq 110) \\
&= P\left(\frac{90-100}{10} \leq Z \leq \frac{110-100}{10}\right) \\
&= \Phi(1) - \Phi(-1) = 0,683
\end{aligned}$$

(d) Note que $P(X \leq 100-a) = 1 - P(X \leq 100+a)$, portanto:

$$\begin{aligned}
P(100-a \leq X \leq 100+a) &= 0,95 \\
P(X \leq 100+a) - P(X \leq 100-a) &= 0,95 \\
2P(X \leq 100+a) - 1 &= 0,95 \\
2P\left(Z \leq \frac{100+a-100}{10}\right) &= 1,95 \\
\Phi\left(\frac{a}{10}\right) &= 0,975
\end{aligned}$$

Portanto temos que $\frac{a}{10} = \Phi^{-1}(0,975)$, ou seja, $\frac{a}{10} = 1,96$, e portanto $a = 19,6$.

7.

(a) $P(X \leq \mu + 2\sigma) = P(Z \leq 2) = \Phi(2) = 0,977$

(b) $P(|X-\mu| \leq \sigma) = P(-\sigma \leq X - \mu \leq \sigma) = P(-1 \leq Z \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 0,683$

(c) Note que, similarmente ao item (d) do Ex. 6, temos que

$$P(\mu - a\sigma \leq X \leq \mu + a\sigma) = 2P(X \leq \mu + a\sigma) - 1.$$

Portanto, $P(Z \leq a) = \frac{1,99}{2} = 0,995$ e assim temos que $a = \Phi^{-1}(0,995) = 2,58$.

(d) Note que $P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - \Phi(a) = 0,9$. Assim, $a = \Phi^{-1}(0,1) = -1,28$.

8. Seja X a v.a. que representa a altura.

(a) $P(X > 1,65) = P\left(Z > \frac{1,65-1,7}{0,05}\right) = 1 - \Phi(-1) = 0,841$. Logo o número esperado é de 0,841*1000=841 alunos.

(b) Ou seja, determinar a tal que $P(\mu - a \leq X\mu + a) = 0,68$. Vimos que isso equivale a $2P(X \leq \mu + a) - 1 = 0,68$, ou $P(Z \leq a/\sigma) = 0,84$. Como neste caso temos $\sigma = 0,05$ e $\Phi^{-1}(0,84) = 0,995$, então $a = 0,0497$. O intervalo ao redor da média $\mu = 1,7$ é $[1,65; 1,75]$, aproximadamente.

9.

(a) $P(X \geq 74) = P(Z \geq 14/8) = 1 - \Phi(7/4) = 0,04$

(b)

$$\begin{aligned} P(|X - 60| \leq 8) &= P(-8 \leq X - 60 \leq 8) \\ &= P(52 \leq X \leq 68) \\ &= P\left(\frac{52-60}{8} \leq Z \leq \frac{68-60}{8}\right) \\ &= P(-1 \leq X \leq 1) = 0,683 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} P(|X - 60| \geq 5) &= P(-5 \leq X - 60 \cup X - 60 \geq 5) \\ &= P(55 \leq X) + P(X \geq 65) \\ &= P\left(\frac{55-60}{8} \leq Z\right) + P\left(Z \geq \frac{65-60}{8}\right) \\ &= P(Z \leq -5/8) + P(Z \geq 5/8) \\ &= 2P(Z \leq -5/8) = 0,532 \end{aligned}$$

10. Aqui queremos os limites (ou seja, os x_i's da distribuição normal tal que):

$$\begin{aligned} P(X \leq x_1) &= 0,2 \\ P(x_1 \leq X \leq x_2) &= 0,55 \\ P(x_2 \leq X \leq x_3) &= 0,15 \\ P(X \geq x_3) &= 0,1 \end{aligned}$$

Assim, padronizando a variável, temos:

$$P\left(Z \leq \frac{x_1-5}{0,8}\right) = 0,2 \Rightarrow \frac{x_1-5}{0,8} = \Phi^{-1}(0,2) \Rightarrow x_1 = 4,33$$
$$P\left(\frac{x_1-5}{0,8} \leq Z \leq \frac{x_2-5}{0,8}\right) = 0,55 \Rightarrow P(Z \leq \frac{x_2-5}{0,8}) - P(Z \leq \frac{x_1-5}{0,8}) = 0,55$$
$$P(Z \leq \frac{x_2-5}{0,8}) - 0,2 = 0,55 \Rightarrow x_2 = 5,54$$
$$P\left(\frac{x_2-5}{0,8} \leq Z \leq \frac{x_3-5}{0,8}\right) = 0,15 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{x_3-5}{0,8}\right) = 0,15+0,75 \Rightarrow x_3 = 6,03$$

11. A probabilidade dos homens de obterem nota (X) maior que 80 é:

$$P(X > 80) = \left(P(Z > \frac{80-70}{10})\right) = 1 - \Phi(1) = 0,97$$

A probabilidade das mulheres de obterem nota (X) maior que 80 é:

$$P(Y > 80) = \left(P(Z > \frac{80-65}{8})\right) = 1 - \Phi(1,875) = 0,84$$

Assim, uma probabilidade média (ponderada, sabendo que o número de homens é o dobro das mulheres), teríamos que a probabilidade de obter nota maior que 80 é de

$$P = \frac{0,97 \cdot 2 + 0,84 \cdot 1}{3} = 0,93.$$

12.

(a) Queremos aqui $P(X \leq 120) = P\left(Z \leq \frac{120-100}{15}\right) = \Phi(4/3) = 0,91.$

Logo o número esperado de estudantes é 200.0,91=182, aproximadamente.

(b) Queremos aqui $P(X \leq x) = 0,75 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{x-100}{15}\right) = 0,75$

$\Rightarrow \Phi^{-1}(0,75) = \frac{x-100}{15} = 0,674$. Logo, temos que o tempo necessário é $x = 110,12$ minutos.

13. Pelo enunciado, $P(X \leq 320) = 1/100$. Queremos saber a média μ, dado que o desvio padrão é $\sigma = 10$. Assim, $P\left(Z \leq \frac{320-\mu}{10}\right) = 1/100$. E portanto, temos que

$\dfrac{320-\mu}{10} = \Phi^{-1}(1/100) = -2,33 \Rightarrow \mu = 343,26$. Ou seja, deve-se ajustar a máquina de modo a produzir, em média, pacotes com 342,26 gramas.

14.

(a) $P(X \leq 10) = P\left(Z \leq \dfrac{10-12}{1,5}\right) = \Phi(-1,333) = 0,0912$

$P(X \geq 8) = 1 - P\left(Z \leq \dfrac{8-12}{1,5}\right) = 1 - \Phi(-2,666) = 0,9962$

$P(9,4 \leq X \leq 13,2) = P\left(Z \leq \dfrac{13,2-12}{1,5}\right) - P\left(Z \leq \dfrac{9,4-12}{1,5}\right) = 0,747$

$P(X = 11,6) = 0$

$P(10 \leq X \leq 13) = P\left(Z \leq \dfrac{13-12}{1,5}\right) - P\left(Z \leq \dfrac{10-12}{1,5}\right) = 0,656$

(b) $1 - P(X \leq x) = 0,985 \Rightarrow P\left(Z \leq \dfrac{x-12}{1,5}\right) = 0,015 \Rightarrow x = 12,759$

(c) $P(12 - a \leq X \leq 12 + a) = 2P(X \leq 12 + a) - 1 = 0,9 \Rightarrow P\left(Z \leq \dfrac{a}{1,5}\right) = 0,95 \Rightarrow$ $a = 2,46$

(d) $P\left(Z \leq \dfrac{18-12}{1,5}\right) = \Phi(4) = 0,999$, ou seja, não é sadio, pois está bem na cauda superior da distribuição.

15.

$P(X \leq 150) = P\left(Z \leq \dfrac{150-125}{30}\right) = 79,8\%$

$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \dfrac{x-125}{30}\right) = 0,98 \Rightarrow x = 186,62$

16. $P(X \leq 168) = P\left(Z \leq \dfrac{168-\mu}{8}\right) = 0,2 \Rightarrow \mu = 174,73$

(a) $P(X \geq 190) = 1 - P(X \leq 190) = 1 - P\left(Z \leq \dfrac{190-174,73}{8}\right) = 0,028$

(b) $P(X = 175) = 0$

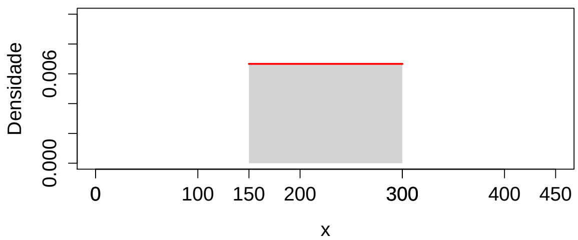
(c) $P(170 \leq X \leq 185) = P\left(Z \leq \dfrac{185-174,73}{8}\right) - P\left(Z \leq \dfrac{170-174,73}{8}\right) = 0,623$

Intervalo ao redor da média:

$2P(X \leq 174,73 + a) - 1 = 0,75 \Rightarrow P\left(Z \leq \dfrac{a}{8}\right) = 0,875 \Rightarrow a = 9,2$

17.

(a) Note que $f(x) = \dfrac{1}{300-150} = 0,0067$, para $150 \leq x \leq 300$:



(b) O lucro médio esperado por galão é $0,0067 \cdot (200-150) \cdot C_2 + 0,0067 \cdot (300-200) \cdot C_3 - C_1$

18.

(a) Para calcular média e variância, podemos usar os pontos médios dos intervalos como a seguir:

PONTO MÉDIO (x_i)	FREQÜÊNCIA (p_i)
5	8.6%
30	24.8%
75	14.3%
150	12.4%
300	11.4%
600	9.5%
1200	7.6%
2400	6.7%
4800	2.9%
6400	1.9%

Assim, para o faturamento X temos que $E(X) = \sum_{i=1}^{10} x_i p_i = 639,04$ e $Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1572194,3$.

Para o número de empregados Y, temos:

E portanto, $E(Y) = 102,74$ e $Var(Y) = 20544,3$.

(b) Supondo normalidade, temos que $P(0 \leq X \leq 10) = P\left(\dfrac{-639,04}{1253,9} \leq Z \leq \dfrac{10-639,04}{1253,9}\right) = \Phi(-0,5016) - \Phi(-0,5096) = 0,28\%$. Fazendo o mesmo para os outros intervalos e para a variável Y, temos:

PONTO MÉDIO (y_i)	FREQÜÊNCIA (p_i)
5	16.7%
35	35.7%
75	21.4%
150	14.3%
300	7.1%
600	3.8%
800	1.0%

INTERVALO X	PROB
0-10	0.28%
10-50	1.13%
50-100	1.44%
100-200	2.95%
200-400	6.13%
400-800	12.67%
800-1600	22.72%
1600-3200	20.12%
3200-6400	2.06%
>6400	30.51%

INTERVALO Y	PROB
0-10	2.21%
20-50	7.46%
50-100	13.59%
100-200	25.89%
200-400	22.97%
400-800	1.90%
>800	25.98%