

Percolação, processo de contato e meios aleatórios

Valentin Sisko

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
PARA OBTENÇÃO DO GRAU
DE
DOUTOR EM ESTATÍSTICA

Área de concentração: **Probabilidade**

Orientadores:

Prof. Dr. Pablo Augusto Ferrari e

Prof. Dr. Mikhail Menshikov

São Paulo, junho de 2003

Durante a realização deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da FAPESP.

Processo 98/16166-3

Percolação, processo de contato e meios aleatórios

Este exemplar corresponde à redação final da tese de doutorado devidamente corrigida e defendida por Valentin Sisko e aprovada pela comissão julgadora

São Paulo, junho de 2003

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Pablo Augusto Ferrari (Orientador) - IME-USP
- Prof. Dr. Serguei Popov - IME-USP
- Prof. Dr. Claudio Landim - IMPA
- Profa. Dra. Nancy Lopes Garcia - IMECC-UNICAMP
- Prof. Dr. Mario de Oliveira - IF-USP

Aos meus pais

Agradecimentos

Ao grupo de probabilidade do IME-USP,
aos meus orientadores Mikhail Menshikov e Pablo Augusto Ferrari,
aos membros da banca examinadora,
e à FAPESP.

Resumo

Nessa tese provamos quatro resultados.

Uma conexão entre percolação orientada e o processo de contato.

Estudamos um processo de contato em \mathbb{Z}^d e uma família de modelos de percolação orientada com dois parâmetros em $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+$. Provamos que a derivada no ponto final da curva crítica da percolação existe e o valor absoluto da derivada coincide com a taxa crítica do processo de contato correspondente.

Passeio aleatório multi-dimensional em meio aleatório rarefeito.

Consideramos uma modificação do passeio aleatório simples que pode ser definido da seguinte maneira. Inicialmente, cada $x \in \mathbb{Z}^d$ é “especial” com probabilidade $p(x)$; em seguida, em cada sítio especial modificamos as probabilidades de transição para criar uma deriva direcionada para fora da origem (no caso do passeio aleatório simples em dimensão um ou dois) ou para a origem (em dimensões maiores que dois), construindo assim um meio aleatório. Provamos algumas condições suficientes para transitoriedade e recorrência do passeio em função do comportamento assintótico da função $p(x)$.

Propagação de onda aleatória. Consideramos uma cadeia de Markov $\eta_t \in \mathbb{Z}^s$, onde s é o número dos sítios de um grafo G . Podemos representar cada estado de η_t como s colunas com alturas inteiras. A dinâmica incrementa as alturas das colunas e favorece os estados, onde as alturas de colunas vizinhas são iguais. As condições de fronteira são representadas por colunas adicionais com alturas que podem assumir valores constantes $+\infty$ ou ∞ . Estudamos a evolução da forma em função das condições de fronteira. Provamos condições suficientes para ergodicidade e não ergodicidade da cadeia de Markov vista da altura de alguma coluna, isto é, da cadeia de Markov $(\eta_t(i) - \eta_t(1), i = 2, \dots, s)$.

Fuga de massa em processos de alcance nulo multidimensionais com taxas aleatórias. Consideramos um processo multi-dimensional com alcance nulo com taxas $\lambda_x p(y-x)$, onde $\sum p(x) = 1$ e as variáveis aleatórias $\{\lambda_x\}$ são i.i.d. e $\lambda_0 \in (c, 1]$. Para cada realização do meio $\lambda = \{\lambda_x\}$ o processo com alcance nulo tem medidas invariantes $\{\nu_{\lambda, v} : 0 \leq v \leq c\}$. Seja μ uma medida de probabilidade tal que o número de partículas no sítio x cresce menos que exponencialmente quando $\|x\|$ converge para o infinito μ -q.c. Designando por $S_\lambda(t)$ o semigrupo do processo, provamos que todos os limites fracos do conjunto $\{\mu S_\lambda(t), t \geq 0\}$ quando $t \rightarrow \infty$ são dominados, na ordenação parcial natural, por $\nu_{\lambda, c}$. Isto implica que quando o processo começa com uma medida com densidade acima da densidade crítica o limite é dominado por $\nu_{\lambda, c}$ caracterizando uma "fuga de massa".

Abstract

We prove four results.

On the connection between oriented percolation and contact process. We study the contact process in \mathbb{Z}^d and a family of two-parametric oriented percolation models in $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+$. It is proved that the derivative at the endpoint of the critical curve for percolation exists and its absolute value coincides with the critical rate for the corresponding contact process.

On a many-dimensional random walk in a rarefied random environment. We consider a modification of the Simple Random Walk (SRW), which can be described as follows. Initially, any $x \in \mathbb{Z}^d$ becomes “special” with probability $p(x)$; then, in all special sites we modify the transition probabilities in order to create a drift which is directed outwards the origin (in the case of one- or two-dimensional SRW) or towards the origin (for higher dimensions), thus constructing a random environment. Then, based on the asymptotic behaviour of the function $p(x)$, we give some sufficient conditions for transience and recurrence.

Models of wave front propagation. We consider models of wave front propagation described by Markov chains. These Markov chains correspond to physical models of crystal growth. For the model that is based on a so called simple chain graph we study the ergodicity with respect to the boundary conditions at two points. For the other model that is based on a tree graph the boundary conditions are at one point but the set of admissible values for the matrix of transition probabilities is bigger. We use martingale techniques.

Loss of mass in multi-dimensional zero-range processes with random rates. We consider a multi-dimensional zero-range process with site dependent jump rates $\lambda_x p(y - x)$, where $\sum p(x) = 1$. The random variables $\{\lambda_x\}$ are i.i.d. and $\lambda_0 \in (c, 1]$. For every realization of the environment $\lambda = \{\lambda_x\}$ the zero-range process has some invariant measures $\{\nu_{\lambda, v} : 0 \leq v \leq c\}$. Let μ be any probability measure such that the number of particles per site x grows less than exponentially as $\|x\|$ tends to infinity μ -a.s. Denoting by $S_\lambda(t)$ the semigroup of the process, we prove that all weak limits of the set $\{\mu S_\lambda(t), t \geq 0\}$ as $t \rightarrow \infty$ are dominated, in the natural partial order, by $\nu_{\lambda, c}$. This implies that when the process starts with a measure with density above the critical one any limit measure is dominated by $\nu_{\lambda, c}$, therefore we see a “loss of mass”.

Estrutura da tese

Cada capítulo corresponde a um dos quatro problemas. Os Capítulos 1, 2, 3, e 4 são baseados nos artigos [1], [2], [3], e [4] respectivamente. Cada capítulo contém a introdução, a formulação dos resultados e as provas.

Sumário

1	Percolação orientada e processo de contato	1
1.1	Introdução e resultados	1
1.1.1	Processo de contato	2
1.1.2	Percolação orientada	3
1.1.3	Resultado principal	4
1.2	Provas	4
1.2.1	Prova de (1.2.1)	5
1.2.2	Prova de (1.2.2)	9
2	Passeio aleatório em meio aleatório	16
2.1	Introdução e resultados	16
2.2	Provas	19
2.2.1	Fatos básicos	19
2.2.2	Alguns lemas auxiliares	22
2.2.3	Prova do Teorema 2.1.1	28
2.2.4	Prova do Teorema 2.1.2	40
3	Propagação de onda aleatória	44
3.1	Introdução	44
3.2	Modelos e resultados	45
3.3	Provas	49
3.3.1	Fatos básicos	49
3.3.2	Prova do Teorema 3.2.1	49
3.3.3	Prova do Teorema 3.2.2	50
3.3.4	Prova do Teorema 3.2.3	54
3.3.5	Prova do Teorema 3.3.3	57

4	Processos com alcance nulo com taxas aleatórias	66
4.1	Introdução e resultados	66
4.2	Provas	70
4.2.1	Prova do Teorema 4.1.1	70
4.2.2	Ferramenta principal	72
4.2.3	Provas dos lemas	76

Capítulo 1

Uma conexão entre percolação orientada e o processo de contato

1.1 Introdução e resultados

Quando um modelo de percolação depende de alguns parâmetros $\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k$, é natural pensar sobre a “curva crítica” (ou “superfície crítica”, quando $k \geq 3$) no espaço dos parâmetros. A “curva crítica” é definida como a borda da região

$$H = \{\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_k \text{ tal que a percolação não ocorre}\} \subset [0, 1]^k.$$

A continuidade da curva (pelo menos para o caso de grafo “bom”) é provada por Menshikov em [9]. Aqui “bom” significa que o grafo satisfaz algumas condições geométricas (cf. [9]), que não formularemos. As propriedades da curva crítica para o modelo de percolação “mixto” foram estudadas por Chayes e Schonmann em [6]. Eles provaram Lipschitz-continuidade da curva e usaram este fato para estabelecer relações entre as probabilidades críticas para os modelos correspondentes de percolação de sítios e de elos.

A existência da derivada e as propriedades analíticas desta curva são problemas mais complicados. Nossa abordagem é ilustrada no exemplo seguinte. Vamos considerar um modelo de percolação orientada em \mathbb{Z}_+^2 , onde os elos horizontais são abertos com probabilidade p e os elos verticais são abertos com probabilidade q . Se p estiver perto de 0 e q perto de 1, rescalonando a

direção vertical, o modelo aproxima a construção gráfica de Harris do processo de contato. Esta idéia é usada para provar que para uma família de modelos de percolação orientada com dois parâmetros em $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+$ a derivada no ponto final da curva crítica existe e o valor absoluto da derivada coincide com a taxa crítica do processo de contato correspondente.

O presente capítulo é organizado do seguinte modo. Primeiro, definimos o processo de contato na Seção 1.1.1 e a percolação orientada na Seção 1.1.2. O resultado principal é formulado na Seção 1.1.3. A prova do resultado é dividida em duas partes. Primeiro, se o processo de contato for supercrítico, então, usando métodos de acoplamento, provamos que a família correspondente de modelos de percolação orientada está na fase supercrítica também (a Seção 1.2.1). Depois, se o processo de contato for subcrítico, então, usando o decaimento exponencial para o processo de contato na fase subcrítica e a convergência fraca [5], provamos que uma outra família de modelos de percolação está na fase subcrítica (a Seção 1.2.2).

1.1.1 Processo de contato

Definimos o processo de contato em \mathbb{Z}^d com alcance finito. Usamos a construção gráfica de Harris. Notação: $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

Fixamos $M \in \mathbb{N}$; sejam a_1, \dots, a_M vetores de \mathbb{Z}^d e $p_1, \dots, p_M > 0$ tal que $\sum_{i=1}^M p_i = 1$. Vamos usar estes parâmetros nas definições de ambos os modelos (cf. a Seção 1.1.2).

Por $\text{CP}[\lambda, \delta]$ denotamos o processo de contato definido do seguinte modo. Consideramos o grafo $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}_+$, onde \mathbb{Z}^d representa a componente de espaço e \mathbb{R}_+ representa o tempo. Em cada linha de tempo $\{x\} \times \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{Z}^d$ temos um processo pontual de Poisson com taxa δ . Os pontos são chamados mortes. Para $i = 1, \dots, M$, entre cada par das linhas de tempo $\{x_1\} \times \mathbb{R}_+$ e $\{x_2\} \times \mathbb{R}_+$ com $x_2 - x_1 = a_i$, temos um processo de flechas de x_1 para x_2 com taxa λp_i orientadas de x_1 para x_2 . Todos os processos são mutuamente independentes. Seja \mathfrak{B}_i o conjunto de começos de flechas com vetor a_i , seja \mathfrak{E}_i o conjunto de finais de flechas com vetor a_i , e seja \mathfrak{D} o conjunto das mortes, $i = 1, \dots, M$. Note que $\mathfrak{B}_i, \mathfrak{E}_i, \mathfrak{D} \subset \mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}_+$ são conjuntos aleatórios e $\mathfrak{E}_i = \mathfrak{B}_i + (a_i, 0)$.

Definição 1.1.1. Dizemos que existe um caminho de (x, s) para (y, t) se existem uma seqüência de momentos de tempo $s = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1} = t$ e uma seqüência de sítios $x_0 = x, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = y$ tal que

- para $i = 1, 2, \dots, n$ existem as flechas de x_{i-1} para x_i no momentos de tempo t_i .
- se $t_i < t_{i+1}$, então nos segmentos verticais $\{x_i\} \times (t_i, t_{i+1})$ não tem nenhuma morte, $i = 0, 1, \dots, n$.

Note que quase certamente não existem dois pontos de $\bigcup_{i=1}^M \mathfrak{B}_i \cup \mathfrak{D}$ tais que eles tem as segundas coordenadas iguais (a segunda coordenada significa o tempo).

Seja C um subconjunto(aleatório) de $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{R}_+$ definido por

$$C = \{(x, t) : \text{existe um caminho de } (0, 0) \text{ para } (x, t)\}.$$

Um ponto x é chamado infectado no momento de tempo t se $(x, t) \in C$.

Seja $\theta(\lambda, \delta) = P_{\lambda, \delta}\{C \text{ é ilimitado}\}$.

Usando o argumento de rescalonamento de tempo, obtemos $\theta(\lambda, \delta) = \theta(\lambda/\delta, 1)$, onde $\delta > 0$. É evidente que $\theta(0, 1) = 0$ e que $\theta(\rho, 1)$ é uma função não decrescente de ρ , então podemos definir o valor crítico $\rho_c = \sup\{\rho : \theta(\rho, 1) = 0\}$. Sabemos que $0 < \rho_c < \infty$ (cf. [11], Capítulo 6).

1.1.2 Percolação orientada

Seja $\langle (x, n), (y, m) \rangle$ um elo orientado de (x, n) para (y, m) , $x, y \in \mathbb{Z}^d$, $n, m \in \mathbb{Z}_+$,

$$\vec{L}_0 = \{\langle (x, n), (x, n+1) \rangle : x \in \mathbb{Z}^d, n \in \mathbb{Z}_+\},$$

$$\vec{L}_i = \{\langle (x, n), (x + a_i, n) \rangle : x \in \mathbb{Z}^d, n \in \mathbb{Z}_+\},$$

e $\vec{L} = \vec{L}_0 \cup (\bigcup_{i=1}^M \vec{L}_i)$. Onde a_i, M , e $p_i, i \in \{1, \dots, M\}$, são definidos na Seção 1.1.1.

Por $OP[p, q]$ denotamos o modelo de percolação definido do seguinte modo. O grafo é $(\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+, \vec{L})$. Os elos são abertos ou fechados independentemente. Cada elo de \vec{L}_0 é aberto com probabilidade q e fechado com probabilidade $1 - q$. Cada elo de \vec{L}_i é aberto com probabilidade pp_i e fechado com probabilidade $1 - pp_i$. Aqui $q \in [0, 1], p \in [0, \hat{p}]$, onde

$$\hat{p} = \left(\max_{1 \leq i \leq M} p_i \right)^{-1}.$$

O aglomerado \tilde{C} é o subconjunto aleatório de $\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+$ definido por

$$\tilde{C} = \{(x, t) : \text{existe um caminho de } (0, 0) \text{ para } (x, t)\}.$$

Seja $\tilde{\theta}(p, q) = P\{\tilde{C} \text{ é ilimitado}\}$.

Obviamente, para todo $q \neq 1$ temos $\tilde{\theta}(0, q) = 0$. $\tilde{\theta}(p, q)$ é uma função não decrescente de p quando q é fixo, e é uma função não decrescente de q quando p é fixo. Então podemos definir a curva crítica $p_c(q) = \sup\{p : \tilde{\theta}(p, q) = 0\}$ (vamos supor que $\sup \emptyset = 0$). Obviamente, $p_c(1) = 0$ e $p_c(0) = p^* \leq \hat{p}$.

1.1.3 Resultado principal

Nosso resultado é que a derivada no ponto final da curva crítica existe e o valor absoluto da derivada coincide com a taxa crítica do processo de contato. Mais precisamente,

Teorema 1.1.1. *Existe a derivada*

$$\frac{dp_c}{dq}(1) = -\rho_c.$$

Uma consequência interessante deste teorema é o seguinte

Corolário.

$$\frac{d\tilde{p}_c}{d\tilde{q}}(1) = -\tilde{\rho}_c, \quad \frac{d\tilde{p}_c}{d\tilde{q}}(0) = -\frac{1}{\tilde{\rho}_c},$$

onde $\tilde{\rho}_c$ é a taxa crítica para o processo de contato em dimensão um (cf. o Capítulo 6 de [7]) e $\tilde{p}_c(\tilde{q})$ é a curva crítica da percolação orientada clássica, com dois parâmetros, em \mathbb{Z}_+^2 . Neste caso usamos o Teorema 1.1.1 com $d = 1$, $M = 1$, $a_1 = 1$, $p_1 = 1$ e um argumento de simetria esboçado na figura 1.1.

Note que o valor simulado de $\tilde{\rho}_c$ é 3.306 ± 0.002 , estimativas rigorosas são $2.577 \dots \leq \tilde{\rho}_c \leq 3.882 \dots$ (cf. [7], o Capítulo 6, e as referências bibliográficas ali).

1.2 Provas

Para provar o teorema temos que provar que

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_c(1-h)}{h} \leq \rho_c, \tag{1.2.1}$$

$$\liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{p_c(1-h)}{h} \geq \rho_c. \tag{1.2.2}$$

Nas provas das (1.2.1) e (1.2.2) duas abordagens diferentes são usadas (cf. as Seções 1.2.1 e 1.2.2).

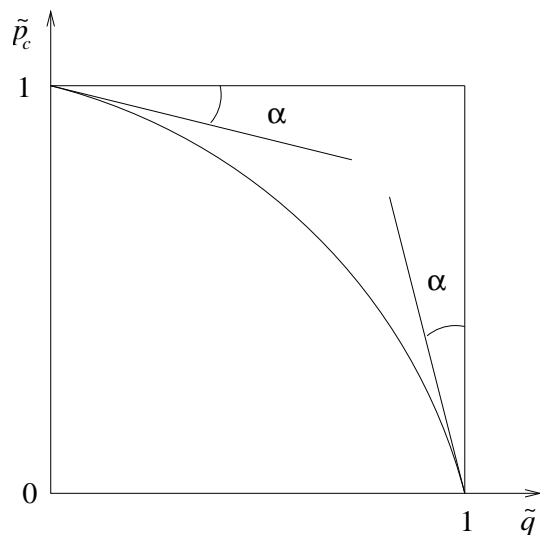


Figura 1.1: $\cot \alpha = \rho_c$

1.2.1 Prova de (1.2.1)

Para $t \in \mathbb{R}_+$ seja ξ_t o conjunto aleatório definido por

$$\xi_t := \{x \in \mathbb{Z}^d : \text{existe um caminho de } (0, 0) \text{ até } (x, t) \text{ para CP}[\lambda, \delta]\}.$$

Para $n \in \mathbb{Z}_+$ seja η_n o conjunto aleatório definido por

$$\eta_n := \{x \in \mathbb{Z}^d : \text{existe um caminho de } (0, 0) \text{ até } (x, n) \text{ para OP}[p, q]\}.$$

Para aliviar notação ξ_t e η_n não levam índices λ, δ, p, q .

Definição 1.2.1. Seja $h > 0$. Dizemos que $\text{CP}[\lambda, \delta]$ é h -dominado por $\text{OP}[p, q]$ se existe um acoplamento tal que $\xi_{nh} \subset \eta_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$. Notação:

$$\text{CP}[\lambda, \delta] \preceq_h \text{OP}[p, q].$$

O seguinte teorema é vital para a prova de (1.2.1).

Teorema 1.2.1. Dados $\lambda, \varepsilon > 0$, existem $h_0, \sigma_1, \sigma_2 > 0$ tais que $\frac{\lambda - \sigma_1}{1 + \sigma_2} > \lambda - \varepsilon$ e, para $h \in (0, h_0)$, temos

$$\text{CP}[\lambda - \sigma_1, 1 + \sigma_2] \preceq_h \text{OP}[\lambda h, 1 - h].$$

Prova. Para provar este teorema, precisamos dos seguintes lemas e definições.

Por $\text{DOP}[p, q]$ denotamos o modelo de percolação localmente dependente definido no grafo $(\mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}_+, \vec{L})$ do seguinte modo:

- cada elo de $\bigcup_{i=1}^M \vec{L}_i$ é fechado ou aberto independente de todos os outros elos,
- cada elo de \vec{L}_i é aberto com probabilidade pp_i e fechado com probabilidade $1 - pp_i$, $i = 1, \dots, M$,
- seja $b \in \vec{L}_0$ e

$$S_b = \left\{ \tilde{b} \in \bigcup_{i=1}^M \vec{L}_i : \text{o ponto final de } \tilde{b} \text{ coincide com o começo de } b \right\};$$

se existe um elo aberto $\tilde{b} \in S_b$, então o elo b é aberto; se todos os elos de S_b são fechados, então b é aberto com probabilidade q e fechado com probabilidade $1 - q$ independente dos elos de $\vec{L} \setminus (S_b \cup \{b\})$.

Notamos que a definição semelhante à Definição 1.2.1 pode ser dada para $\text{DOP}[p, q]$. Somente substituímos η_n com η_n^D e $\text{OP}[p, q]$ com $\text{DOP}[p, q]$.

Definição 1.2.2. Dizemos que $\text{DOP}[p, q]$ é *dominado* por $\text{OP}[\tilde{p}, \tilde{q}]$ se existe um acoplamento tal que $\eta_n^D \subset \eta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Notação: $\text{DOP}[p, q] \preceq \text{OP}[\tilde{p}, \tilde{q}]$.

Lema 1.2.1. *Dados $h, \lambda, \delta > 0$, temos*

$$\text{CP}[\lambda, \delta] \preceq_h \text{DOP}[1 - \exp(-\lambda h), \exp(-\delta h)].$$

Prova. Aqui nós vamos construir um acoplamento de $\text{CP}[\lambda, \delta]$ e $\text{DOP}[1 - \exp(-\lambda h), \exp(-\delta h)]$. Seja ω uma realização de $\text{CP}[\lambda, \delta]$. Usando ω , construímos a realização $\tilde{\omega}$ de $\text{DOP}[1 - \exp(-\lambda h), \exp(-\delta h)]$ do seguinte modo:

- o elo $\langle (x, n), (x + a_i, n) \rangle$ é aberto se $(x \times [nh, (n + 1)h]) \cap \mathfrak{B}_i \neq \emptyset$, e fechado no caso contrário, $i = 1, \dots, M$;
- o elo $\langle (x, n), (x, n + 1) \rangle$ é aberto se $(x \times (nh, (n + 1)h)) \cap \mathfrak{D} = \emptyset$, ou $(x \times [nh, (n + 1)h]) \cap \mathfrak{E}_i \neq \emptyset$ para algum i .

Dado h , seja E_h um evento tal que

$$\left(\bigcup_{j=1}^M \mathfrak{B}_j \cup \mathfrak{D} \right) \cap \left(\mathbb{Z}^d \times \{nh : n \in \mathbb{Z}_+\} \right) \neq \emptyset.$$

Usando o fato simples que probabilidade de E_h é igual a zero, é fácil ver que o processo construído é DOP $[1 - \exp(-\lambda h), \exp(-\delta h)]$.

Agora vamos provar a dominação, i.e., $\xi_{kh} \subset \eta_k^D$ para todo k . A prova é por indução sobre k . Para $k = 0$, temos $\xi_0 = \{0\} = \eta_0^D$.

Suponhamos que $\xi_{kh} \subset \eta_k^D$ para algum $k \in \mathbb{Z}_+$, vamos provar que $\xi_{(k+1)h} \subset \eta_{k+1}^D$.

Seja $x \in \xi_{(k+1)h} \cap \xi_{kh}$; então $x \in \eta_k^D$ e, ou $\mathfrak{D} \cap (\{x\} \times (kh, (k+1)h)) = \emptyset$, ou existe i tal que $\mathfrak{E}_i \cap (\{x\} \times [kh, (k+1)h]) \neq \emptyset$, assim, o elo $\langle (x, k), (x, k+1) \rangle$ é aberto e $x \in \eta_{k+1}^D$.

Seja $x \in \xi_{(k+1)h}$ e $x \notin \xi_{kh}$; então existe $y \in \xi_{kh}$ tal que existe um caminho de (y, kh) até $(x, (k+1)h)$ para CP $[\lambda, \delta]$. Portanto, existe um caminho de (y, k) até (x, k) para o modelo da percolação localmente dependente e existe i tal que $\mathfrak{E}_i \cap (\{x\} \times [kh, (k+1)h]) \neq \emptyset$, logo $\langle (x, k), (x, k+1) \rangle$ é aberto e $x \in \eta_{k+1}^D$. \square

Lema 1.2.2. *Dado $\lambda, \varepsilon > 0$, existem $h_0, \sigma_2, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > \sigma_1$ tais que $\frac{\lambda - \sigma_1}{1 + \sigma_2} > \lambda - \varepsilon$ e para todo $h < h_0$*

$$\text{DOP}[1 - \exp(-(\lambda - \sigma_1)h), \exp(-(1 + \sigma_2)h)] \preceq \text{OP}[\lambda h, 1 - h]. \quad (1.2.3)$$

Prova. Dado $b \in \vec{L}$, introduzimos uma variável aleatória $Z(b)$ do seguinte modo: $Z(b) = 1$ se b é aberto e $Z(b) = 0$ se b é fechado para OP $[p, q]$. Para DOP $[p, q]$ introduzimos $Z^D(b)$ de modo análogo. Para aliviar notação, $Z(b)$ e $Z^D(b)$ não levam índices p e q .

Seja $b_0 \in \vec{L}_0$. Lembramos que

$$S_{b_0} = \left\{ \tilde{b} \in \bigcup_{i=1}^M \vec{L}_i : \text{o ponto final de } \tilde{b} \text{ coincide com o começo de } b_0 \right\}.$$

Notamos que $S_{b_0} = \{b_1, \dots, b_M\}$, onde $b_i \in \vec{L}_i$. Lembramos que a família das variáveis aleatórias $\{Z^D(b_0)\} \cup \{Z^D(b) : b \in S_{b_0}\}$ é independente da família $\{Z^D(\tilde{b}_0)\} \cup \{Z^D(b) : b \in S_{\tilde{b}_0}\}$ para $b_0 \neq \tilde{b}_0 \in \vec{L}_0$ (cf. a definição de DOP).

Portanto, para provar a dominação (1.2.3), é suficiente provar que

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{Z(b_0) = \alpha_0, Z(b_1) = \alpha_1, \dots, Z(b_M) = \alpha_M\} \\ & \geq \mathbf{P}\{Z^D(b_0) = \alpha_0, Z^D(b_1) = \alpha_1, \dots, Z^D(b_M) = \alpha_M\} \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

para qualquer $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_M) \neq (0, 0, \dots, 0)$, $\alpha_i \in \{0, 1\}$.

Note que

$$\mathbf{P}\{Z^D(b_0) = 0, Z^D(b_1) = \alpha_1, \dots, Z^D(b_M) = \alpha_M\} = 0$$

para qualquer $(\alpha_1, \dots, \alpha_M) \neq (0, \dots, 0)$.

As seguintes cálculos (1.2.5)–(1.2.8) mostram que (1.2.4) é cumprida. De fato, para h suficientemente pequeno, $\sigma_1 < \lambda$, e $\sigma_2 > \sigma_1$, o lado direito de (1.2.5) é maior que o lado direito de (1.2.6) para todo $A \subset \{1, 2, \dots, M\}$, e o lado direito de (1.2.7) é maior que o lado direito de (1.2.8).

Seja $A \subset \{1, 2, \dots, M\}$, $A \neq \emptyset$, $B = \{1, 2, \dots, M\} \setminus A$.

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{Z(b_0) = 1, Z(b_i) = 1, i \in A, Z(b_j) = 0, j \in B\} \\ & = (1 - h) \prod_{i \in A} \lambda h p_i \prod_{j \in B} (1 - \lambda h p_j) = h^{|A|} \lambda^{|A|} \prod_{i \in A} p_i + O(h^{|A|+1}). \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{Z^D(b_0) = 1, Z^D(b_i) = 1, i \in A, Z^D(b_j) = 0, j \in B\} \\ & = \prod_{i \in A} (1 - \exp(-(\lambda - \sigma_1)h)) p_i \prod_{j \in B} (1 - (1 - \exp(-(\lambda - \sigma_1)h)) p_j) \\ & = h^{|A|} (\lambda - \sigma_1)^{|A|} \prod_{i \in A} p_i + O(h^{|A|+1}). \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{Z(b_0) = 1, Z(b_i) = 0, i = 1, 2, \dots, M\} \\ & = (1 - h) \prod_{i=1}^M (1 - \lambda h p_i) \\ & = 1 - (1 + \lambda)h + O(h^2), \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

lembramos que $\sum_{i=1}^M p_i = 1$.

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\{Z^D(b_0) = 1, Z^D(b_i) = 0, i = 1, 2, \dots, M\} \\ & = \exp(-(1 + \sigma_2)h) \prod_{i=1}^M (1 - (1 - \exp(-(\lambda - \sigma_1)h)) p_i) \\ & = 1 - (1 + \lambda + \sigma_2 - \sigma_1)h + O(h^2). \end{aligned} \quad (1.2.8)$$

□

Combinando o Lema 1.2.1 com o Lema 1.2.2, completamos a prova. □

Usando o Teorema 1.2.1, obtemos (1.2.1) do seguinte modo. Seja $\lambda > \rho_c$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que $\rho_c < \lambda - \varepsilon$. Do Teorema 1.2.1 segue que existem $h_0, \sigma_1, \sigma_2 > 0$ tais que

$$\text{CP}[\lambda - \sigma_1, 1 + \sigma_2] \preceq_h \text{OP}[\lambda h, 1 - h], \quad (1.2.9)$$

onde $\frac{\lambda - \sigma_1}{1 + \sigma_2} > \lambda - \varepsilon$ e $h \in (0, h_0)$. Portanto, $\frac{\lambda - \sigma_1}{1 + \sigma_2} > \rho_c$. Logo, $\theta(\lambda - \sigma_1, 1 + \sigma_2) > 0$. Combinando isto com (1.2.9), temos $\tilde{\theta}(\lambda h, 1 - h) > 0$. Isto implica que $p_c(1 - h) \leq \lambda h$ para todo $h \in (0, h_0)$. Como podemos escolher qualquer $\lambda > \rho_c$, temos (1.2.1).

1.2.2 Prova de (1.2.2)

O seguinte teorema é vital para a prova de (1.2.2).

Teorema 1.2.2. *Dado $\lambda < \rho_c$, existe $h_0 > 0$ tal que para todo $0 < h < h_0$ o modelo de percolação $\text{OP}[\lambda h, 1 - h]$ não percola.*

Nota 1. Para o processo de contato unidirecional e unidimensional o método de acoplamento também pode ser usado na região subcrítica do processo de contato, mas o método não funciona para o processo de contato geral.

Prova. Para provar o teorema usamos o seguinte plano:

1. Construimos uma aproximação discreta de $\text{CP}[\lambda, \delta]$. Para a aproximação usamos a notação $\text{CP}^h[\lambda, \delta]$, $h > 0$.
2. Usamos o decaimento exponencial do tamanho do cluster para o processo de contato subcrítico (cf. [5]) para provar que para $\text{CP}[\lambda, \delta]$ o número médio de partículas infectadas no momento t é menor que 1 se começar com uma partícula infectada no momento 0 (o Lema 1.2.3). Provamos que $\text{CP}^h[\lambda, \delta]$ tem a mesma propriedade se h é suficientemente pequeno (o Lema 1.2.6). Para provar a Lema 1.2.6 usamos
 - o decaimento exponencial do tamanho da região que contem todas as partículas infectadas até algum momento fixo do tempo t_0 (o Lema 1.2.4);

- a convergência fraca da família dos processos $\text{CP}^h[\lambda, \delta]$ para o processo $\text{CP}^0[\lambda, \delta]$ quando $h \rightarrow 0$ (cf. [5]).
3. Construindo um acoplamento de $\text{CP}^h[\lambda, \delta]$ e $\text{OP}[\lambda h, 1-h]$, obtemos que $\mathbf{E}\eta_n < 1$ para algum $n \in \mathbb{N}$ (o Lema 1.2.7); η_n é definido no começo da Seção 1.2.1.
 4. Usamos o método de gerações (o Lema 1.2.8) e a coincidência dos pontos (curvas) críticos (críticas) para os modelos de percolação para obter que $\text{OP}[\lambda h, 1-h]$ não percole.

Passo 1. Seja $\mathbf{P}_{\lambda, \delta}$ a medida que corresponde a $\text{CP}[\lambda, \delta]$. Dado $h > 0$ tal que $h\delta < 1$ e $h\lambda < 1$, sejam $\{X_h(x, k) : x \in \mathbb{Z}^d, k \in \mathbb{Z}_+\}$ e $\{Y_h(x, k, i) : x \in \mathbb{Z}^d, k \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq i \leq M\}$ umas variáveis aleatórias independentes que tomam valores 0 e 1, tais que

$$\mathbf{P}\{X_h(x, k) = 0\} = h\delta, \quad \mathbf{P}\{Y_h(x, k, i) = 1\} = h\lambda p_i.$$

Por $\text{CP}^h[\lambda, \delta]$ denotamos o seguinte modelo. Em (x, hk) temos um ponto do morte se $X_h(x, k) = 0$ e temos uma flecha de x para $x + a_i$ no momento $hk + \frac{1}{2}h$ se $Y_h(x, k, i) = 1$, $x \in \mathbb{Z}^d, k \in \mathbb{Z}_+, 1 \leq i \leq M$. Por $\mathbf{P}_{\lambda, \delta}^h$ denotamos a medida induzida por esta construção.

No espaço dos configurações de $\text{CP}[\lambda, \delta]$ a topologia de Skorohod pode ser definida (cf. [5], a Seção 2). Sabemos que $\mathbf{P}_{\lambda, \delta}^h$ converge fracamente para $\mathbf{P}_{\lambda, \delta}$ quando $h \rightarrow 0$ (cf. [5]).

Passo 2. Seja $|\xi_t|$ o número de pontos infectados para $\text{CP}[\lambda, \delta]$ no momento t se a configuração inicial do processo (no momento 0) é um ponto infectado no 0 e todos os outros pontos não infectados.

Lema 1.2.3. *Se $\lambda/\delta < \rho_c$, então existe $t = t(\lambda, \delta) > 0$ tal que $\mathbf{E}_{\lambda, \delta}|\xi_t| < 1$*

Prova. Como $\mathbf{E}_{\lambda, \delta} \int_0^\infty |\xi_t| dt < \infty$ quando $\lambda/\delta < \rho_c$ (cf. [5]), temos

$$\int_0^\infty \mathbf{E}_{\lambda, \delta} |\xi_t| dt = \mathbf{E}_{\lambda, \delta} \int_0^\infty |\xi_t| dt < \infty,$$

o que facilmente implica que $\mathbf{E}_{\lambda, \delta}|\xi_t| < 1$ para algum t . □

Seja $\|\xi_t\| = \sup\{\|x\| : x \in \xi_t\}$, onde $\|\cdot\|$ é o norma euclidiana em \mathbb{R}^d .

Daqui para frente vamos usar a notação $\text{CP}^0[\lambda, \delta] := \text{CP}[\lambda, \delta]$. Definimos $\xi_t^h, |\xi_t^h|$, e $\|\xi_t^h\|$ para o processo $\text{CP}^h[\lambda, \delta]$ de modo análogo à definição de

ξ_t , $|\xi_t|$, e $\|\xi_t\|$ para o processo $\text{CP}[\lambda, \delta]$. Note que ξ_t^0 é somente uma notação alternativa para ξ_t . Por questão de simplicidade, daqui para frente não usamos os subscripts λ e δ de \mathbf{P} e \mathbf{E} .

Lema 1.2.4. *Seja $\delta = 1$. Então dados t_0, λ , existem $N_0, h_0, \alpha > 0$ tais que para todo $N > N_0$ e para todo $h \in [0, h_0)$ temos*

$$\mathbf{P}\{\|\xi_t^h\| > N \text{ para algum } t \leq t_0\} \leq \exp(-\alpha N). \quad (1.2.10)$$

Nota 2. A prova do lema para $d = 1$ é bastante trivial, mas para $d > 1$ temos que trabalhar mais. Existem os resultados para o modelo de crescimento de Richardson (cf. [12]) que domina o processo de contato, mas precisamos das estimativas uniformes em h .

Prova. Seja $s \in \mathbb{R}$, $s > h$. Definimos o modelo $\text{GR}^{s,h}[\lambda]$ e construímos um acoplamento de $\text{GR}^{s,h}[\lambda]$ com $\text{CP}^h[\lambda, \delta]$ do seguinte modo.

Primeiro, introduzimos uma família de variáveis aleatórias $\{U^h(x, k, i)\}$.

Para $x \in \mathbb{Z}^d, k \in \mathbb{Z}_+, i \in \{1, \dots, M\}$, seja $U^0(x, k, i) = 1$ se $(\{x\} \times [sk, (k+1)s]) \cap \mathfrak{B}_i \neq \emptyset$; no caso contrário $U^0(x, k, i) = 0$.

Para $h > 0$, seja $U^h(x, k, i) = 1$ se existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $Y_h(x, m, i) = 1$ e $mh + \frac{1}{2}h \in [ks, k(s+1))$; no caso contrário $U^h(x, k, i) = 0$.

Por $\text{GR}^{s,h}[\lambda]$ denotamos o seguinte modelo. Existe uma flecha de x para $x + a_i$ no momento ks se $U^h(x, k, i) = 1$; no caso contrário neste momento não tem a flecha. O processo $\text{GR}^{s,h}[\lambda]$ não tem mortes.

É claro que $\theta_t^{s,h} \supset \xi_t^h$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$, onde $\theta_t^{s,h}$ é o conjunto aleatório

$$\{x \in \mathbb{Z}^d : \text{existe um caminho de } (0, 0) \text{ até } (x, t) \text{ para } \text{GR}^{s,h}[\lambda]\},$$

aqui usamos a noção do caminho da Definição 1.1.1.

Temos

$$\mathbf{P}\{U^h(x, k, i) = 1\} \leq 1 - (1 - h\lambda p_i)^{\lfloor s/h \rfloor + 1} \rightarrow 1 - \exp(-\lambda s p_i)$$

quando $h \rightarrow 0$ e $\mathbf{P}\{U^0(x, k, i) = 1\} = 1 - \exp(-\lambda s p_i)$, $i = 1, \dots, M$. Portanto dado $P_0 > 0$, existem s e $h_0 = h_0(s)$ tais que $\mathbf{P}\{U^h(x, k, i) = 1\} \leq P_0$ para todo $h \in [0, h_0)$.

Seja $\|\theta_t^{s,h}\| = \sup\{\|x\| : x \in \theta_t^{s,h}\}$ e $a = \max_{i=1, \dots, M} \|a_i\|$. Note que M é o degrau dos vértices do grafo $G = (\mathbb{Z}^d, \bigcup_{i=1}^M \vec{L}_i)$. Se $\|\theta_t^{s,h}\| > N$, então existe

um caminho formado por pelo menos $\lfloor N/a \rfloor$ flechas ordenadas no tempo. Portanto,

$$\mathbf{P}\{\|\theta_t^{s,h}\| > N \text{ para algum } t \leq t_0\} \leq \sum_{n=\lfloor N/a \rfloor}^{\infty} P_0^n (M+1)^{n+\lfloor t_0/s \rfloor+1},$$

onde $(M+1)^{n+\lfloor t_0/s \rfloor+1}$ é uma estimativa de cima para o número dos caminhos de comprimento n (i.e., n flechas) que chegam ao momento t_0 . Cada caminho tem n flechas no espaço e menos que $\lfloor t_0/s \rfloor + 1$ períodos de tamanho s no tempo (o último período pode ser menor que s).

Podemos usar P_0 tal que $P_0(M+1) < 1$ e depois escolher N_0 e α . \square

Para $\text{CP}^h[\lambda, \delta]$, $h \geq 0$ vamos por $\xi_t^h(x) = 1$ se existe um caminho de $(0, 0)$ para (x, t) e $\xi_t^h(x) = 0$ se não existe o caminho.

Como $|\xi_t^h| = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \xi_t^h(x)$, segue que $\mathbf{E}|\xi_t^h| = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbf{E}\xi_t^h(x)$.

Lema 1.2.5. *Dados t e x ,*

$$\mathbf{E}\xi_t^h(x) \rightarrow \mathbf{E}\xi_t^0(x) \text{ quando } h \rightarrow 0. \quad (1.2.11)$$

Prova. Dado t , seja $\Lambda = \Lambda(N) = \{(x, s) : \|x\| \leq N, s \leq t\}$. Suponhamos que $\xi_t^{h,\Lambda}(x)$ é uma variável aleatória tomando valores 0 e 1 tal que $\xi_t^{h,\Lambda}(x) = 1$ se existe um caminho de $(0, 0)$ para (x, t) que está inteiramente em Λ , e $\xi_t^{h,\Lambda}(x) = 0$ se não existe o caminho, aqui usamos $\text{CP}^h[\lambda, \delta]$, $h \geq 0$. Claro que

$$|\mathbf{E}\xi_t^h(x) - \mathbf{E}\xi_t^{h,\Lambda}(x)| \leq \mathbf{P}\{\|\xi_s^h\| > N \text{ para algum } s \leq t\}. \quad (1.2.12)$$

Dados x, t, Λ , definimos o evento $A = \{\xi_t^{h,\Lambda}(x) = 1\}$. Seja ∂A a borda de A na topologia de Skorohod. Não é difícil obter que $\mathbf{P}_{\lambda,\delta}\{\partial A\} = 0$. Portanto, usando a convergência fraca, obtemos que dados x, t , e Λ , temos

$$\mathbf{E}\xi_t^{h,\Lambda}(x) \rightarrow \mathbf{E}\xi_t^{0,\Lambda}(x) \text{ as } h \rightarrow 0. \quad (1.2.13)$$

Combinando (1.2.12), (1.2.13), e (1.2.10), completamos a prova. \square

Lema 1.2.6. *Dado t , temos*

$$\mathbf{E}|\xi_t^h| \rightarrow \mathbf{E}|\xi_t^0| \text{ quando } h \rightarrow 0. \quad (1.2.14)$$

Prova. Usando o Lema 1.2.5, temos que dado N ,

$$\sum_{\|x\| < N} \xi_t^h(x) \rightarrow \sum_{\|x\| < N} \xi_t(x) \quad (1.2.15)$$

quando $h \rightarrow 0$.

É claro que

$$\mathbf{E} \left(\sum_{\|x\| \geq N} \xi_t^h(x) \right) \leq \sum_{m=N}^{\infty} C m^d \mathbf{P} \{ \|\xi_t^h\| \geq m \}, \quad (1.2.16)$$

onde C é tal que

$$\#\{x \in \mathbb{Z}^d : m \leq \|x\| < m+1\} \leq C m^d.$$

De (1.2.16) e o Lema 1.2.4, segue que dados $\varepsilon, t > 0$, existem N e $h_0 > 0$ tais que

$$\sum_{\|x\| > N} \mathbf{E} \xi_t^h(x) < \varepsilon \quad (1.2.17)$$

para todo $h \in [0, h_0]$.

Combinando (1.2.15) e (1.2.17), completamos a prova do Lema 1.2.6. \square

Passo 3. Seja $\eta_m(x) = 1$ se existe um caminho de $(0, 0)$ até (x, m) para $\text{OP}[p, q]$; no caso contrário $\eta_m(x) = 0$. Seja $|\eta_m| = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \eta_m(x)$.

Lema 1.2.7. *Se para alguns t_0, λ , e δ temos*

$$\mathbf{E} |\xi_{t_0}| < 1, \quad (1.2.18)$$

então existe $h_0 > 0$ tal que dado $h \in (0, h_0)$, existe n tal que

$$\mathbf{E} |\eta_n| < 1, \quad (1.2.19)$$

onde ξ_t corresponde a $\text{CP}[\lambda, \delta]$ e η_n a $\text{OP}[\lambda h, 1 - \delta h]$.

Prova. De (1.2.14) e (1.2.18), segue que existem $h_1 > 0$ e $\varepsilon_1 > 0$ tais que para todo $h \in (0, h_1)$, temos

$$\mathbf{E} |\xi_{t_0}^h| < 1 - \varepsilon_1, \quad (1.2.20)$$

onde ξ_t^h corresponde a $\text{CP}^h[\lambda, \delta]$. Seja também h_1 suficientemente pequeno e tal que $\lambda h_1 < 1$ e $1 - \delta h_1 > 0$. Agora dado $h \in (0, h_1)$, construímos um acoplamento de $\text{CP}^h[\lambda, \delta]$ e $\text{OP}[\lambda h, 1 - \delta h]$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} Z(\langle (x, n), (x, n+1) \rangle) &= X_h(x, n+1), \\ Z(\langle (x, n), (x+a_i, n) \rangle) &= Y_h(x, n, i), \end{aligned}$$

onde $i = 1, \dots, M$, $x \in \mathbb{Z}^d$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $Z(\cdot)$ é definido na prova do Lema 1.2.2, e $X_h(\cdot)$ e $Y_h(\cdot)$ são da definição de $\text{CP}^h[\lambda, \delta]$.

Denotamos $B_h = \{t \in \mathbb{R}_+ : t - \lfloor t/h \rfloor h \geq h/2\}$. Vamos provar que dado $t \in B_h$, temos

$$\xi_t^h \supset \eta_{\lfloor t/h \rfloor}. \quad (1.2.21)$$

A fim de provar este fato usamos indução sobre $k = \lfloor t/h \rfloor$.

Seja $k = 0$. Se $\eta_0(x) = 1$, então existe um caminho de $(0, 0)$ até $(x, 0)$ para $\text{OP}[\lambda h, 1 - \delta h]$. Portanto, existe um caminho de $(0, h/2)$ até $(x, h/2)$ para $\text{CP}^h[\lambda, \delta]$. Logo, $\xi_t^h \supset \eta_{\lfloor t/h \rfloor}$ para t tal que $\lfloor t/h \rfloor = 0$ e $t \in B_h$.

Suponhamos que $\xi_t^h \supset \eta_{\lfloor t/h \rfloor}$ para $\lfloor t/h \rfloor = k$ e $t \in B_h$. Vamos provar que $\xi_u^h \supset \eta_{\lfloor u/h \rfloor}$ para $\lfloor u/h \rfloor = k+1$, $u \in B_h$.

Seja $x \in \eta_{k+1}$. Então existe $y \in \eta_k$ tal que ou existe um caminho de $(y, k+1)$ até $(x, k+1)$ para $\text{OP}[\lambda h, 1 - \delta h]$ ou $x = y$. Portanto, $X_h(y, k+1) = 1$, $y \in \xi_t^h$, e existe um caminho de $(y, (k+1)h + h/2)$ até $(x, (k+1)h + h/2)$ para $\text{CP}^h[\lambda, \delta]$ se $x \neq y$. Logo, $x \in \xi_u^h$.

Isto completa a prova de (1.2.21).

Usando (1.2.21), para $t \in B_h$ temos

$$\mathbf{E}|\xi_t^h| \geq \mathbf{E}|\eta_{\lfloor t/h \rfloor}|. \quad (1.2.22)$$

Se $t_0 \in B_h$, então (1.2.19) com $n = \lfloor t_0/h \rfloor$ segue de (1.2.22) e (1.2.20).

Suponhamos que $t_0 \notin B_h$. Então $t_0 - h/2 \in B_h$. Portanto, de (1.2.22) segue que

$$\mathbf{E}|\xi_{t_0-h/2}^h| \geq \mathbf{E}|\eta_{\lfloor (t_0-h/2)/h \rfloor}|. \quad (1.2.23)$$

Vamos provar que dado $\varepsilon_2 > 0$, existe $h_2 > 0$ tal que para todo $h \in (0, h_2)$ temos

$$|\mathbf{E}|\xi_{t_0}^h| - \mathbf{E}|\xi_{t_0-h/2}^h|| < \varepsilon_2. \quad (1.2.24)$$

Do Lema 1.2.4, analogamente a como obtemos (1.2.17), temos que dado $\varepsilon_3 > 0$, existem N e $h_3 > 0$ tais que para todo $h \in (0, h_3)$, temos

$$\sum_{\|x\| > N} \mathbf{E}\xi_s^h(x) < \varepsilon_3, \quad (1.2.25)$$

onde $s \in \{t_0, t_0 - h/2\}$.

É fácil ver que dado h , temos

$$|\mathbf{E}\xi_{t_0}^h(x) - \mathbf{E}\xi_{t_0-h/2}^h(x)| \leq \mathbf{P}\{X_h(x, \lfloor t_0/h \rfloor) = 0\} \leq \delta h. \quad (1.2.26)$$

Usando (1.2.25) e (1.2.26), obtemos (1.2.24).

De (1.2.20), (1.2.24) com $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$ e (1.2.23) segue que (1.2.19) com $n = \lfloor (t_0 - h/2)/h \rfloor$. \square

Passo 4.

Lema 1.2.8. *Suponhamos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbf{E}|\eta_n| < 1$. Então $\mathbf{E}|\tilde{C}| < \infty$.*

Prova. A prova do lema segue facilmente da idéia que é análoga ao “método de gerações” (cf. [13]).

Seja $\zeta_0 = \mathbf{E}|\eta_0| = 1$, $\zeta_n = \mathbf{E}|\eta_n|$. Então $\mathbf{E}|\tilde{C}| = \sum_{i=0}^{\infty} \zeta_i$.

Seja $\zeta_n = a < 1$.

O nosso processo de percolação pode ser dominado por um processo de ramificação correspondente. Segue que $\zeta_{kn} \leq a^k$, $k \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_{kn} < \infty.$$

É fácil verificar que no nosso caso $\zeta_1 < K < \infty$, onde K é uma constante. Portanto, $\zeta_{kn+m} \leq \zeta_{kn} K^m$, onde $m < n$. Logo, $\sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i < \infty$. \square

Isto completa a prova do Teorema 1.2.2. \square

Obtemos (1.2.2) do Teorema 1.2.2 de modo semelhante ao que obtemos (1.2.1) do Teorema 1.2.1 na Seção 1.2.1.

Capítulo 2

Passeio aleatório multi-dimensional em meio aleatório rarefeito

2.1 Introdução e resultados

É um fato bem conhecido que o passeio aleatório simples em \mathbb{Z}^d é recorrente para $d \leq 2$ e transitório para $d \geq 3$. Suponhamos que o passeio aleatório simples é perturbado da seguinte maneira. Particionamos \mathbb{Z}^d em dois conjuntos aleatórios: o conjunto dos sítios “ordinários” e o conjunto dos sítios “especiais”, cada sítio x é ordinário com probabilidade $1 - p(x)$ e “especial” com probabilidade $p(x)$. Isto é feito de tal modo que a densidade dos sítios especiais é uma função decrescente da distância da origem. Nos sítios ordinários o processo comporta-se como o passeio aleatório simples, mas nos sítios especiais a regra do comportamento é diferente. Para os processos deste tipo, transitoriedade/recorrência foram estudados nos artigos [15, 16, 17]. Em [16] os sítios especiais são armadilhas (isto é equivalente a sempre mandar a partícula de qualquer sítio especial para a origem). Em [15] há uma ramificação nos sítios especiais, isto é, qualquer partícula que entra num sítio especial gera mais partículas no sítio. Em [17] é estudado o modelo de transição de informação: em cada sítio especial colocamos uma partícula que “dorme”; a partícula começa a se-movimentar somente quando a outra partícula visita o sítio. Neste capítulo continuamos a linha do estudo de [15, 16, 17].

Vamos descrever o modelo. A cada $x \in \mathbb{Z}^d$ associamos $p(x)$, $0 \leq p(x) \leq 1$.

Primeiro, cada sítio de $x \in \mathbb{Z}^d$ é especial (ou “verde”) com probabilidade $p(x)$. Denotamos por G o conjunto de todos sítios especiais. Referimos ao conjunto G como “o meio”. Os outros sítios são chamados “ordinários”. Depois começamos um passeio aleatório ξ_t em \mathbb{Z}^d com as seguintes probabilidades de transição. Dos sítios ordinários a partícula pula para um dos sítios vizinhos mais próximos com probabilidade $1/(2d)$. Quando x é especial, a partícula pula de x para y com probabilidade P_{xy} . Designamos por

$$M(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} (y - x) P_{xy}$$

o vetor de deriva médio de x e por $\text{Proj}M(x)$ a projeção de $M(x)$ para o vetor raio x . Assumimos que P_{xy} são tais que

(A) $\text{Proj}M(x)$ é direcionado para a origem se $d \geq 3$, e para fora da origem se $d \leq 2$;

(B) existe $D > 0$ tal que se $\|x - y\| > D$, então $P_{xy} = 0$.

É importante notar que pode existir muitas escolhas possíveis das probabilidades de transição P_{xy} que satisfazem **(A)** e **(B)**. Além disso, a não ser o caso unidimensional, não há regra “natural” como colocar os valores das probabilidades de transição nos sítios especiais. Logo, daqui para frente, assumimos que, no caso de $d \geq 2$, para os sítios “verdes” as probabilidades de transição são escolhidos de algum modo tal que as Condições **(A)** e **(B)** são cumpridas (o caso $d = 1$ é discutido separadamente). Sublinhamos de novo que a regra das probabilidades de transição nos sítios “verdes” é fixa, no sentido que as probabilidades de transição em x somente dependem do fato se x é “verde” ou não, e não dependem da localização dos outros sítios “verdes” ou das probabilidades de transição neles. Notamos também que os resultados no caso $d \geq 2$ (o Teorema 2.1.1) são válidos para qualquer escolha das probabilidades de transição nos sítios verdes que satisfazem **(A)** e **(B)**.

Acabamos de construir um passeio aleatório no meio aleatório. Estamos interessados na classificação do passeio aleatório do ponto de vista de recorrência e transitoriedade. Note que dizemos que o passeio aleatório é recorrente se ele é recorrente para quase todo meio, e o mesmo para a transitoriedade.

Os nossos resultados principais são os seguintes teoremas.

Teorema 2.1.1. *Se existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo x suficientemente grande*

$$p(x) \geq \frac{1}{\|x\|^{1-\varepsilon}}, \quad (2.1.1)$$

e $\|\text{Proj}M(x)\| \geq a$ para algum $a > 0$, então

(a) se $d = 2$, então o passeio aleatório é transitório;

(b) se $d \geq 3$, então o passeio aleatório é recorrente;

Se existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo x suficientemente grande

$$p(x) \leq \frac{1}{\|x\|^{1+\varepsilon}}, \quad (2.1.2)$$

então

(c) se $d = 2$, então o passeio aleatório é recorrente;

(d) se $d \geq 3$, então o passeio aleatório é transitório.

Em dimensão 1 é possível definir o modelo de modo mais construtivo. Primeiro, suponhamos que temos uma função $P(x)$, $x \in \{-D, \dots, D\}$ e $\sum_{x=-D}^D P(x) = 1$. Denotamos

$$a_+ = \sum_{x=1}^D xP(x),$$

$$a_- = - \sum_{x=-D}^{-1} xP(x),$$

e suponhamos que $a_+ > a_- > 0$. Definimos o passeio aleatório em dimensão um no meio aleatório do modo seguinte:

- para garantir que o sítio 0 seja acessível de todos os outros sítios fixamos os sítios $x \in \{-D, \dots, D\}$ como ordinários;
- se $x \in G$ e $|x| > D$ fixamos

$$P_{xy} = \begin{cases} P(y-x), & \text{se } x > D, \\ P(x-y), & \text{se } x < -D, \end{cases} \quad (2.1.3)$$

Para este modelo unidimensional podemos dar uma classificação mais detalhada.

Teorema 2.1.2. *Seja $\beta_0 = \log \frac{a_+}{a_-}$.*

(i) *Se*

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|p(x) < \beta_0^{-1},$$

então o passeio aleatório é recorrente q.c.;

(ii) *Se*

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} |x|p(x) > \beta_0^{-1},$$

então o passeio aleatório é transitório q.c.

Note que é possível definir o modelo do modo menos construtivo, que é análogo ao que é feito para maiores dimensões, isto é, somente pedindo que a deriva nos sítios verdes seja direcionado fora da origem e separado do zero por alguma constante. Neste caso a constante β_0^{-1} no Teorema 2.1.2 é substituída por duas outras constantes que correspondem aos casos (i) e (ii).

2.2 Provas

2.2.1 Fatos básicos

Aqui vamos formular alguns fatos conhecidos que são úteis nas provas dos Teoremas 2.1.1 e 2.1.2.

Consideramos uma cadeia de Markov homogênea irredutível

$$\mathcal{L} = \{\eta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

com espaço de estados $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. O conjunto X é contável.

Teorema 2.2.1 (O Teorema 2.2.2, [18]). *Vamos supor que existem um conjunto $A \subset X$ e uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$, com as seguintes propriedades:*

- *existe $x \in X \setminus A$ tal que $f(x) < \inf_{y \in A} f(y)$;*
- *para todo $x \notin A$ temos*

$$\mathbf{E}(f(\eta_{t+1}) - f(\eta_t) \mid \eta_t = x) \leq 0.$$

Então a cadeia de Markov \mathcal{L} é transitória.

Teorema 2.2.2 (O Teorema 2.2.1, [18]). *Vamos supor que existem um conjunto finito $A \subset X$ e uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $f \geq 0$, tais que $f(x_j) \rightarrow +\infty$ quando $j \rightarrow \infty$ e para todo $x \notin A$ temos*

$$\mathbf{E}(f(\eta_{t+1}) - f(\eta_t) \mid \eta_t = x) \leq 0.$$

Então a cadeia de Markov \mathcal{L} é recorrente.

O seguinte resultado pode ser encontrado em [20], o Capítulo IV, §3.

Teorema 2.2.3 (Kolmogorov). *Seja*

$$\{b_i\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

uma seqüência estritamente crescente de números positivos tal que $b_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$. Suponhamos que $\{\zeta_i\}_{i=1,2,\dots}$ uma seqüência de variáveis aleatórias independentes com as seguintes propriedades:

- $\mathbf{E}\zeta_i^2 < \infty, i = 1, \dots$
- $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\text{Var } \zeta_i}{b_i^2} < \infty.$

Então

$$\frac{S_n - \mathbf{E}S_n}{b_n} \rightarrow 0 \text{ q.c. quando } n \rightarrow \infty, \text{ onde } S_n = \sum_{i=1}^n \zeta_i.$$

Neste capítulo ξ'_t é um passeio aleatório simples (que começa de 0, a não ser que uma outra coisa é dita). O seguinte resultado pode ser achado em [14] (o Teorema 2.2).

Lema 2.2.1. *Temos*

- *se $d = 2, x \neq 0$ e $n \geq \|x\|^2$, então existe $c_1 > 0$ tal que*

$$\mathbf{P}[\xi'_t = x \text{ para pelo menos um } t = 1, \dots, n] \geq \frac{c_1}{\log \|x\|}; \quad (2.2.1)$$

- *se $d \geq 3, x \neq 0$ e $n \geq \|x\|^2$, então existe $c_2 = c_2(d) > 0$ tal que*

$$\mathbf{P}[\xi'_t = x \text{ for at least one } t = 1, \dots, n] \geq \frac{c_2}{\|x\|^{d-2}}. \quad (2.2.2)$$

Usamos também o seguinte fato (pode ser encontrado, por exemplo, em [19], o Lema 5.1)

Lema 2.2.2. *Se $d \geq 2$, então quando $x \rightarrow \infty$ temos*

$$\mathbf{E}(\|\xi'_k\| - \|\xi'_{k-1}\| \mid \xi'_{k-1} = x) = \frac{d-1}{2d} \frac{1}{\|x\|} + O(\|x\|^{-3}) \quad (2.2.3)$$

e

$$\mathbf{E}((\|\xi'_k\| - \|\xi'_{k-1}\|)^2 \mid \xi'_{k-1} = x) = \frac{1}{d} + O(\|x\|^{-2}). \quad (2.2.4)$$

Precisamos também do seguinte fato elementar sobre o passeio aleatório simples:

Lema 2.2.3. *Seja ξ'_n um passeio aleatório simples na dimensão 2. Seja $S(r) = \{x \in \mathbb{Z}^2 : r \leq \|x\| < r+1\}$. Então existe $c_3 > 0$ tal que dados $r_1, r_2 > 0$ tais que $r_1 + 1 < r_2$ e x tal que $r_1 + 1 \leq \|x\| < r_2$, segue que*

$$\begin{aligned} p &:= \mathbf{P}[\xi'_n \text{ atinge } S(r_2) \text{ antes de atingir } S(r_1) \mid \xi'_0 = x] \\ &\geq c_3 \frac{\log^2 \|x\| - \log^2 r_1}{\log^2 r_2 - \log^2 r_1}. \end{aligned}$$

Prova. É fácil provar que existe K tal que $\log^2(\|\xi'_n\| + K)$ é um submartingal, isto é,

$$\mathbf{E}(\log^2(\|\xi'_{n+1}\| + K) - \log^2(\|\xi'_n\| + K) \mid \xi'_n = y) \geq 0$$

para todo $y \in \mathbb{Z}^2$. Logo,

$$p \log^2(r_2 + 1 + K) + (1-p) \log^2(r_1 + K) \geq \log^2(\|x\| + K)$$

e, portanto,

$$p \geq \frac{\log^2(\|x\| + K) - \log^2(r_1 + K)}{\log^2(r_2 + 1 + K) - \log^2(r_1 + K)} \geq c_3 \frac{\log^2 \|x\| - \log^2 r_1}{\log^2 r_2 - \log^2 r_1}$$

para algum $c_3 > 0$. □

2.2.2 Alguns lemas auxiliares

Nesta Seção formulamos e provamos alguns resultados auxiliares que são ligados à construção do conjunto aleatório G .

Os dois seguintes resultados seguem do lema.

Lema 2.2.4. *Se $d \geq 2$ e para algum $\varepsilon > 0$ e para todo x suficientemente grande temos*

$$p(x) \geq \frac{1}{\|x\|^{1-\varepsilon}},$$

então existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que q.c. para todo $y \in \mathbb{Z}^d$ suficientemente grande existe $z \in G$ tal que $\|y - z\| < \|y\|^{1/d-\varepsilon_1}$.

Lema 2.2.5. *Se $d \geq 2$ e para algum $\varepsilon > 0$, temos $p(x) \leq \frac{1}{\|x\|^{1+\varepsilon}}$ para todo x suficientemente grande, então existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que para todo x suficientemente grande a bola com o centro em x e o raio $\|x\|^{\varepsilon_2}$ contem no máximo $d-1$ sítios verdes q.c.*

O seguinte fato também vamos usar:

Lema 2.2.6. *Seja $d \geq 3$. Fixamos r sítios em $\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$, onde $r \leq 2d - 1$. Seja \tilde{p} a probabilidade que o passeio aleatório simples (começando de 0) nunca atinge nenhum destes sítios. Então, existe um número positivo $c_4 = c_4(d) < 1$ tal que $1 - \tilde{p} < c_4$ e c_4 não depende das posições destes r sítios.*

Prova. Sejam y_1, \dots, y_r os sítios escolhidos. Para $A \subset \mathbb{Z}^d$ seja

$$q(x, A) = \mathbf{P}[\xi'_t \text{ começando de } x \text{ atinge } A].$$

Provamos este lema por indução sobre r .

Se $r = 1$, é fácil provar que existe h_0 tal que se $\|x - y\| > h_0$, então

$$\mathbf{P}[\xi'_t \text{ começando de } x \text{ atinge } y] < \frac{1}{2}.$$

Como

$$p' = \sup_{y: \|x-y\| \leq h_0} q(x, \{y\}) < 1,$$

segue que $1 - \tilde{p} \leq \max\{p', \frac{1}{2}\}$.

Suponhamos que o lema é provado para $r < 2d - 1$ e vamos provar o lema para $r + 1$. Seja c_r a probabilidade mínima que o passeio aleatório

simples começando de x em algum momento atinge $\{y_1, \dots, y_r\}$. Por hipótese indutiva, $c_r > 0$. Agora escolhemos y_{r+1} . Note que existe h_r tal que se $\|x - y_{r+1}\| > h_r$, então

$$\mathbf{P}[\xi'_t \text{ começando de } x \text{ atinge } \{y_1, \dots, y_{r+1}\}] < 1 - \frac{c_r}{2}.$$

Como o número dos conjuntos diferentes $\{y_1, \dots, y_r\}$ na bola com o centro em x e o raio h_r é finito, e $r < 2d$, e então $\tilde{p} \geq \min\{1 - p', \frac{c_r}{2}\}$, segue que

$$p' = \sup_{\substack{y_1, \dots, y_r: \\ \|x - y_i\| \leq h_r}} q(x, \{y_1, \dots, y_r\}) < 1.$$

O Lema 2.2.6 é provado. \square

Lema 2.2.7. (i) *Suponhamos que $d \geq 3$, e existe $\varepsilon > 0$ tal que $p(x) \leq \frac{1}{\|x\|^{1+\varepsilon}}$ para todo x suficientemente grande. Além disso, tomamos qualquer $\varepsilon_3 < \frac{2}{d}\varepsilon$ e sejam $m := \|x\|^{1+\varepsilon_3}$, $U = \{y \in \mathbb{Z}^d : \|y - x\| \leq \|x\|^{\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon_3}{2} + \varepsilon_4}\}$ para qualquer $\varepsilon_4 > 0$. Então*

(i1) *existem $c_5, c_6 > 0$ tais que para todo x suficientemente grande*

$$\mathbf{P}[\xi_n \in U \text{ para todo } n \leq m \mid \xi_0 = x] \geq 1 - e^{-c_5 \|x\|^{c_6}};$$

(i2) *existe $c_7 > 0$ tal que para todo x suficientemente grande*

$$\sum_{k=1}^m \mathbf{P}[\xi_k \in G \mid \xi_0 = x] \leq c_7.$$

(ii) *Suponhamos que $d = 2$, e existe $\varepsilon > 0$ tal que $p(x) \leq \frac{1}{\|x\|^{1+\varepsilon}}$ para todo x suficientemente grande. Além disso, tomamos qualquer $\varepsilon_3 < \varepsilon$ e sejam $m := \|x\|^{1+\varepsilon_3}$, $U = \{y \in \mathbb{Z}^d : \|y - x\| \leq \|x\|^{\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon_3}{2} + \varepsilon_4}\}$ para qualquer $\varepsilon_4 > 0$. Então*

(ii1) *existem $c_8, c_9 > 0$ tais que para todo x suficientemente grande*

$$\mathbf{P}[\xi_n \in U \text{ para todo } n \leq m \mid \xi_0 = x] \geq 1 - e^{-c_8 \|x\|^{c_9}};$$

(ii2) *existe $c_{10} > 0$ tal que para todo x suficientemente grande*

$$\sum_{k=1}^m \mathbf{P}[\xi_k \in G \mid \xi_0 = x] \leq c_{10} \log^2 \|x\|.$$

Prova. (i) Seja $G' = G \cap U$. Definimos as variáveis aleatórias τ_i e σ_i por:

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \sigma_0 = 0, \\ \tau_i &= \min\{n > \sigma_{i-1} : \xi_n \in G'\}, \\ \sigma_i &= \min\{n > \tau_i : \xi_n \notin G'\},\end{aligned}$$

$i = 1, 2, \dots$, e definimos a variável aleatória N por $N = \max\{n : \tau_n \leq m\}$. Consideramos os seguintes eventos:

$$\begin{aligned}A &= \{\xi_n \in U \text{ para todo } n \leq m\}, \\ C_n &= \{\tau_{n+1} - \tau_n > m\}, \\ D_n &= \left\{ \sup_{i \in [0, (\tau_{n+1} - \tau_n) \wedge m]} \|\xi_{\sigma_n+i} - \xi_{\sigma_n}\| \leq \|x\|^{\frac{1+\varepsilon_3}{2} + \frac{\varepsilon_4}{3}} \right\} \\ H &= \{N \leq \|x\|^{\frac{\varepsilon_4}{3}}\}.\end{aligned}$$

Temos

$$\mathbf{P}[A] \geq \mathbb{P}\left[H \cap \left(\bigcap_{i=1}^{\|x\|^{\frac{\varepsilon_4}{3}}} D_n\right)\right] \geq \mathbf{P}[H] - \sum_{i=1}^{\|x\|^{\frac{\varepsilon_4}{3}}} \mathbf{P}[\overline{D}_n]. \quad (2.2.5)$$

Note que, pelo acoplamento com o passeio aleatório simples,

$$\sum_{i=1}^{\|x\|^{\frac{\varepsilon_4}{3}}} \mathbf{P}[\overline{D}_n] \leq e^{-c_{11}\|x\|^{\varepsilon_5}} \quad (2.2.6)$$

para algum $c_{11}, \varepsilon_5 > 0$. Podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[\overline{H}] &\leq \mathbb{P}[\overline{C}_1 \dots \overline{C}_{\|x\|^{\frac{\varepsilon_4}{3}}}] \\ &= \mathbf{P}[\overline{C}_1] \mathbf{P}[\overline{C}_2 \mid \overline{C}_1] \dots \mathbf{P}[\overline{C}_{\|x\|^{\frac{\varepsilon_4}{3}}} \mid \overline{C}_1 \overline{C}_2 \dots \overline{C}_{\|x\|^{\frac{\varepsilon_4}{3}}-1}]\end{aligned} \quad (2.2.7)$$

e

$$\mathbf{P}[\overline{C}_i \mid \overline{C}_1 \dots \overline{C}_{i-1}] \leq \mathbf{P}[\overline{C}_i \mid \overline{C}_1 \dots \overline{C}_{i-1}, D_1 \dots D_{i-1}] + \mathbf{P}[\overline{D}_1 \dots \overline{D}_{i-1}]. \quad (2.2.8)$$

$\mathbf{P}[\overline{D}_1 \dots \overline{D}_{i-1}]$ pode ser estimado, usando (2.2.6), logo precisamos somente provar que $\mathbf{P}[\overline{C}_i \mid \overline{C}_1 \dots \overline{C}_{i-1}, D_1 \dots D_{i-1}] \leq c_{12}$ para algum $c_{12} < 1$.

Seja $B_k = \{\xi_{\tau_i+k} \in G'\}$. Sem perda de generalidade, podemos escolher ε_4 tal que $2\varepsilon_4 < \frac{2}{d}\varepsilon - \varepsilon_3$.

Consideramos uma partição de \mathbb{Z}^d pelos cubos

$$K_{i_1 \dots i_d} = \{z = (z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{Z}^d : \quad (2.2.9)$$

$$(i_k - 1)\|x\|^{\frac{1}{d} + \varepsilon_6} \leq z_k < i_k\|x\|^{\frac{1}{d} + \varepsilon_6}, \quad k = 1, \dots, d\}$$

onde ε_6 é tal que

$$\frac{\varepsilon_3}{2} + \varepsilon_4 < \varepsilon_6 < \frac{\varepsilon}{d}. \quad (2.2.10)$$

Consideramos os cubos $K_{i_1 \dots i_d}$ que têm uma intersecção não vazia com a bola U . O número ℓ deles é de ordem $\|x\|^{\frac{d}{2} - d(\varepsilon_6 - \frac{\varepsilon_3}{2} - \varepsilon_4)}$. Designamos estes cubos por K_1, \dots, K_ℓ . Para $z \in \mathbb{Z}^d$ e $W \subset \mathbb{Z}^d$, denotamos também

$$M_W(z) = \mathbf{E}(\#t \geq 0 : \xi_t \in W \mid \xi_0 = z) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{1}\{\xi_i \in W \mid \xi_0 = z\},$$

$$P_W(z) = \mathbf{P}[\text{existe } t > 0 : \xi_t \in W \mid \xi_0 = z],$$

$$P'_W(z) = \mathbf{P}[\text{existe } t > 0 : \xi'_t \in W \mid \xi'_0 = z],$$

(lembramos que ξ'_t é um passeio aleatório simples em \mathbb{Z}^d).

Temos

$$\sum_{k=1}^m \mathbf{P}[B_k \mid \xi_0 = x] = \mathbf{E} \sum_{k=1}^m \mathbf{1}_{\{\xi_{\tau_i+k} \in G' \mid \xi_0 = x\}} = M_{G'}(x).$$

Para provar que existe $c_7 > 0$ tal que $M_{G'}(x) \leq c_7$ para todo x suficientemente grande, é suficiente provar que existe $c_{13} < 1$ tal que para todo $z \in G'$ temos $P_{G'}(z) < c_{13}$ se x é suficientemente grande (lembramos que G' depende de x). Para isso é suficiente provar que existe c_{13} tal que para todo z_0 tal que existe um sítio $z \in G'$, $\|z - z_0\| < D$, temos

$$P'_{G'}(z_0) < c_{13}. \quad (2.2.11)$$

Note que o lema de Borel-Cantelli implica que existe $b \in \mathbb{N}$ tal que para todo x suficientemente grande cada um dos cubos K_1, \dots, K_ℓ contem no máximo b sítios verdes.

Agora, vamos provar (2.2.11). Suponhamos que z_0 pertence ao mesmo cubo que x . Para todos os outros sítios a prova é análoga. Sem perda de generalidade, podemos considerar o sítio x no cubo K_1 . Designamos por V a bola com o centro em z_0 e o raio $\|x\|^{\varepsilon_2}$.

O Lema 2.2.5 implica que o número dos sítios verdes dentro de V é não maior que $d - 1 < 2d - 1$, logo, usando o Lema 2.2.6, obtemos que com probabilidade pelo menos $1 - c_4$ o passeio aleatório nunca atinge nenhum sítio verde em V . Vamos denotar $G'_1 = G' \cap (K_1 \setminus V)$, e $G'_i = G' \cap K_i$ para $i = 2, \dots, \ell$. Temos

$$P'_{G'}(z_0) < c_4 + P'_{G'_1}(z_0) + \sum_{i=2}^{\ell} P'_{G'_i}(z_0). \quad (2.2.12)$$

É claro que

$$P'_{G'_1}(z_0) \leq bc_{14} \|x\|^{-\varepsilon_2(d-2)}, \quad (2.2.13)$$

e

$$\sum_{i=2}^{\ell} P'_{G'_i}(z_0) \leq \sum_{i=2}^{\ell} \frac{bc_{14}}{\rho(z_0, K_i)^{d-2}}, \quad (2.2.14)$$

onde $\rho(z_0, K_i)$ é a distância de z_0 até K_i . Um argumento geométrico elementar implica que

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{\ell} \frac{1}{\rho(z_0, K_i)^{d-2}} &\simeq \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\|x\|^{1/2d-\varepsilon_7} j^{d-1}}{(j\|x\|^{(1/d+\varepsilon_6)})^{(d-2)}} \\ &= \frac{1}{\|x\|^{(1/d+\varepsilon_6)(d-2)}} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{\|x\|^{1/2d-\varepsilon_7} j}{j} \\ &\simeq \frac{\|x\|^{(1/2d-\varepsilon_7)2}}{\|x\|^{(1/d+\varepsilon_6)(d-2)}} \leq \|x\|^{-1+3/d-2\varepsilon_7-\varepsilon_6(d-2)}, \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

onde $\varepsilon_7 = \varepsilon_6 - \varepsilon_3/2 - \varepsilon_4$. Combinando (2.2.12), (2.2.13), (2.2.14), e (2.2.15) obtemos

$$P'_{G'}(z_0) < c_4 + bc_{14} \|x\|^{-\varepsilon_2} + bc_{14} \|x\|^{-1+3/d-2\varepsilon_7-\varepsilon_6(d-2)} < c_{13}$$

para algum $c_{13} < 1$ e todo x suficientemente grande, logo (2.2.11) é provado. Então obtemos

$$\sum_{k=1}^m \mathbf{P}[\xi_k \in G' \mid \xi_0 = x] = \sum_{k=1}^m \mathbb{P}(B_k \mid \xi_0 = x) < c_7. \quad (2.2.16)$$

Também temos

$$\mathbf{P}[\overline{C}_i \mid \overline{C}_1 \dots \overline{C}_{i-1}, D_1 \dots D_{i-1}] \leq \sup_{z \in G'} P'_{G'}(z) \leq c_{12} < 1,$$

e $\mathbf{P}[\overline{D_1 \dots D_{i-1}}]$ é exponencialmente pequeno. Logo, de (2.2.5)–(2.2.8) obtemos que existem $c_5, c_6 > 0$ tais que para todo x suficientemente grande

$$\mathbf{P}[\xi_n \in U \text{ for all } n \leq m \mid \xi_0 = x] = \mathbb{P}[A] \geq 1 - e^{-c_5 \|x\|^{c_6}}$$

Isto termina a prova de (i1). É fácil ver que (2.2.16) e (i1) implicam (i2).

(ii1) O lema de Borel-Cantelli implica que existe K tal que para todo x suficientemente grande segue que U contem no máximo K sítios verdes. Para cada sítio verde em U consideramos uma bola com o centro no sítio e com o raio $\frac{1}{3(K+1)} \|x\|^{\frac{1+\varepsilon_3}{2} + \varepsilon_4}$ e seja Γ o conjunto coberto por estas bolas. Note que, como temos no máximo K sítios verdes em U , segue que a seguinte situação é impossível: em Γ existe um contorno em torno de x conectado à fronteira de U . Logo, podemos desenhar um contorno γ em torno de x tal que a distância de γ até x , até qualquer sítio verde e até a fronteira de U é pelo menos $\frac{1}{3(K+1)} \|x\|^{\frac{1+\varepsilon_3}{2} + \varepsilon_4}$. Então, os dois casos são possível: ou ξ_k está dentro de γ para $k = 1, \dots, m$ e logo $\xi_k \in U$ para $k = 1, \dots, m$ ou ξ_k atinge γ para algum k . Note que se ξ_k atinge γ , então

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}[\xi_n \notin U \text{ para algum } n \leq m] \\ & \leq \mathbf{P}\left[\|\xi'_n\| \geq \frac{1}{3(K+1)} \|x\|^{\frac{1+\varepsilon_3}{2} + \varepsilon_4} \mid \xi'_0 = 0\right] \leq e^{-c_8 \|x\|^{c_9}} \end{aligned}$$

para algum $c_8, c_9 > 0$.

(ii2) É suficiente provar que dado $y \in U$ temos

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}[\xi_n \in G \text{ para algum } n \leq m \mid \xi_0 = y] & (2.2.17) \\ & = \mathbf{P}[\xi'_n \in G \text{ para algum } n \leq m \mid \xi'_0 = y] \\ & \leq 1 - \frac{c_{15}}{\log^2 m} \end{aligned}$$

para algum $c_{15} > 0$. Provamos (2.2.17) por indução sobre o número ℓ dos sítios verdes em U .

Se $\ell = 1$, então, pelo Lema 2.2.3, dado y com probabilidade pelo menos $\frac{c_{16}}{\log^2 m}$ o passeio aleatório simples começando de y atinge a fronteira de U antes de atingir o sítio verde.

Suponhamos que (2.2.17) é provado para ℓ e vamos provar para $\ell + 1$. Sejam $z_1, \dots, z_{\ell+1}$ os sítios verdes em U . Seja D o diâmetro do conjunto $z_1, \dots, z_{\ell+1}$. Note que, pelo Lema 2.2.5, $D \geq \|x\|^{\varepsilon_2}$, logo $\log^2 D \sim \log^2 m$. Consideramos as bolas com os centros nos sítios verdes com o raio $D/3(\ell+1)$. É claro que existe um contorno $\gamma \subset U$ em torno de y tal que pelo menos uma das bolas é fora de γ , dizemos que a com o centro em $z_{\ell+1}$, e o diâmetro de γ é no máximo D . Por hipótese indutiva, com probabilidade pelo menos $\frac{c_\ell}{\log^2 m}$ o passeio aleatório ξ_n começando de y atinge γ sem atingir qualquer sítio verde dentro de γ . Seja $W^{(D)}$ a bola com o diâmetro D que contem γ e denotamos $W^{(\frac{3D}{2})} = \frac{3}{2}W^{(D)}$. Consideramos também a bola V com o centro em $z_{\ell+1}$ com o raio $2D$. Note que $W^{(\frac{3D}{2})} \subset V$. Logo, pelo Lema 2.2.3, como a distância entre γ e $z_{\ell+1}$ é pelo menos $D/3(\ell+1)$, segue que o passeio aleatório começando de qualquer sítio em γ , com probabilidade pelo menos $1 - \frac{c_{17}}{\log^2 m}$ atinge a fronteira de V antes de atingir $z_{\ell+1}$.

Portanto, com probabilidade pelo menos $1 - \frac{c_\ell c_{17}(\ell+1)}{\log^2 m}$, o passeio aleatório atinge $W^{(\frac{3D}{2})}$ sem atingir $\{z_1, \dots, z_{\ell+1}\}$. Logo, pelo Lema 2.2.3, da fronteira de $W^{(\frac{3D}{2})}$, com probabilidade pelo menos c_{18} , para alguma constante $c_{18} > 0$, o passeio aleatório atinge a fronteira de U antes de atingir $W^{(D)}$ (e, logo, sem atingir sítios verdes). Como a fronteira de U fica mais longe que m da fronteira de $W^{(D)}$, segue que (2.2.17) é cumprido. \square

2.2.3 Prova do Teorema 2.1.1

Prova da parte (a)

Vamos provar a transitoriedade, usando o Teorema 2.2.1 com a função $f(x) = (\|x\| + 1)^{-1}$.

Definimos uma seqüência de tempos de parada τ_n por

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \left[\|\xi_{\tau_n}\|^{1-\varepsilon_8} \right] + 1,$$

onde $[\cdot]$ denota a parte inteira, e $\tau_0 = 1$.

Para aplicar o Teorema 2.2.1, é necessário achar uma cota inferior para

$$\mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\| \mid \xi_{\tau_n} = x)$$

e uma cota superior para

$$\mathbf{E}((\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\|)^2 \mid \xi_{\tau_n} = x). \quad (2.2.18)$$

Por (2.2.3), segue que

$$\mathbf{E}(\|\xi_{\tau_n+k}\| - \|\xi_{\tau_n+k-1}\| \mid \xi_{\tau_n+k-1} = x, x \notin G) = \frac{1}{4\|x\|} + O(\|x\|^{-3}), \quad (2.2.19)$$

e, de (A) e o fato que $\|\text{Proj}M(x)\| \geq a$ é fácil ver que

$$\mathbf{E}(\|\xi_{\tau_n+k}\| - \|\xi_{\tau_n+k-1}\| \mid \xi_{\tau_n+k-1} = x, x \in G) \geq a + O(\|x\|^{-1}). \quad (2.2.20)$$

Seja $m := \tau_{n+1} - \tau_n$. Como $m \simeq \|x\|^{1-\varepsilon_8}$, segue de (2.2.19) e (2.2.20) que

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\| \mid \xi_{\tau_n} = x) \\ &= \sum_{k=1}^m \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_n+k}\| - \|\xi_{\tau_n+k-1}\| \mid \xi_{\tau_n} = x) \\ &= \sum_{k=1}^m \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_n+k}\| - \|\xi_{\tau_n+k-1}\| \mid \xi_{\tau_n} = x, \xi_{\tau_n+k-1} \in G) \mathbf{P}[B_k] \\ & \quad + \sum_{k=1}^m \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_n+k}\| - \|\xi_{\tau_n+k-1}\| \mid \xi_{\tau_n} = x, \xi_{\tau_n+k-1} \notin G) \mathbf{P}[\overline{B_k}] \\ &\geq \sum_{k=1}^m (a + O(\|x\|^{-1})) \mathbf{P}[B_k] + \sum_{k=1}^m \left(\frac{1}{4\|x\|} + O(\|x\|^{-3}) \right) \mathbf{P}[\overline{B_k}] \\ &= \sum_{k=1}^m a \mathbf{P}[B_k] + O(\|x\|^{-\varepsilon_8}), \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

onde

$$B_k = \{\xi_{\tau_n+k-1} \in G\}, k = 1, \dots, m.$$

Então precisamos estimar $\sum_{k=1}^m \mathbf{P}[B_k]$ para mostrar que $\sum_{k=1}^m a \mathbf{P}[B_k]$ é o termo principal de (2.2.21).

Fixamos algum $\delta > 0$ e denotamos

$$\ell_i(\delta) = \frac{1}{2} \|x\|^{1-\varepsilon_8} + i \|x\|^{(1-\delta)(1-\varepsilon_8)}, \quad i = 0, \dots, m.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\|x\|^{1-\varepsilon_8}} \mathbf{P}[B_k] &\geq \sum_{k=\frac{1}{2}\|x\|^{1-\varepsilon_8}}^{\|x\|^{1-\varepsilon_8}} \mathbf{P}[B_k] \\
&= \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}\|x\|^{1-\varepsilon_8}} \sum_{k=\ell_{i-1}(\delta)}^{\ell_i(\delta)} \mathbf{P}[B_k] \\
&\geq \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}\|x\|^{1-\varepsilon_8}} \mathbf{P}\left[\bigcup_{k=\ell_{i-1}(\delta)}^{\ell_i(\delta)} B_k\right]. \tag{2.2.22}
\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.2.4, dado y tal que $\|y - x\| \leq \|x\|^{1-\varepsilon_8}$ existe $z \in G$ tal que $\|y - z\| < \|x\|^{1/2-\varepsilon_1}$. Seja δ tal que $\|y - z\| < \|x\|^{(1-\delta)(1-\varepsilon_8)}$. Então pelo Lema 2.2.1, como $m = \|x\|^{1-\varepsilon_8}$, segue que dado x suficientemente grande existem $c_{19}, c_{20} > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}\left[\bigcup_{k=\ell_{i-1}(\delta)}^{\ell_i(\delta)} B_k\right] \\
&\geq \mathbf{P}[\xi'_k = z - \xi_{\tau_n + \ell_{i-1}(\delta)} \text{ para pelo menos um } k = 1, \dots, \|x\|^{(1-\delta)(1-\varepsilon_8)}] \\
&\geq \frac{c_{19}}{\log \|z - \xi_{\tau_n + \ell_{i-1}(\delta)}\|} \\
&\geq \frac{c_{20}}{\log \|x\|}. \tag{2.2.23}
\end{aligned}$$

Logo, por (2.2.22) e (2.2.23),

$$\sum_{k=1}^m \mathbf{P}[B_k] \geq \frac{c_{20}\|x\|^{\delta(1-\varepsilon_8)}}{\log \|x\|}. \tag{2.2.24}$$

Agora consideramos a quantidade (2.2.18). Note que para quaisquer duas variáveis aleatórias X_0 e X_1 temos

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}(X_1^2 - X_0^2 \mid X_0 = y_0) \\
&= \mathbf{E}((X_1 - X_0)^2 \mid X_0 = y_0) + 2y_0\mathbf{E}(X_1 - X_0 \mid X_0 = y_0). \tag{2.2.25}
\end{aligned}$$

Usando (2.2.25), segue que

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}((\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\|)^2 \mid \xi_{\tau_n} = x) \\
&= \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+1}}\|^2 - \|\xi_{\tau_n}\|^2 \mid \xi_{\tau_n} = x) - 2\|x\| \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\| \mid \xi_{\tau_n} = x) \\
&= \sum_{k=1}^m \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+k}}\|^2 - \|\xi_{\tau_{n+k-1}}\|^2 \mid \xi_{\tau_n} = x) \\
&\quad - 2\|x\| \sum_{k=1}^m \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+k}}\| - \|\xi_{\tau_{n+k-1}}\| \mid \xi_{\tau_n} = x) \\
&= \sum_{k=1}^m \mathbf{E}((\|\xi_{\tau_{n+k}}\| - \|\xi_{\tau_{n+k-1}}\|)(\|\xi_{\tau_{n+k}}\| + \|\xi_{\tau_{n+k-1}}\|) \mid \xi_{\tau_n} = x) \\
&\quad - 2\|x\| \sum_{k=1}^m \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+k}}\| - \|\xi_{\tau_{n+k-1}}\| \mid \xi_{\tau_n} = x) \tag{2.2.26}
\end{aligned}$$

$$\leq 2(\|x\| + O(\|x\|^{1-\varepsilon_8})) \sum_{k=1}^m \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+k}}\| - \|\xi_{\tau_{n+k-1}}\| \mid \xi_{\tau_n} = x) \tag{2.2.27}$$

$$-2\|x\| \sum_{k=1}^m \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+k}}\| - \|\xi_{\tau_{n+k-1}}\| \mid \xi_{\tau_n} = x) \tag{2.2.28}$$

$$\leq c_{21}\|x\|^{1-\varepsilon_8} \sum_{k=1}^m \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+k}}\| - \|\xi_{\tau_{n+k-1}}\| \mid \xi_{\tau_n} = x)$$

$$\leq c_{22}\|x\|^{1-\varepsilon_8} \sum_{k=1}^m \mathbf{P}[B_k]$$

para algum $c_{22} > 0$ (aqui usamos o fato que

$$-2\|x\|^{1-\varepsilon_8} \leq \|\xi_{\tau_{n+k}}\| + \|\xi_{\tau_{n+k-1}}\| - 2\|x\| \leq 2\|x\|^{1-\varepsilon_8}$$

e que os pulos são limitados).

Agora, usando o fato que dado $c_{23} > -1$ existe c_{24} tal que

$$(1 + \Delta)^{-1} - 1 \leq -\Delta + c_{24}\Delta^2$$

em $\{\Delta > c_{23}\}$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}((\|\xi_{\tau_{n+1}}\| + 1)^{-1} - (\|\xi_{\tau_n}\| + 1)^{-1} \mid \xi_{\tau_n} = x) \\
& \leq \|x\|^{-1} \left(-\frac{1}{\|x\|} \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\| \mid \xi_{\tau_n} = x) \right. \\
& \quad \left. + \frac{c_{24}}{2\|x\|^2} \mathbf{E}((\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\|)^2 \mid \xi_{\tau_n} = x) \right) \\
& \leq \|x\|^{-1} \left(-\frac{a}{\|x\|} \left(\sum_{k=1}^m \mathbf{P}[B_k] + O(\|x\|^{-\varepsilon_8}) \right) \right. \\
& \quad \left. + \frac{c_{24}}{2\|x\|^2} c_{21} \|x\|^{1-\varepsilon_8} \sum_{k=1}^m \mathbf{P}[B_k] \right) < 0
\end{aligned} \tag{2.2.29}$$

para todo x suficientemente grande. Pelo Teorema 2.2.1 com $f(x) = (\|x\| + 1)^{-1}$ obtemos que a cadeia de Markov $\hat{\xi}_n = \xi_{\tau_n}$ é transitória na dimensão 2. Como $\tau_{n+1} - \tau_n = \|\xi_{\tau_n}\|^{1-\varepsilon_8} + 1$, segue que se $\xi_{\tau_n} \neq 0$, então $\xi_k \neq 0$ para todo $\tau_n < k < \tau_{n+1}$, e logo a cadeia de Markov ξ_n é transitória.

Prova da parte (b)

Agora usamos o Teorema 2.2.2 com a função $f(x) = \|x\|^2$.

De modo análogo ao da prova de (a), definimos

$$\tau_{n+1} = \tau_n + \left\lceil \|\xi_{\tau_n}\|^{2/d} \right\rceil + 1,$$

$\tau_0 = 1$ e $m := \tau_{n+1} - \tau_n$. Analogamente a (2.2.20), é fácil obter que na dimensão $d \geq 3$

$$\mathbf{E}(\|\xi_{\tau_n+k}\| - \|\xi_{\tau_n+k-1}\| \mid \xi_{\tau_n+k-1} = x, x \in G) \leq -a + O(\|x\|^{-1}). \tag{2.2.30}$$

Pela Condição **(B)** da definição do modelo, existe $M_0 > 0$ tal que

$$\mathbf{E}((\|\xi_{\tau_n+k}\| - \|\xi_{\tau_n+k-1}\|)^2 \mid \xi_{\tau_n+k-1} = x, x \in G) \leq M_0. \tag{2.2.31}$$

De (2.2.25), (2.2.30), e (2.2.31), segue que

$$\mathbf{E}(\|\xi_{\tau_n+k}\|^2 - \|\xi_{\tau_n+k-1}\|^2 \mid \xi_{\tau_n+k-1} = x, x \in G) \leq M_0 - 2a\|x\| + O(1). \tag{2.2.32}$$

Logo, de (2.2.32)

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_n+k}\|^2 - \|\xi_{\tau_n+k-1}\|^2 \mid \xi_{\tau_n+k-1}) \\
& \leq \mathbf{P}[\overline{B}_k] + (M_0 - 2a\|\xi_{\tau_n+k-1}\| + O(1))\mathbf{P}[B_k],
\end{aligned} \tag{2.2.33}$$

onde, como antes, $B_k = \{\xi_{\tau_n+k-1} \in G\}$. Pela Condição **(B)**, se $\xi_{\tau_n} = x$, então para todo $k = 1, \dots, m$ temos $\|\xi_{\tau_n+k-1}\| \geq \|x\| - \|x\|^{2/d}D$, portanto, existe uma constante $c_{25} > 0$ tal que para todo x suficientemente grande

$$\mathbf{E}(\|\xi_{\tau_n+k}\|^2 - \|\xi_{\tau_n+k-1}\|^2 \mid \xi_{\tau_n+k-1} = x) \leq (M_0 + 1) - c_{25}\|x\|\mathbf{P}[B_k].$$

Usando (2.2.2), analogamente a (2.2.24) obtemos que para algum $c_{26} > 0$

$$\sum_{k=1}^m \mathbf{P}[B_k] \geq \frac{c_{26}}{\|x\|^{(d-2)(1/d-\varepsilon_1)}}. \quad (2.2.34)$$

Como $m \simeq \|x\|^{2/d}$, segue para algum $c_{27} > 0$ que

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+1}}\|^2 - \|\xi_{\tau_n}\|^2 \mid \xi_{\tau_n} = x) \\ &= \sum_{k=1}^m \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_n+k}\|^2 - \|\xi_{\tau_n+k-1}\|^2 \mid \xi_{\tau_n} = x) \\ &\leq (M_0 + 1)\|x\|^{2/d} - c_{25}\|x\| \sum_{k=1}^m \mathbf{P}[B_k] \\ &\leq (M_0 + 1)\|x\|^{2/d} - \|x\| \frac{c_{27}}{\|x\|^{(d-2)(1/d-\varepsilon_1)}} \\ &= (M_0 + 1)\|x\|^{2/d} - c_{27}\|x\|^{2/d+(d-2)\varepsilon_1} < 0 \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

para todo x suficientemente grande. Pelo Teorema 2.2.2 com $f(x) = \|x\|^2$, obtemos que o processo ξ_n é recorrente, portanto (b) é provado.

Prova da parte (d)

Para provar (d), vamos usar o Teorema 2.2.1 com a função $f(x) = (\|x\| + 1)^{-\frac{1}{2}}$.

Note que, como os pulos são limitados, existe $a > 0$ tal que $\|\text{Proj}M(x)\| \leq a$ para todo $x \in G$. Seja $\varepsilon_3 < \frac{2\varepsilon}{d}$ e definimos a sequência de tempos de parada

$$\tau_{n+1} = \tau_n + [\|\xi_{\tau_n}\|^{1+\varepsilon_3}] + 1,$$

$\tau_0 = 0$. Como antes, sejam $m = \tau_{n+1} - \tau_n$ e $B_k = \{\xi_{\tau_n+k-1} \in G\}$.

Fixamos $0 < \varepsilon_9 < 1/2$ e seja

$$H = \{\|\xi_{\tau_n+i} - \xi_{\tau_n}\| \leq m^{\frac{1}{2}+\varepsilon_9} \text{ para } i = 1, \dots, m\}.$$

Note que pelo Lema 2.2.7

$$\mathbf{P}[H] \geq 1 - e^{-c_5 \|x\|^{c_6}}. \quad (2.2.36)$$

Analogamente a (2.2.30) (notamos que a desigualdade é agora na outra direção), usando (2.2.3) e (2.2.36), obtemos

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_n+k}\| - \|\xi_{\tau_n+k-1}\| \mathbf{1}_H \mid \xi_{\tau_n+k-1}) \\ & \geq \left(\frac{d-1}{2d} \frac{1}{\|\xi_{\tau_n+k-1}\|} + O(\|\xi_{\tau_n+k-1}\|^{-3}) \right) \mathbf{P}(\overline{B_k}) \\ & \quad - (a + O(\|\xi_{\tau_n+k-1}\|^{-1})) \mathbf{P}(B_k) - \mathbf{P}[\overline{H}] \\ & = \left(\frac{d-1}{2d} \frac{1}{\|\xi_{\tau_n+k-1}\|} - \left(a + \frac{d-1}{2d} \frac{1}{\|\xi_{\tau_n+k-1}\|} \right) \right) \mathbf{P}(B_k) \\ & \quad + o(\|\xi_{\tau_n+k-1}\|^{-1}) - e^{-c_5 \|x\|^{c_6}}. \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.2.7, se $\xi_{\tau_n} = x$, temos

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_n+k}\| - \|\xi_{\tau_n+k-1}\| \mid \xi_{\tau_n+k-1}) \quad (2.2.37) \\ & = \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_n+k}\| - \|\xi_{\tau_n+k-1}\| \mathbf{1}_H \mid \xi_{\tau_n+k-1}) \\ & \quad + \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_n+k}\| - \|\xi_{\tau_n+k-1}\| \mathbf{1}_{\overline{H}} \mid \xi_{\tau_n+k-1}) \\ & \geq \left(\left(\frac{d-1}{2d} + O\left(\frac{1}{m^{1/2+\varepsilon_9}}\right) \right) \frac{1}{\|x\|} - \left(a + O\left(\frac{1}{m^{1/2+\varepsilon_9}}\right) \right) \right) \mathbf{P}(B_k) \\ & \quad + o(\|x\|^{-1}) - e^{-c_5 \|x\|^{c_6}}. \end{aligned}$$

Somando de 1 a m em (2.2.37), para todo $\delta > 0$ obtemos

$$\mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\| \mid \xi_{\tau_n} = x) \geq \left(\frac{d-1}{2d} - \delta \right) \|x\|^{\varepsilon_3} - (a + \delta) \sum_{k=1}^m \mathbf{P}(B_k) \quad (2.2.38)$$

para todo x suficientemente grande.

Portanto, o Lema 2.2.7 e (2.2.38) implicam que

$$\mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\| \mid \xi_{\tau_n} = x) \geq \left(\frac{d-1}{2d} - \varepsilon_{10} \right) \|x\|^{\varepsilon_3} \quad (2.2.39)$$

com um arbitrariamente pequeno ε_{10} para todo x suficientemente grande.

Agora podemos obter uma cota superior para

$$\mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\|)^2 \mid \xi_{\tau_n} = x).$$

Note que, pelo Lema 2.2.7,

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+1}}\|^2 - \|\xi_{\tau_n}\|^2 \mid \xi_{\tau_n} = x) \\
& \leq \sum_{k=1}^m DP[B_k] + \sum_{k=1}^m \mathbf{P}[\overline{B_k}] \\
& \leq \|x\|^{1+\varepsilon_3} + O(1)
\end{aligned}$$

e portanto, por (2.2.25),

$$\mathbf{E}((\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\|)^2 \mid \xi_{\tau_n} = x) \tag{2.2.40}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \|x\|^{1+\varepsilon_3} - 2\|x\| \left(\frac{d-1}{2d} - \varepsilon_{10} \right) \|x\|^{\varepsilon_3} + O(1) \\
& = \left(\frac{1}{d} + 2\varepsilon_{10} \right) \|x\|^{1+\varepsilon_3} + O(1). \tag{2.2.41}
\end{aligned}$$

Agora podemos terminar a prova de (d). Note que dado $\varepsilon_{11} > 0$ existe $\varepsilon_{12} < 1$ tal que em $\{\Delta \geq 1 - \varepsilon_{12}\}$ temos

$$(1 + \Delta)^{-\frac{1}{2}} - 1 \leq -\frac{1}{2}\Delta + \left(\frac{3}{8} + \varepsilon_{11} \right) \Delta^2.$$

Definimos também

$$\tilde{\xi}_n = \begin{cases} \xi_{\tau_n}, & \text{se } \xi_k \neq 0 \text{ para todo } k \in [\tau_{n-1}, \tau_n] \\ 0, & \text{no caso contrário.} \end{cases} \tag{2.2.42}$$

Note que

$$\{\xi_k = 0 \text{ para algum } k \in [\tau_{n-1}, \tau_n]\} \subset \overline{H}.$$

Portanto, usando (2.2.39) e (2.2.41), analogamente a (2.2.29), temos (se ε_{10} ,

ε_{11} são suficientemente pequenos)

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}((\|\tilde{\xi}_{n+1}\| + 1)^{-\frac{1}{2}} - (\|\tilde{\xi}_n\| + 1)^{-\frac{1}{2}} \mid \tilde{\xi}_n = x) \\
& \leq \mathbf{E}((\|\xi_{\tau_{n+1}}\| + 1)^{-\frac{1}{2}} - (\|\xi_{\tau_n}\| + 1)^{-\frac{1}{2}} \mid \xi_{\tau_n} = x) + \mathbf{P}[\overline{H}] \\
& = \mathbf{E}((\|\xi_{\tau_{n+1}}\| + 1)^{-\frac{1}{2}} - (\|\xi_{\tau_n}\| + 1)^{-\frac{1}{2}} \\
& \quad \times \mathbf{1}\{\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\| < \|x\|^{\frac{1}{2} + \varepsilon_9}\} \mid \xi_{\tau_n} = x) \\
& \quad + \mathbf{E}((\|\xi_{\tau_{n+1}}\| + 1)^{-\frac{1}{2}} - (\|\xi_{\tau_n}\| + 1)^{-\frac{1}{2}} \\
& \quad \times \mathbf{1}\{\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\| \geq \|x\|^{\frac{1}{2} + \varepsilon_9}\} \mid \xi_{\tau_n} = x) + \mathbf{P}[\overline{H}] \\
& \leq \|x\|^{-\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2\|x\|} \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\|) \right. \\
& \quad \times \mathbf{1}\{\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\| < \|x\|^{\frac{1}{2} + \varepsilon_9}\} \mid \xi_{\tau_n} = x) \\
& \quad + \left(\frac{3}{8} + \varepsilon_{11} \right) \frac{1}{\|x\|^2} \mathbf{E}((\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\|)^2 \\
& \quad \times \mathbf{1}\{\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\| < \|x\|^{\frac{1}{2} + \varepsilon_9}\} \mid \xi_{\tau_n} = x) \Big) \\
& \quad + \mathbf{P}[\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\| \geq \|x\|^{\frac{1}{2} + \varepsilon_9} \mid \xi_{\tau_n} = x] + \mathbf{P}[\overline{H}] \\
& \leq \|x\|^{-\frac{1}{2}} \left(-\left(\frac{d-1}{2d} - \varepsilon_{10} \right) \frac{1}{2} \|x\|^{\varepsilon_3 - 1} + \left(\frac{1}{d} + 2\varepsilon_{10} \right) \left(\frac{3}{8} + \varepsilon_{11} \right) \|x\|^{\varepsilon_3 - 1} \right) \\
& \quad + 2e^{-c_5\|x\|^{c_6}} \\
& = \frac{1}{2} \|x\|^{\frac{1}{2} + \varepsilon_3 - 1} \left(-\frac{d-1}{2d} + \varepsilon_{10} + \frac{3}{4d} + \frac{3}{2}\varepsilon_{10} + \frac{\varepsilon_{11}}{2d} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{10} \right) \\
& \quad + 2e^{-c_5\|x\|^{c_6}} < 0
\end{aligned}$$

para todo x suficientemente grande, lembrando que $d \geq 3$. Aplicando o Teorema 2.2.1 com $f(x) = (\|x\| + 1)^{-\frac{1}{2}}$, obtemos que $\tilde{\xi}_n$ é transitória e, logo, ξ_n é também transitória. Isto completa a prova de (d).

Prova da parte (c)

Para prova a recorrência usamos o Teorema 2.2.2 com a função $f(x) = \log \log \|x\|$.

Como antes, suponhamos que $\|\text{Proj}M(x)\| \leq a$ para todo $x \in G$. De modo análogo ao da prova de (d), definimos os tempos de parada do seguinte modo

$$\tau_{n+1} = \tau_n + [\|\xi_{\tau_n}\|^{1 + \varepsilon_3}] + 1,$$

$\tau_0 = 0$, $\varepsilon_3 < \varepsilon$. Como antes, sejam $B_k = \{\xi_{\tau_n+k-1} \in G\}$ e $m := \tau_{n+1} - \tau_n$. Para provar a recorrência de ξ_t , precisamos achar uma cota superior para

$$\mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\| \mid \xi_{\tau_n} = x)$$

e uma cota inferior para

$$\mathbf{E}((\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\|)^2 \mid \xi_{\tau_n} = x).$$

Analogamente a (2.2.37), usando o Lema 2.2.7, obtemos

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}((\|\xi_{\tau_n+k}\| - \|\xi_{\tau_n+k-1}\|)\mathbf{1}_H \mid \xi_{\tau_n+k-1}) \\ & \leq \left(\frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{m^{1/2+\varepsilon_9}}\right)\right) \frac{1}{\|x\|} + \left(a + O\left(\frac{1}{m^{1/2+\varepsilon_9}}\right)\right) \mathbf{P}(B_k) \\ & \quad + o(\|x\|^{-1}) - e^{-c_8\|x\|^{c_9}}, \end{aligned} \tag{2.2.43}$$

onde $H = \{\|\xi_{\tau_n+i} - \xi_{\tau_n}\| \leq m^{\frac{1}{2}+\varepsilon_9} \text{ para } i = 1, \dots, m\}$ e $\varepsilon_9 > \varepsilon_3/2$. Somando de 1 a m em (2.2.43), como $m \simeq \|x\|^{1+\varepsilon_3}$, segue que

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\| \mid \xi_{\tau_n} = x) \\ & = \mathbf{E}((\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\|)\mathbf{1}_H \mid \xi_{\tau_n} = x) \\ & \quad + \mathbf{E}((\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\|)\mathbf{1}_{\bar{H}} \mid \xi_{\tau_n} = x) \\ & \leq \left(\left(\frac{1}{4} + O\left(\frac{1}{\|x\|^{(1/2+\varepsilon_9)(1+\varepsilon_3)}}\right)\right)\|x\|^{\varepsilon_3}\right. \\ & \quad \left.+ \left(a + O\left(\frac{1}{\|x\|^{(1/2+\varepsilon_9)(1+\varepsilon_3)}}\right)\right) \sum_{k=1}^m \mathbf{P}(B_k)\right) + o(\|x\|^{\varepsilon_3}) - e^{c_8 m^{c_9}}. \end{aligned} \tag{2.2.44}$$

Pelo Lema 2.2.7,

$$\sum_{k=1}^m \mathbf{P}(B_k) \leq c_{10} \log^2 \|x\|,$$

portanto de (2.2.44) segue que

$$\mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\| \mid \xi_{\tau_n} = x) \leq \frac{1}{4} \|x\|^{\varepsilon_3} + c_{28} \log^2 \|x\| \tag{2.2.45}$$

para algum $c_{28} > 0$ e para todo x suficientemente grande.

Por (2.2.25) e (2.2.45), temos

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}((\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\|)^2 \mid \xi_{\tau_n} = x) \\
&= \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+1}}\|^2 - \|\xi_{\tau_n}\|^2 \mid \xi_{\tau_n} = x) - 2\|x\|\mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\| \mid \xi_{\tau_n} = x) \\
&= \sum_{k=1}^m \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_n+k}\|^2 - \|\xi_{\tau_n+k-1}\|^2 \mid \xi_{\tau_n} = x) \\
&\quad - 2\|x\|\mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\| \mid \xi_{\tau_n} = x) \\
&= \sum_{k=1}^m \left(\mathbf{E}((\|\xi_{\tau_n+k}\| - \|\xi_{\tau_n+k-1}\|)^2 \mid \xi_{\tau_n} = x) \right. \\
&\quad \left. + 2\|\xi_{\tau_n+k-1}\|\mathbf{E}(\|\xi_{\tau_n+k}\| - \|\xi_{\tau_n+k-1}\| \mid \xi_{\tau_n} = x) \right) \\
&\quad - 2\|x\|\mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\| \mid \xi_{\tau_n} = x) \\
&= \|x\|^{1+\varepsilon_3} - 2\|x\|\frac{\|x\|^{\varepsilon_3}}{4} + O(\|x\|\log^2\|x\|) \\
&= \frac{\|x\|^{1+\varepsilon_3}}{2} + O(\|x\|\log^2\|x\|). \tag{2.2.46}
\end{aligned}$$

Aqui usamos os seguintes dois fatos:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^m \mathbf{E}((\|\xi_{\tau_n+k}\| - \|\xi_{\tau_n+k-1}\|)^2 \mid \xi_{\tau_n} = x) \\
&= \sum_{k=1}^m (\mathbf{E}((\|\xi_{\tau_n+k}\| - \|\xi_{\tau_n+k-1}\|)^2 \mid \xi_{\tau_n} = x, \xi_{\tau_n+k-1} \notin G)\mathbf{P}[\overline{B}_k] \\
&\quad + \mathbf{E}((\|\xi_{\tau_n+k}\| - \|\xi_{\tau_n+k-1}\|)^2 \mid \xi_{\tau_n} = x, \xi_{\tau_n+k-1} \in G))\mathbf{P}[B_k] \\
&= \sum_{k=1}^m \left(\left(\frac{1}{2} + O(\|x\|^{-2}) \right) \mathbf{P}[\overline{B}_k] + c_{29}\mathbf{P}[B_k] \right) \\
&= \frac{1}{2}\|x\|^{1+\varepsilon_3} + O(\log^2\|x\|),
\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^m \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_n+k}\| - \|\xi_{\tau_n+k-1}\| \mid \xi_{\tau_n} = x) \\
&= \sum_{k=1}^m (\mathbf{E}(\|\xi_{\tau_n+k}\| - \|\xi_{\tau_n+k-1}\| \mid \xi_{\tau_n} = x, \xi_{\tau_n+k-1} \notin G) \mathbf{P}[\overline{B}_k] \\
&\quad + \mathbf{E}(\|\xi_{\tau_n+k}\| - \|\xi_{\tau_n+k-1}\| \mid \xi_{\tau_n} = x, \xi_{\tau_n+k-1} \in G) \mathbf{P}[B_k]) \\
&= \sum_{k=1}^m \left(\left(\frac{1}{4\|\xi_{\tau_n+k-1}\|} + O(\|x\|^{-3}) \right) \mathbf{P}[\overline{B}_k] + c_{30} \mathbf{P}[B_k] \right) \\
&= \frac{1}{4} \|x\|^{\varepsilon_3} + O(\log^2 \|x\|).
\end{aligned}$$

Note que, como dado $x > -1$ temos

$$\log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3},$$

segue que

$$\begin{aligned}
& \log \log(x + \Delta) - \log \log x = \log \frac{\log(x + \Delta)}{\log x} \\
&= \log \left(1 + \frac{\log(1 + \frac{\Delta}{x})}{\log x} \right) \\
&\leq \log \left(1 + \left(\frac{\Delta}{x} - \frac{\Delta^2}{2x^2} + \frac{\Delta^3}{3x^3} \right) \frac{1}{\log x} \right) \\
&\leq \frac{1}{\log x} \left(\frac{\Delta}{x} - \frac{\Delta^2}{2x^2} + \frac{\Delta^3}{3x^3} \right) - \frac{1}{2\log^2 x} \left(\frac{\Delta}{x} - \frac{\Delta^2}{2x^2} + \frac{\Delta^3}{3x^3} \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{3\log^3 x} \left(\frac{\Delta}{x} - \frac{\Delta^2}{2x^2} + \frac{\Delta^3}{3x^3} \right)^3 \tag{2.2.47} \\
&= \frac{\Delta}{x \log x} - \frac{\Delta^2}{2x^2 \log x} - \frac{\Delta^2}{2x^2 \log^2 x} + \sum_{\substack{k=1,2,3 \\ m=3,\dots,9}} \gamma_{k,m} \frac{\Delta^m}{x^m \log^k x}
\end{aligned}$$

para algumas constantes $\gamma_{k,m}$. Além disso, do Lema 2.2.7 segue que para

todo $m \geq 3$ temos

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}((\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\|)^m \mid \xi_{\tau_n} = x) & (2.2.48) \\
&= \mathbf{E}((\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\|)^m \mathbf{1}\{\|\xi_{\tau_{n+1}} - \xi_{\tau_n}\| \leq \|x\|^{\frac{1}{2} + \varepsilon_9}\} \mid \xi_{\tau_n} = x) \\
&\quad + \mathbf{E}((\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\|)^m \mathbf{1}\{\|\xi_{\tau_{n+1}} - \xi_{\tau_n}\| > \|x\|^{\frac{1}{2} + \varepsilon_9}\} \mid \xi_{\tau_n} = x) \\
&\leq c_{31} \|x\|^{\frac{m}{2} + m\varepsilon_9}
\end{aligned}$$

Agora usando (2.2.45), (2.2.46), (2.2.47), e (2.2.48) podemos aplicar o Teorema 2.2.2 com a função $f(x) = \log \log \|x\|$:

$$\begin{aligned}
& \mathbf{E}(\log \log \|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \log \log \|\xi_{\tau_n}\| \mid \xi_{\tau_n} = x) \\
&\leq \frac{1}{\|x\| \log \|x\|} \left(\mathbf{E}(\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\| \mid \xi_{\tau_n} = x) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\mathbf{E}((\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\|)^2 \mid \xi_{\tau_n} = x)}{2\|x\|} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\mathbf{E}((\|\xi_{\tau_{n+1}}\| - \|\xi_{\tau_n}\|)^2 \mid \xi_{\tau_n} = x)}{2\|x\| \log \|x\|} + o(1) \right) \\
&\leq \frac{1}{\|x\| \log \|x\|} \left(\frac{1}{4} \|x\|^{\varepsilon_3} - \frac{\|x\|^{1+\varepsilon_3}}{4\|x\|} - \frac{\|x\|^{1+\varepsilon_3}}{4\|x\| \log \|x\|} + o(1) \right) \\
&= \frac{1}{\|x\| \log \|x\|} \left(- \frac{\|x\|^{\varepsilon_3}}{4 \log \|x\|} + o(1) \right) < 0
\end{aligned}$$

para todo x suficientemente grande. Portanto, pelo Teorema 2.2.2, o passeio aleatório ξ_t é recorrente e o Teorema 2.1.1 é provado. \square

2.2.4 Prova do Teorema 2.1.2

Seja $\theta = \{\theta_x\}_{x \in \mathbb{Z}}$ uma família de i.i.d. variáveis aleatórias tais que θ_x é uniformemente distribuída em $[0, 1]$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Seja

$$\zeta_x = \mathbf{1}\{x \in G\} = \mathbf{1}\{\theta_x \leq p(x)\}.$$

Suponhamos que $\beta > 0$ e $\tilde{p}(x) = \min\{\frac{1}{\beta x}, 1\}$ se $x \neq 0$ e $\tilde{p}(0) = 0$. Definimos também $\tilde{\zeta}_x = \mathbf{1}\{\theta_x \leq \tilde{p}(x)\}$. Consideramos uma função

$$f(\beta, x) = \begin{cases} 1 + \sum_{i=2}^x \exp\left(-\beta \sum_{j=1}^{i-1} \zeta_j\right), & \text{se } x \geq 2 \\ 1 + \sum_{i=2}^{|x|} \exp\left(-\beta \sum_{j=1}^{i-1} \zeta_{-j}\right), & \text{se } x \leq -2, \end{cases}$$

$f(\beta, 0) = 0$, $f(\beta, 1) = f(\beta, -1) = 1$. Analogamente definimos a função $\tilde{f}(\beta, x)$ substituindo ζ_j e ζ_{-j} por $\tilde{\zeta}_j$ e $\tilde{\zeta}_{-j}$ respectivamente.

Precisamos dos seguintes dois lemas.

Lema 2.2.8. *Se $f(\beta_0, x) \rightarrow +\infty$ quando $|x| \rightarrow \infty$ q.c., então o passeio aleatório ξ_t é recorrente q.c. Se existe uma função $M : [0, 1]^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que dado $x \in \mathbb{Z}$ temos $f(\beta_0, x) < M(\theta)$ q.c., então ξ_t é transitória q.c.*

Prova. Seja $x \geq 1$. Suponhamos que $x \notin G$. Então $\zeta_x = 0$ e

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(f(\beta_0, \xi_{t+1}) - f(\beta_0, \xi_t) \mid \xi_t = x) & (2.2.49) \\ &= \frac{1}{2}(f(\beta_0, x+1) - f(\beta_0, x)) + \frac{1}{2}(f(\beta_0, x-1) - f(\beta_0, x)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\exp \left(-\beta_0 \sum_{i=1}^x \zeta_i \right) - \exp \left(-\beta_0 \sum_{i=1}^{x-1} \zeta_i \right) \right) = 0. \end{aligned}$$

Note que na dimensão 1 temos uma propriedade de monotonacidade: se $p(x) \geq p'(x)$ para todo x e o problema com $p'(x)$ é transitório, então o problema com $p(x)$ é também transitório. Portanto, sem perda de generalidade, suponhamos que

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|^{1/2+\varepsilon_{13}} p(x) < \infty \quad (2.2.50)$$

para algum $\varepsilon_{13} > 0$. O lema de Borel-Cantelli e (2.2.50) implicam que existe uma função positiva $N = N(\theta)$ tal que para quaisquer dois sítios verdes x e y com $|x| > N$ e $|y| > N$ temos $|x - y| > 2D$ q.c. Seja $x > N + D$. Suponhamos que $x \in G$. Então $\zeta_x = 1$ e dado y tal que $0 < |x - y| \leq D$ temos $\zeta_y = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} & \mathbf{E}(f(\beta_0, \xi_{t+1}) - f(\beta_0, \xi_t) \mid \xi_t = x) & (2.2.51) \\ &= \sum_{y \in \mathbb{Z}} P_{xy}(f(\beta_0, y) - f(\beta_0, x)) \\ &= \exp \left(-\beta_0 \sum_{i=1}^x \zeta_i \right) a_+(x) + \exp \left(-\beta_0 \sum_{i=1}^{x-1} \zeta_i \right) a_-(x) = 0. \end{aligned}$$

De modo análogo, podemos provar que (2.2.49) e (2.2.51) são cumpridos para $x \leq -1$ e $x < -N - D$ respectivamente. Portanto, pelo Teorema 2.2.2, ξ_t é recorrente.

Para provar a transitoriedade de ξ_t é suficiente provar a transitoriedade da cadeia de Markov com espaço de estados $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ e as probabilidades de transição $\hat{P}_{xy} = \hat{P}_{xy}(\theta)$: $\hat{P}_{00} = \hat{P}_{01} = 1/2$, $\hat{P}_{x,x-1} = \hat{P}_{x,x+1} = 1/2$ para todo $x = 1, \dots, D$ e $\hat{P}_{xy} = P_{xy}$ para todo $x > D$. Para provar que esta nova cadeia de Markov é transitória aplicamos o Teorema 2.2.1 com a função \hat{f} e o conjunto finito \hat{A} construídos da seguinte maneira. Seja z o primeiro sítio verde tal que $z > N + 2D$. Como $z - D - 1 > N$, segue que $z - D - 1, \dots, z - 1$ são sítios ordinários. Seja $\hat{f}(x) = M(\theta) - f(\beta_0, x)$ se $x \geq z - D$ e $\hat{f}(x) = M(\theta) - f(\beta_0, z - D - 1)$ se $x < z - D$, $\hat{A} = \{x \in \mathbb{Z}_+ : x < z - D\}$. Isto termina a prova do Lema 2.2.8. \square

Lema 2.2.9. *Se $\beta > \beta_0$, então $\tilde{f}(\beta, x) \rightarrow +\infty$ quando $|x| \rightarrow \infty$. Se $\beta < \beta_0$, então existe uma função $\tilde{M} : [0, 1]^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que dado $x \in \mathbb{Z}$ temos $\tilde{f}(\beta, x) < \tilde{M}(\theta)$ q.c.*

Prova. Para provar este lema usamos o Teorema 2.2.3.

Sejam $x > \max\{\beta^{-1}, 1\}$ e $b_x = \log x$. Temos

$$\mathbf{E}\tilde{\zeta}_x = \frac{1}{\beta x} \text{ e } \text{Var } \tilde{\zeta}_x = \frac{\beta x - 1}{\beta^2 x^2}.$$

Além disso,

$$\sum_{x=[\beta^{-1}]+1}^{\infty} \frac{\text{Var } \tilde{\zeta}_x}{b_x^2} = \sum_{x=[\beta^{-1}]+1}^{\infty} \frac{\beta x - 1}{\beta^2 x^2 \log^2 x} < \infty.$$

O Teorema 2.2.3 implica que

$$\frac{\sum_{i=1}^x \tilde{\zeta}_i - \sum_{i=1}^x (\beta i)^{-1}}{\log x} \rightarrow 0 \text{ a.s.}$$

quando $x \rightarrow +\infty$. Como

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^x (\beta i)^{-1}}{\log x} = \beta^{-1},$$

segue que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{i=1}^x \tilde{\zeta}_i}{\log x} = \beta^{-1} \text{ q.c.}$$

Seja $r_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$ e $R = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-r_k}$. É fácil ver que

- se

$$\liminf_{k \rightarrow +\infty} \frac{r_k}{\log k} > 1,$$

então $R < \infty$;

- se

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{r_k}{\log k} < 1,$$

então $R = \infty$.

Aplicando este fato, concluímos a prova do Lema 2.2.9 para $x > 0, x \rightarrow +\infty$. O caso de $x < 0, x \rightarrow -\infty$ é provado analogamente. \square

Agora terminamos a prova do Teorema 2.1.2.

Suponhamos que

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} |x|p(x) < \beta_0^{-1}.$$

Então existem $\beta > \beta_0$ e $N \in \mathbb{N}$ tais que $p(x) \leq \tilde{p}(x)$ se $|x| > N$. Portanto, podemos acoplar ζ_x e $\tilde{\zeta}_x$ de tal modo que $\zeta_x \leq \tilde{\zeta}_x$ se $|x| > N$. Portanto, dado θ se $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \tilde{f}(\beta, x) = +\infty$, então $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(\beta_0, x) = +\infty$. Dos Lemas 2.2.8 e 2.2.9, segue que ξ_t é recorrente.

No caso

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} |x|p(x) > \beta_0^{-1}$$

de modo análogo podemos provar que ξ_t é transitória. \square

Capítulo 3

Propagação de onda aleatória

3.1 Introdução

Neste capítulo estudamos modelos de propagação de onda descritos por cadeias de Markov em \mathbb{Z}^s . Estas cadeias correspondem a modelos físicos de crescimento de cristais (cf. [23] e referências bibliográficas ali). Cada estado da cadeia representa a superfície do cristal e as transições ocorrem devido às capturas dos átomos pela superfície.

Estudamos a evolução da forma da superfície. Isto é equivalente a estudar a superfície vista da altura de uma das colunas. A nossa meta é estudar a ergodicidade/não ergodicidade da forma.

Usamos métodos de martingais que foram iniciados por Foster (cf. [22]). A idéia deste método consiste em construir uma função de Lyapunov tal que esta função, aplicada ao processo estocástico original é sub- ou supermartingal. Os critérios principais da classificação podem-se achar em [21, 18, 24].

O *modelo de cadeia simples* é baseado em um grafo que tem s sítios e $s - 1$ elos não-orientados, o conjunto dos sítios é $\{1, \dots, s\}$ e o conjunto dos elos é $\{\{i, i + 1\}, i = 1, \dots, s - 1\}$. Chamamos este grafo *cadeia simples*. O *modelo de árvore* é baseado em um grafo que é uma árvore. A cadeia simples é uma árvore. Mas consideramos os dois modelos separadamente. Para o modelo de cadeia simples estudamos a ergodicidade com respeito às condições de fronteira nos sítios 1 e s . O fato que o grafo é uma cadeia simples é importante para a construção das funções de Lyapunov. Consideramos o modelo de árvore com condições de fronteira em um sítio (raiz) e provamos a ergodicidade. Para o modelo de árvore o conjunto dos valores admissíveis

para a matriz de transição é maior que o do modelo de cadeia simples. Como um corolário obtemos uma generalização do Teorema 1 de [23], onde o modelo é baseado em um grafo que é uma cadeia simples.

3.2 Modelos e resultados

Seja $G = (V, E)$ um grafo conectado finito não-orientado sem loops, V é o conjunto dos sítios e E é o conjunto dos elos. Seja $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 2$ e $V = \{1, \dots, s\}$.

Consideramos uma cadeia de Markov η_t em tempo discreto $t = 0, 1, \dots$ com espaço dos estados $X = \mathbb{Z}^s$ e matriz de transição $Q = (Q_{xy} : x, y \in X)$.

É cômodo representar um estado $x \in X$ como s colunas. A altura de cada coluna é um número inteiro. Um estado $x \in X$ é representado pelo vetor $x = (x_1, \dots, x_s)$, onde x_i é a altura da coluna i (a coluna i corresponde ao sítio i).

Para definir as condições de fronteira e matriz de transição Q usamos um outro grafo $G' = (V', E')$. O grafo G é um subgrafo de G' . O grafo G' tem as seguintes propriedades:

- para cada sítio i de $V' \setminus V$ existe um e somente um sítio j do grafo G e um elo entre os sítios i e j ,
- não há elos entre os sítios de $V' \setminus V$.

Seja $V' = \{1, \dots, s'\}$.

Uma coluna corresponde a cada sítio de $V' \setminus V$. As colunas são chamadas colunas adicionais e têm números $s + 1, \dots, s'$. A altura de cada coluna adicional é um número inteiro, $+\infty$, ou $-\infty$. Se a altura de uma coluna adicional é $+\infty$ ou $-\infty$, então a altura da coluna não muda. Se a altura de uma coluna adicional não é $+\infty$ e não é $-\infty$, então as alturas da coluna adicional e da coluna conectada à coluna adicional são iguais. O parâmetro Ξ designa as condições de fronteira.

Por $\chi' = \{\chi'_{ij}\}_{i,j=1,\dots,s'}$ designamos a matriz tal que

- $\chi'_{ij} = \chi'_{ji} = 1$ se $\{i, j\}$ é um elo de G' ,
- $\chi'_{ij} = \chi'_{ji} = 0$ se $\{i, j\}$ não é um elo de G' .

Se $\chi'_{ij} = 1$, então as colunas com os números i e j são vizinhas, se $\chi'_{ij} = 0$, então elas não são vizinhas.

Assumimos que $0 \leq \gamma < \beta < \alpha \leq 1$. Seja $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ um vetor com 1 na posição i e com 0 nas todas outras posições. Num momento de tempo o estado da cadeia de Markov η_t ou não muda ou a altura de uma coluna aumenta por 1, isto é, do estado x a cadeia de Markov vai para o estado x ou para o estado $x + e_i$ para algum $i \in \{1, \dots, s\}$.

A idéia principal da definição de matriz de transição Q é a que as alturas das colunas tentam ser iguais localmente. Escolhemos cada coluna com probabilidade $1/s$. Se todas as colunas vizinhas tem as alturas estritamente maior que a altura da coluna, então ela aumenta por 1 com probabilidade α . Se todas as colunas vizinhas tem as alturas estritamente menor que a altura da coluna, então ela aumenta por 1 com probabilidade γ . Se algumas colunas vizinhas tem as alturas maior do que a da coluna e algumas menor, então ela aumenta por 1 com probabilidade β . Separadamente definimos o que fazer quando algumas colunas vizinhas tem a mesma altura que a coluna e as alturas de todas as outras colunas vizinhas são estritamente maior (menor, a mesma altura). Introduzimos o parâmetro $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ tal que

$$\theta_k = (\theta_k(1), \dots, \theta_k(s)), k = 1, 2, 3,$$

e dado i temos

$$\theta_1(i) \in \{\alpha, \beta\}, \theta_2(i) \in \{\beta, \gamma\}, \theta_3(i) \in \{\alpha, \beta, \gamma\}.$$

Lembramos que $i \in \{1, \dots, s\}$ e $x \in X$. Seja $x' = (x'_1, \dots, x'_{s'})$, onde $x'_i = x_i$, $i = 1, \dots, s$, e $x'_{s+1}, \dots, x'_{s'}$ são as alturas das colunas adicionais. Para definir matriz de transição Q definimos as funções $a_i(x')$, $b_i(x')$, $c_i(x')$. A coluna i tem $a_i(x')$ colunas vizinhas tais que elas têm as alturas estritamente maior que a altura da coluna i , $c_i(x')$ colunas vizinhas tais que elas têm as alturas estritamente menor que a altura da coluna i , e $b_i(x')$ colunas vizinhas tais que elas têm a mesma altura que tem a coluna i , isto é,

$$\begin{aligned} a_i(x') &= \#\{j \in J : \chi'_{ij}(x'_j - x'_i) > 0\}, \\ c_i(x') &= \#\{j \in J : \chi'_{ij}(x'_j - x'_i) < 0\}, \\ b_i(x') &= \#\{j \in J : x'_j - x'_i = 0, \chi'_{ij} \neq 0\}, \end{aligned}$$

onde $i = 1, \dots, s$, $J = \{1, \dots, s'\}$. Agora podemos definir matriz de transição Q da seguinte maneira.

1. $Q_{x,x+e_i} = \frac{\alpha}{s}$ se $a_i(x') > 0, b_i(x') = 0, c_i(x') = 0$,
2. $Q_{x,x+e_i} = \frac{\gamma}{s}$ se $a_i(x') = 0, b_i(x') = 0, c_i(x') > 0$,
3. $Q_{x,x+e_i} = \frac{\beta}{s}$ se $a_i(x') > 0, c_i(x') > 0$,
4. $Q_{x,x+e_i} = \theta_1(i)$ se $a_i(x') > 0, b_i(x') > 0, c_i(x') = 0$,
5. $Q_{x,x+e_i} = \theta_2(i)$ se $a_i(x') = 0, b_i(x') > 0, c_i(x') > 0$,
6. $Q_{x,x+e_i} = \theta_3(i)$ se $a_i(x') = 0, b_i(x') > 0, c_i(x') = 0$,
7. $Q_{x,x} = 1 - \sum_{j=1}^s Q_{x,x+e_j}$,
8. $Q_{x,y} = 0$ se $y \neq x$ e não existe i tal que $y = x + e_i$.

Note que Q é invariante por translações, isto é, $Q_{x,y} = Q_{x+Ce,y+Ce}$, onde $C \in \mathbb{Z}$ é uma constante, e $e = (1, \dots, 1) \in X$. Evidentemente, a cadeia de Markov η_t é transitória.

Consideramos uma cadeia de Markov $\tilde{\eta}_t$ em tempo discreto com espaço de estados $\tilde{X} = \mathbb{Z}^{s-1}$ e matriz de transição $\tilde{Q} = \{\tilde{Q}_{u,v} : u, v \in \tilde{X}\}$.

Assumimos que F é uma função de X para \tilde{X} tal que

$$F(x) = (F_1(x), \dots, F_{s-1}(x))$$

$$F_{i-1}(x) = x_{i+1} - x_i, i = 1, \dots, s-1.$$

Uma realização de F^{-1} pode ser definida por

$$F^{-1}(v) = (F_1^{-1}(v), \dots, F_{s-1}^{-1}(v)),$$

$$F_1^{-1}(v) = 0, F_i^{-1}(v) = \sum_{j=1}^{i-1} v_j, i = 2, \dots, s. \quad (3.2.1)$$

Seja $\varepsilon_i = F(e_i), i = 1, \dots, s$. Para qualquer $u \in \tilde{X}$ e $x = F^{-1}(u)$ sejam

- $\tilde{Q}_{u,u+\varepsilon_i} = Q_{x,x+e_i}, i = 1, \dots, s;$
- $\tilde{Q}_{uu} = 1 - \sum_{j=1}^s \tilde{Q}_{u,u+\varepsilon_j};$
- $\tilde{Q}_{uv} = 0$ se $v \neq u$ e não existe i tal que $v = u + \varepsilon_i$.

Logo, os parâmetros do nosso modelo são G , α , β , γ , θ , e Ξ . O conjunto dos valores dos parâmetros é definido. Nos próximos parágrafos vamos descrever alguns subconjuntos do conjunto tais que a cadeia de Markov $\tilde{\eta}_t$ é ergódica/não-ergódica. Se não tem restrições para alguns parâmetros isso significa que os parâmetros podem assumir qualquer valor admissível.

Modelo com $+\infty$ e $-\infty$. Neste modelo temos as seguintes condições de fronteira Ξ . Seja $s' \geq s + 2$. Suponhamos que $x'_{s+1} = +\infty$, $x'_{s+2} = -\infty$, e $x'_{s+3}, \dots, x'_{s'}$ assumem quaisquer valores admissíveis.

Teorema 3.2.1. *Para o modelo com $+\infty$ e $-\infty$ a cadeia de Markov $\tilde{\eta}_t$ não é ergódica.*

O modelo de cadeia simples. Neste modelo o grafo G é uma cadeia simples, isto é, $V = \{1, \dots, s\}$, $E = \{\{i, i + 1\} : i = 1, \dots, s - 1\}$.

Nos casos quando Ξ é igual a $\langle -\infty, -\infty \rangle$, $\langle +\infty, +\infty \rangle$, $\langle +\infty, = \rangle$, $\langle -\infty, = \rangle$, ou $\langle =, = \rangle$ o grafo G' é uma cadeia simples com $s' = s + 2$, isto é, $V' = \{1, \dots, s'\}$, $E' = \{\{i, i + 1\} : i = 1, \dots, s\} \cup \{\{1, s + 2\}\}$. As alturas das colunas adicionais são x'_{s+2} e x'_{s+1} . O valor de Ξ define os valores de x'_{s+2} e x'_{s+1} . Por exemplo, $\Xi = \langle +\infty, = \rangle$ significa que $x'_{s+2} = +\infty$ e x'_{s+1} é sempre igual a x_s . No caso quando Ξ é igual a $\langle \emptyset \rangle$ o grafo G' é o grafo G com mais um elo $\{1, s\}$. Neste modelo dado i temos $\theta_1(i) = \alpha$, $\theta_2(i) = \gamma$, $\theta_3(i) = \beta$.

Teorema 3.2.2. *Para o modelo de cadeia simples a cadeia de Markov $\tilde{\eta}_t$ é ergódica.*

Modelo de árvore. Neste modelo o grafo G é uma árvore com raiz, isto é, G não tem ciclos e um sítio r é selecionado. O sítio r se chama *raiz*.

Nos caso quando Ξ é igual a $\langle = \rangle$, $\langle +\infty \rangle$, ou $\langle -\infty \rangle$ o grafo G' tem mais um sítio e mais um elo que o grafo G . O novo elo é entre o novo sítio e o raiz. A altura da coluna adicional é x'_{s+1} . O valor de Ξ define o valor de x'_{s+1} . Por exemplo, $\Xi = \langle = \rangle$ significa que x'_{s+1} é sempre igual a x_r . No caso quando Ξ é igual a $\langle \emptyset \rangle$ o grafo G' é igual a G .

Teorema 3.2.3. *Para o modelo de árvore a cadeia de Markov $\tilde{\eta}_t$ é ergódica.*

Nota 3. Suponhamos que a árvore com raiz G é uma cadeia simples. Se dado i temos $\theta_1(i) = \alpha$, $\theta_2(i) = \gamma$, $\theta_3(i) = \beta$ e $\Xi = \langle = \rangle$; então temos o modelo de cadeia simples com $\Xi = \langle =, = \rangle$. Se dado i temos $\theta_1(i) = \beta$, $\theta_2(i) =$

$\gamma, \theta_3(i) = \gamma$; então o modelo de árvore é uma generalização do modelo de [23] (o Teorema 1,[23]).

3.3 Provas

3.3.1 Fatos básicos

Consideramos uma cadeia de Markov $\hat{\eta}_t$ homogênea e irredutível com espaço de estados \hat{X} .

Teorema 3.3.1 (Foster). *A cadeia de Markov $\hat{\eta}_t$ é ergódica se e somente se existem uma função positiva $f(x), x \in \hat{X}$, um número $\varepsilon > 0$ e um conjunto finito $A \in \hat{X}$ tais que*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(f(\hat{\eta}_{t+1}) - f(\hat{\eta}_t) \mid \hat{\eta}_t = x) &\leq -\varepsilon, x \notin A, \\ \mathbf{E}(f(\hat{\eta}_{t+1}) \mid \hat{\eta}_t = x) &< \infty, x \in A. \end{aligned}$$

Teorema 3.3.2. *Para que a cadeia de Markov $\hat{\eta}_t$ seja não ergódica, é suficiente que existe uma função $f(x), x \in \hat{X}$, e umas constantes C e d tais que*

- *dado t temos $\mathbf{E}(f(\hat{\eta}_{t+1}) - f(\hat{\eta}_t) \mid \hat{\eta}_t = x) \geq 0, x \in \{f(x) > C\}$, onde os conjuntos $\{x \mid f(x) > C\}$ e $\{x \mid f(x) \leq C\}$ são não vazios;*
- *dado t temos $\mathbf{E}(|f(\hat{\eta}_{t+1}) - f(\hat{\eta}_t)| \mid \hat{\eta}_t = x) \leq d, x \in \hat{X}$.*

As provas dos Teoremas 3.3.1 e 3.3.2 pode-se achar em [18]

3.3.2 Prova do Teorema 3.2.1

Lembramos que $x'_{s+1} = +\infty$ e $x'_{s+2} = -\infty$. Sejam i, j os números dos sítios tais que $\chi'_{i,s+1} = 1$ e $\chi'_{j,s+2} = 1$. É claro que

$$\tilde{Q}_{v,v+\varepsilon_i} \in \left\{ \frac{\alpha}{s}, \frac{\beta}{s} \right\}, \tilde{Q}_{v,v+\varepsilon_j} \in \left\{ \frac{\gamma}{s}, \frac{\beta}{s} \right\}.$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, $i > j$. Seja

$$f(v) = \sum_{k=j}^{i-1} v_k. \tag{3.3.1}$$

Portanto, temos

$$\mathbf{E}(f(\tilde{\eta}_{t+1}) - f(\tilde{\eta}_t) \mid \tilde{\eta}_t = v) = \tilde{Q}_{v, v+\varepsilon_i} - \tilde{Q}_{v, v+\varepsilon_j} \geq 0$$

A aplicação do Teorema 3.3.2, onde $C = 0, d = 1$ e f é definida por (3.3.1), conclui a prova. \square

3.3.3 Prova do Teorema 3.2.2

Na prova usamos o número 0 para a coluna adicional $s + 2$. Para provar o Teorema, construímos uma função de Lyapunov em \tilde{X} . A parte principal da função é um produto escalar em \tilde{X} . Usamos o seguinte

Lema 3.3.1. *Consideramos um produto escalar (\cdot, \cdot) em \mathbb{R}^n . Suponhamos que $\|u\| = (u, u)^{1/2}$, $u \in \mathbb{R}^n$. Seja ξ uma variável aleatória, $\xi \in \mathbb{R}^n$, tal que existe uma constante positiva C tal que $\|\xi\| < C$ q.c. Então dado $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $u \neq 0$ temos*

$$\mathbf{E}(\|u + \xi\| - \|u\|) \leq \frac{(u, \mathbf{E}\xi)}{\|u\|} + \frac{\mathbf{E}(\xi, \xi)}{2\|u\|}.$$

Prova. Usando a desigualdade simples $(1 + t)^{1/2} \leq 1 + \frac{t}{2}$, $t \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\|u + \xi\| - \|u\|) &= \mathbf{E} \left(\|u\| \left(\left(1 + \frac{2(u, \xi) + (\xi, \xi)}{(u, u)} \right)^{1/2} - 1 \right) \right) \\ &\leq \left(\frac{(u, \mathbf{E}\xi)}{\|u\|} \right) + \left(\frac{\mathbf{E}(\xi, \xi)}{2\|u\|} \right) \end{aligned}$$

\square

Precisamos de uma notação.

Sejam $M = \max\{\alpha - \beta, \beta - \gamma\}$ e $m = \min\{\alpha - \beta, \beta - \gamma\}$. Dado $v \in \tilde{X}$, suponhamos que

$$\zeta(v) = (\zeta_1(v), \dots, \zeta_{s-1}(v)) = s\mathbf{E}(\tilde{\eta}_{t+1} - \tilde{\eta}_t \mid \tilde{\eta}_t = v)$$

e $\delta(v) = (\delta_1(v), \dots, \delta_s(v))$, onde $\delta_i(v) = s\tilde{Q}_{v, v+\varepsilon_i}$. Note que

$$\delta_i(v) \in \{\alpha, \beta, \gamma\} \text{ e } |\zeta_j(v)| \in \{\alpha - \beta, \beta - \gamma, \alpha - \gamma, 0\}.$$

Dados $n \in \{1, \dots, s-1\}$, $K \in \{0, \dots, s-n-1\}$, por $\pi^{K,n}$ designamos a projeção de \mathbb{R}^{s-1} para \mathbb{R}^n tal que

$$\pi^{K,n}(v) = (v_{K+1}, \dots, v_{K+n}) \text{ para } v = (v_1, \dots, v_{s-1}).$$

Por $\tilde{\pi}^{K,n}$ designamos a projeção de \mathbb{R}^s para \mathbb{R}^{n+1} tal que

$$\tilde{\pi}^{K,n}(x) = (x_{K+1}, \dots, x_{K+n+1}) \text{ para } x = (x_1, \dots, x_s).$$

Sejam

$$\begin{aligned} v^{K,n} &= (v_1^{K,n}, \dots, v_n^{K,n}) = \pi^{K,n}v, \\ \zeta^{K,n}(v) &= (\zeta_1^{K,n}, \dots, \zeta_n^{K,n}) = \pi^{K,n}\zeta(v), \\ \delta^{K,n}(v) &= (\delta_1^{K,n}, \dots, \delta_{n+1}^{K,n}) = \tilde{\pi}^{K,n}\delta(v). \end{aligned}$$

Nos construímos um produto escalar $(\cdot, \cdot)_{s-1}$ em \mathbb{R}^{s-1} , de qual precisamos para construir a função de Lyapunov, e provamos algumas propriedades do produto escalar no seguinte

Lema 3.3.2. *Dado $n \in \{1, \dots, s-1\}$ existe um produto escalar $(\cdot, \cdot)_n$ em \mathbb{R}^n tal que as seguintes condições são cumpridos:*

1. *dados $K \in \{0, \dots, s-n-1\}$ e $v \in \tilde{X}$ se existe $i \in \{1, \dots, n+1\}$ tal que $\delta_i^{K,n}(v) \neq \beta$, então*

$$(v^{K,n}, \zeta^{K,n}(v))_n \leq -m \left(\sum_{i=1}^n |v_i^{K,n}| \right);$$

2. *dados $K \in \{0, \dots, s-n-1\}$ e $v \in \tilde{X}$ se para todo $i \in \{1, \dots, n+1\}$ temos $\delta_i^{K,n}(v) = \beta$, então*

$$(v^{K,n}, \zeta^{K,n}(v))_n \leq 0.$$

Prova. Se $\delta_i^{K,n}(x) = \beta$ para todo $i \in \{1, \dots, n+1\}$, então $\zeta^{K,n}(v) = 0$. Portanto, para qualquer produto escalar a Condição 2 é cumprida.

Para definir um produto escalar $(\cdot, \cdot)_n$ definimos o valor de $g_n(u) = (u, u)_n$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$. Então

$$(a, b)_n = (g_n(a+b) - g_n(a) - g_n(b))/2, a, b \in \mathbb{R}^n.$$

Provamos o lema por indução sobre n .

Para $n = 1$ seja $g_1(u_1) = u_1^2$. É claro que $(\cdot, \cdot)_1$ é um produto escalar. Dado $v \in \tilde{X}$ temos

$$(v^{K,1}, \zeta^{K,1})_1 = v^{K,1} \zeta^{K,1} = v^{K,1} (\delta_2^{K,1}(v) - \delta_1^{K,1}(v)).$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, $v^{K,1} > 0$; então

$$\delta_1^{K,1}(v) \in \{\alpha, \beta\} \text{ e } \delta_2^{K,1}(v) \in \{\beta, \gamma\}.$$

Logo, para este produto escalar a Condição 1 é cumprida.

Suponhamos que existem uns produtos escalares $(\cdot, \cdot)_1, \dots, (\cdot, \cdot)_{n-1}$ tais que as Condições 1, 2 são cumpridas. Vamos provar que existe um produto escalar $(\cdot, \cdot)_n$ tal que as Condições 1, 2 são cumpridas.

Seja

$$\begin{aligned} g_n(u_1, \dots, u_n) &= \left(\sum_{i=1}^n u_i \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{Mn}{m} + 1 \right) \sum_{j=1}^{n-1} (g_j(u_1, \dots, u_j) + g_{n-j}(u_{j+1}, \dots, u_n)). \end{aligned}$$

É claro que $(\cdot, \cdot)_n$ é um produto escalar. Vamos provar que para $(\cdot, \cdot)_n$ a Condição 1 é cumprida. Dados $K \in \{1, \dots, s - n - 1\}$ e $v \in \tilde{X}$, seja $x = F^{-1}(v)$. Consideramos dois casos.

1. Existe $i \in \{2, \dots, n\}$ tal que $\delta_i^{K,n}(x) \neq \beta$.
2. Para cada $i \in \{2, \dots, n\}$ temos $\delta_i^{K,n}(x) = \beta$.

No caso 1 temos

$$\delta_i^{K,i-1} = \delta_1^{K+i-1, n-i+1}(x) = \delta_i^{K,n}(x) \neq \beta.$$

Pela hipótese indutiva, temos

$$\begin{aligned} (v^{K,n}, \zeta^{K,n})_n &\leq nM \left(\sum_{j=1}^n |v_j^{K,n}| \right) \\ &\quad + \left(\frac{Mn}{m} + 1 \right) \left(-m \left(\sum_{j=1}^{i-1} |v_j^{K,i-1}| \right) - m \left(\sum_{j=1}^{n-i+1} |v_j^{K+i-1, n-i+1}| \right) \right) \\ &\leq -m \left(\sum_{j=1}^n |v_j^{K,n}| \right). \end{aligned}$$

No caso 2 existe $i \in \{1, n+1\}$ tal que $\delta_i^{K,n}(x) \neq \beta$, e somente uma das seguintes condições é cumprida:

- $v_j^{K,n} > 0$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ e $\delta_1^{K,n}(v) > \delta_{n+1}^{K,n}(v)$;
- $v_j^{K,n} < 0$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$ e $\delta_1^{K,n}(v) < \delta_{n+1}^{K,n}(v)$;
- $v_j = 0, j = 1, \dots, n$.

Portanto,

$$(v^{K,n}, \zeta^{K,n})_n \leq \left(\sum_{i=1}^n v_i^{K,n} \right) (\delta_{n+1}^{K,n}(v) - \delta_1^{K,n}(v)) \leq -m \left(\sum_{i=1}^n |v_i^{K,n}| \right)$$

Isto conclui a prova do Lema 3.3.2. \square

Vamos terminar a prova do Teorema 3.2.2. Usamos o produto escalar $(\cdot, \cdot)_{s-1}$ tal que a hipótese do Lema 3.3.2 é cumprida. Denotamos $(a, b) = (a, b)_{s-1}$, $a, b \in \mathbb{R}^{s-1}$ e $\|a\| = (a, a)^{1/2}$. Dado $v \in \tilde{X}$, seja

$$f(v) = \|v\| + 1 \tag{3.3.2}$$

É fácil ver que $f(v)$ é uma função positiva.

Como em \mathbb{R}^{s-1} todas as normas são equivalentes, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\|u\| \leq C_1 \left(\sum_{j=1}^n |u_j| \right).$$

Existe $C_2 > 0$ tal que dado t temos

$$\|f(\tilde{\eta}_{t+1}) - f(\tilde{\eta}_t)\| \leq C_2.$$

Do Lema 3.3.1 segue que existe $C_3 > 0$ tal que dado $v \in \tilde{X}$ temos

$$\mathbf{E}(f(\tilde{\eta}_{t+1}) - f(\tilde{\eta}_t) \mid \tilde{\eta}_t = v) \leq \frac{(v, \zeta(v))}{s\|v\|} + \frac{C_3}{\|v\|}. \tag{3.3.3}$$

Sejam $0 < \varepsilon < \frac{m}{sC_1}$ e

$$A = \left\{ v \in \mathbb{Z}^{s-1} : \frac{C_3}{\|v\|} - \frac{m}{sC_1} > -\varepsilon \right\}. \tag{3.3.4}$$

É claro que A é finito e $0 \in A$.

Sejam $v \in \tilde{X}$, $v \neq 0$, e $x = F^{-1}(v)$, onde F^{-1} é definido por (3.2.1).

Nos casos $\langle \circ \rangle$, $\langle -\infty, -\infty \rangle$, $\langle -\infty, = \rangle$, $\langle =, = \rangle$ existe

$$i \in \left\{ l : x_l = \max_{j=1, \dots, s} x_j \right\}$$

tal que $\delta_i(v) = \gamma$.

Nos casos $\langle +\infty, +\infty \rangle$, $\langle +\infty, = \rangle$, existe

$$i \in \left\{ l : x_l = \min_{j=1, \dots, s} x_j \right\}$$

tal que $\delta_i(v) = \alpha$.

Portanto, de (3.3.3) e do Lema 3.3.2 segue que dado $v \notin A$ temos

$$\mathbf{E}(f(\tilde{\eta}_{t+1}) - f(\tilde{\eta}_t) \mid \tilde{\eta}_t = v) \leq -\frac{m \sum_{i=1}^n |v_i|}{s \|v\|} + \frac{C_3}{\|v\|} \leq -\frac{m}{sC_1} + \frac{C_3}{\|v\|} \leq -\varepsilon.$$

É claro que dado $v \in A$ temos

$$\mathbf{E}(f(\tilde{\eta}_{t+1}) \mid \tilde{\eta}_t = v) < \infty.$$

A aplicação do Teorema 3.3.1, onde f é definida por (3.3.2) e A por (3.3.4), conclui a prova. \square

3.3.4 Prova do Teorema 3.2.3

Daqui para frente usamos o número 0 para a coluna adicional $s + 1$. Para a árvore G com raiz r a notação $G^r = (G, r) = (V, E, r)$ é usada.

Também usamos outra definição de F , F^{-1} e, portanto, de \tilde{Q} e $\tilde{\eta}_t$. É claro que $\tilde{\eta}_t$ nova é ergódica se e somente se a $\tilde{\eta}_t$ anterior é ergódica.

Enumeramos todos os elos de G^r em alguma maneira. Assumimos que F é uma função de X para \tilde{X} tal que

$$\begin{aligned} F(x) &= (F_1(x), \dots, F_{s-1}(x)) \\ F_l(x) &= x_i - x_j, \end{aligned} \tag{3.3.5}$$

onde os sítios i e j são conectados pelo elo l , a distância entre o raiz r e o sítio j é menor que a distância entre o raiz r e o sítio i . A distância entre o raiz r e algum sítio i é o número dos elos no caminho que conecta r com i e

passa por cada elo de G^r um ou zero vezes. Por \tilde{E}_i designamos o conjunto dos elos deste caminho.

Assumimos, sem perda de generalidade, $r = 1$. Portanto, uma realização de F^{-1} pode ser definida por

$$\begin{aligned} F^{-1}(v) &= (F_1^{-1}(v), \dots, F_s^{-1}(v)), \\ F_1^{-1}(v) &= 0, F_i^{-1}(v) = \sum_{l \in \tilde{E}_i} v_l, v \in \tilde{X}, i = 2, \dots, s. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Seja $m = \min\{\alpha - \beta, \beta - \gamma\}$.

Nota 4. Sejam i e j dois sítios conectados pelo elo l . É claro que se $\tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_i} = \tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_j}$, então dado $u \in \tilde{X}$ com $u_l \neq 0$ temos

$$\mathbf{E}(|(\tilde{\eta}_{t+1})_l| - |(\tilde{\eta}_t)_l| \mid \eta_t = u) = 0,$$

onde $(\tilde{\eta}_t)_l = u_l$ se $\tilde{\eta}_t = u$; se $\tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_i} \neq \tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_j}$, então dado $u \in \tilde{X}$ com $u_l \neq 0$ temos

$$\mathbf{E}(|(\tilde{\eta}_{t+1})_l| - |(\tilde{\eta}_t)_l| \mid \eta_t = u) \leq -\frac{m}{s}.$$

Vamos provar o Teorema 3.3.3 (embaixo) por indução sobre s . O Teorema 3.2.3 segue do Teorema 3.3.3. Precisamos de duas condições para $(f, \hat{\eta}_t, \hat{X})$, onde $\hat{\eta}_t$ é uma cadeia de Markov com espaço de estados \hat{X} , $\hat{X} = \mathbb{Z}^m$ para algum $m \in \mathbb{N}$, e $f : \hat{X} \rightarrow \mathbb{R}$. Por $\Delta f(w)$ designamos a variável aleatória $f(\hat{\eta}_1) - f(\hat{\eta}_0)$, onde $\hat{\eta}_0 = w$. Note que para cada realização fixa segue que $\Delta f(w)$ é uma função de w .

Condição 1. $(f, \hat{\eta}_t, \hat{X})$ satisfaz a Condição 1 com $0 \leq \delta < 1$, umas constantes positivas C_1, C_2, ε , e uns conjuntos finitos $A_1, A_2 \in \hat{X}$ se e somente se as seguintes condições são cumpridas:

1. $f(w) = \|w\|^{1+\delta}(C_1 + o(1))$
2. dados t e $w \in \overline{A_1}$ temos

$$\mathbf{E}(f(\hat{\eta}_{t+1}) - f(\hat{\eta}_t) \mid \hat{\eta}_t = w) = \mathbf{E}(\Delta f(w)) \leq -\varepsilon, \quad (3.3.7)$$

3. dado $w \in \overline{A_2}$ temos $|\Delta f(w)| \leq C_2 \|w\|^\delta$.

Usamos $w = (w_1, \dots, w_m)$, $o(1)$ é uma função que converge para 0 quando $\|w\|$ converge para $+\infty$,

$$\|w\| = \left(\sum_{i=1}^m |w_i|^2 \right)^{1/2}$$

e $\bar{A} = \hat{X} \setminus A$.

Condição 2. $(f, \hat{\eta}_t, \hat{X})$ satisfaz a Condição 2 com $0 \leq \delta < 1$, umas constantes positivas $C_1, C_2, \varepsilon, \tilde{\varepsilon}$, $0 < \tilde{\delta} < 1$ e uns conjuntos finitos $A_1, A_2, A_3 \in \hat{X}$ se e somente se $(f, \hat{\eta}_t, \hat{X})$ satisfaz a Condição 1 com as constantes $C_1, C_2, \varepsilon, \delta$ e os conjuntos A_1, A_2 , e dado $w \in \bar{A}_3$ a seguinte condição é cumprida:

$$\mathbf{E}(f(\hat{\eta}_{t+1}) - f(\hat{\eta}_t) \mid \hat{\eta}_t = w) = \mathbf{E}(\Delta f(w)) \leq -\tilde{\varepsilon} \|w\|^{\tilde{\delta}} \quad (3.3.8)$$

Fixamos os parâmetros $\alpha, \beta, \gamma, \theta$, e a árvore com raiz G^r . Portanto, temos as seguintes quatro cadeias de Markov $\tilde{\eta}_t$. Para a primeira cadeia de Markov $\Xi = \langle = \rangle$. Para as outras Ξ é igual a $\langle +\infty \rangle, \langle -\infty \rangle$, e $\langle \emptyset \rangle$. Por $\mathfrak{L}(G^r)$ designamos o conjunto destas quatro cadeias de Markov. Daqui para frente as vezes trabalhamos com algumas árvores com raiz no mesmo tempo. Portanto as vezes usamos a notação $X(G^r), \tilde{X}(G^r), Q(G^r)$, e $\tilde{Q}(G^r)$ no lugar de X, \tilde{X}, Q , e \tilde{Q} respectivamente.

Usamos as seguintes definições.

Condição 3. $(f, \mathfrak{L}(G^r))$ satisfaz a Condição 3 se e somente se existem $0 \leq \delta < 1$, umas constantes positivas $C_1, C_2, C_3, \varepsilon$, e alguns conjuntos finitos $A_1, A_2 \in \tilde{X}(G^r)$ tais que para todo $\hat{\eta}_t \in \mathfrak{L}(G^r)$ segue que $(f, \hat{\eta}_t, \tilde{X}(G^r))$ satisfaz a Condição 1 com as constantes $C_1, C_2, C_3, \varepsilon, \delta$ e os conjuntos A_1, A_2 .

Condição 4. $(f, \mathfrak{L}(G^r))$ satisfaz a Condição 4 se e somente se existem $0 \leq \delta < 1$, umas constantes positivas $C_1, C_2, C_3, \varepsilon, \tilde{\varepsilon}$, $0 < \tilde{\delta} < 1$ e uns conjuntos finitos $A_1, A_2, A_3 \in \tilde{X}(G^r)$ tais que para todo $\hat{\eta}_t \in \mathfrak{L}(G^r)$, segue que $(f, \hat{\eta}_t, \tilde{X}(G^r))$ satisfaz a Condição 2 com as constantes $C_1, C_2, C_3, \varepsilon, \tilde{\varepsilon}, \delta, \tilde{\delta}$ e os conjuntos A_1, A_2, A_3 .

Nossa prova precisa de indução sobre s . Portanto, na realidade precisamos provar o seguinte

Teorema 3.3.3. *Dados qualquer árvore com raiz G^r e quaisquer admissíveis α, β, γ , e θ as seguintes proposições são verdadeiras.*

1. Existe uma função $f : \tilde{X}(G^r) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para $(f, \mathfrak{L}(G^r))$ a Condição 3 é cumprida.
2. Para qualquer Ξ admissível a cadeia de Markov $\tilde{\eta}_t$ é ergódica.

É claro que o Teorema 3.2.3 segue do Teorema 3.3.3. Isto conclui a prova do Teorema 3.2.3. \square

3.3.5 Prova do Teorema 3.3.3

Começamos a prova com os seguintes dois lemas.

Lema 3.3.3. *Seja G^r uma árvore com raiz. Suponhamos que $(f_0, \mathfrak{L}(G^r))$ satisfaz a Condição 3 e λ é uma constante tal que $0 < \lambda < 1$. Então para $(f_0^{1+\lambda}, \mathfrak{L}(G^r))$ a Condição 4 é cumprida.*

Prova. Sejam $0 \leq \delta < 1$, as constantes positivas C_1, C_2, ε , e A_1, A_2 os conjuntos finitos da Condição 3 para $(f_0, \mathfrak{L}(G^r))$.

É fácil verificar que dados $|t| \leq \frac{1}{2}$ e $0 < \lambda < 1$ temos

$$(1+t)^{1+\lambda} \leq 1 + (1+\lambda)t + 2t^2. \quad (3.3.9)$$

Dado $w \in \overline{A_2}$, obtemos

$$\frac{|\Delta f_0(w)|}{f_0(w)} \leq \frac{C_2 \|w\|^\delta}{\|w\|^{1+\delta}(C_1 + o(1))} = \frac{C_2}{C_1 \|w\|} (1 + o(1)). \quad (3.3.10)$$

Usando (3.3.9) e (3.3.10), dado w com $\|w\|$ suficientemente grande temos

$$\begin{aligned} \Delta(f_0^{1+\lambda})(w) &= f_0^{1+\lambda}(w) \left(\left(1 + \frac{\Delta f_0(w)}{f_0(w)} \right)^{1+\lambda} - 1 \right) \\ &\leq f_0^\lambda(w) \Delta f_0(w) \left(1 + \lambda + 2 \frac{\Delta f_0(w)}{f_0(w)} \right) \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Dado $\hat{\eta}_t \in \mathfrak{L}(G^r)$ nós vamos usar os itens 1, 2, 3 da Condição 1 para $(f_0, \hat{\eta}_t, \tilde{X}(G^r))$.

Usando (3.3.11), dado w com $\|w\|$ suficientemente grande, obtemos

$$|\Delta(f_0^{1+\lambda})(w)| \leq C_1^\lambda \|w\|^{\lambda+\lambda\delta} C_2 \|w\|^\delta \left(1 + \lambda + \frac{2C_2}{C_1 \|w\|} + o(1) \right).$$

Portanto, dado $\hat{\eta}_t \in \mathfrak{L}(G^r)$ ítem 3 da Condição 1 for $(f_0^{1+\lambda}, \hat{\eta}_t, \tilde{X}(G^r))$ é cumprido.

Usando (3.3.11) de novo, dado w com $\|w\|$ suficientemente grande, obtemos

$$\mathbf{E}(\Delta(f_0^{1+\lambda})(w)) \leq C_1^\lambda \|w\|^{\lambda+\lambda\delta} (-\varepsilon) \left(1 + \lambda - \frac{2C_2}{C_1 \|w\|} + o(1)\right).$$

Logo, (3.3.8) e o ítem 2 são cumpridos.

Como

$$f_0^{1+\lambda}(w) = (\|w\|^{1+\delta}(C_1 + o(1)))^{1+\lambda} = \|w\|^{1+\delta+\lambda+\lambda\delta}(C_1^{1+\lambda} + o(1)),$$

segue que o ítem 1 é cumprido. \square

Lema 3.3.4. *Suponhamos que $\hat{\eta}_t$ é uma cadeia de Markov irredutível que é também ergódica, \hat{X} é espaço de estados de $\hat{\eta}_t$, e w_0 é um ponto fixo de \hat{X} . Seja ρ uma função em \hat{X} tal que existe um conjunto finito $B \subset \hat{X}$ tal que $w_0 \in B$ e $\rho(w) = 0$ para $w \notin B$. Seja $\varepsilon > 0$. Então existe uma função positiva \tilde{g} em \hat{X} tal que*

- $\mathbf{E}(\tilde{g}(\hat{\eta}_{t+1}) - \tilde{g}(\hat{\eta}_t) \mid \hat{\eta}_t = w) + \rho(w) = -\varepsilon$, para todo $w \in B, w \neq w_0$,
- $\mathbf{E}(\tilde{g}(\hat{\eta}_{t+1}) - \tilde{g}(\hat{\eta}_t) \mid \hat{\eta}_t = w) = 0$, $w \notin B$.

Prova. Seja

$$h(w) = \begin{cases} \rho(w) + \varepsilon & \text{se } w \in B \\ 0 & \text{if } w \notin B. \end{cases}$$

Sejam $R_0 = h(\hat{\eta}_0)$, $R_t = R_{t-1} + h(\hat{\eta}_t)$. Suponhamos que

$$T = \inf\{t \geq 0 : \hat{\eta}_t = w_0\},$$

$$\tilde{g}(w) = \mathbf{E}(R_T \mid \hat{\eta}_0 = w).$$

Como $\hat{\eta}_t$ é ergódica e $h(w) \neq 0$ se e somente se $w \in B$, temos que a função \tilde{g} é limitada. Além disso, dado $w \neq w_0$ temos

$$\mathbf{E}(\tilde{g}(\hat{\eta}_{t+1}) - \tilde{g}(\hat{\eta}_t) \mid \hat{\eta}_t = w) + h(w) = 0.$$

Finalmente, podemos adicionar uma constante para que \tilde{g} seja positiva. \square

Sejam $G^r = (V, E, r)$ e $|V| = s$. A prova é por indução sobre s . Inicialmente precisamos do seguinte

Lema 3.3.5. *Para $s = 2$ o Teorema 3.3.3 vale.*

Prova. Assumimos, sem perda de generalidade, $V = \{1, 2\}$ e $r = 1$. Seja $f(u) = |u|$, onde $|u|$ é a diferença entre as alturas das duas colunas, isto é, $|u| = |x_2 - x_1|$.

Agora vamos verificar que para $(f, \mathfrak{L}(G^r))$ a Condição 3 é cumprida. Temos $u \in \mathbb{Z}$ e $\varepsilon_1 = -1, \varepsilon_2 = 1$. De acordo com as condições de fronteira consideramos quatro casos. Caso de $\Xi = \langle = \rangle$:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_1} &\in \left\{ \frac{\gamma}{2}, \frac{\beta}{2} \right\} \text{ e } \tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_2} = \frac{\alpha}{2} \text{ se } x_2 < x_1; \\ \tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_1} &\in \left\{ \frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2} \right\} \text{ e } \tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_2} = \frac{\gamma}{2} \text{ se } x_2 > x_1; \end{aligned}$$

Caso de $\Xi = \langle +\infty \rangle$:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_1} &= \frac{\beta}{2} \text{ e } \tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_2} = \frac{\alpha}{2} \text{ se } x_2 < x_1; \\ \tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_1} &= \frac{\alpha}{2} \text{ e } \tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_2} = \frac{\gamma}{2} \text{ se } x_2 > x_1; \end{aligned}$$

Caso de $\Xi = \langle -\infty \rangle$:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_1} &= \frac{\gamma}{2} \text{ e } \tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_2} = \frac{\alpha}{2} \text{ se } x_2 < x_1; \\ \tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_1} &= \frac{\beta}{2} \text{ e } \tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_2} = \frac{\gamma}{2} \text{ se } x_2 > x_1; \end{aligned}$$

Caso de $\Xi = \langle \emptyset \rangle$:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_1} &= \frac{\gamma}{2} \text{ e } \tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_2} = \frac{\alpha}{2} \text{ se } x_2 < x_1; \\ \tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_1} &= \frac{\alpha}{2} \text{ e } \tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_2} = \frac{\gamma}{2} \text{ se } x_2 > x_1; \end{aligned}$$

Portanto, dados $\hat{\eta}_t \in \mathfrak{L}(G^r)$ e $u \neq 0$ temos

$$\mathbf{E}(f(\hat{\eta}_{t+1}) - f(\hat{\eta}_t) \mid \hat{\eta}_t = u) = -|\tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_2} - \tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_1}| \leq -\frac{m}{2}.$$

Logo $(f, \mathfrak{L}(G^r))$ satisfaz a Condição 3.

Do Teorema 3.3.1 e o fato que a Condição 3 é cumprida para $(f, \mathfrak{L}(G^r))$, segue que a cadeia de Markov $\tilde{\eta}_t$ é ergódica. \square

Agora, seja $s > 2$. Suponhamos que E^r é o conjunto dos elos incidentes a r . Por $G_1 = (V_1, E_1), \dots, G_k = (V_k, E_k)$ designamos as componentes conectadas do grafo $(V \setminus \{r\}, E \setminus E^r)$. Seja r_i o sitio de G^r tal que $r_i \in V_i$ e $\{r, r_i\} \in E^r$, $i = 1, \dots, k$. Então $(G_1, r_1), \dots, (G_k, r_k)$ são umas árvores com raiz. Seja $H_i = (V_i \cup \{r\}, E_i \cup \{r, r_i\})$, $i = 1, \dots, k$. Então $(H_1, r), \dots, (H_k, r)$ são umas árvores com raiz.

Suponhamos que α, β, γ são os mesmos para

$$Q(G_1^{r_1}), \dots, Q(G_k^{r_k}), Q(H_1^r), \dots, Q(H_k^r),$$

e $Q(G^r)$, os valores de θ são naturalmente induzidos do parâmetro θ de $Q(G^r)$.

Consideramos dois casos.

Caso 1. Seja $k \geq 2$. Então $|V_i \cup \{r\}| < s$. Da hipótese indutiva segue que existem umas funções f_1, \dots, f_k tais que para $(f_i, \mathfrak{L}(H_i^r))$ a Condição 3 é cumprida, $i = 1, \dots, k$. Neste caso precisamos do seguinte

Lema 3.3.6. *Se $k \geq 2$, então existe uma função f tal que para $(f, \mathfrak{L}(G^r))$ a Condição 3 é cumprida.*

Prova. Por δ_i designamos a constante δ da Condição 3 para $(f_i, \mathfrak{L}(H_i^r))$, onde $i = 1, \dots, k$. Como $1 + \delta_i = 2$, segue que existem umas constantes $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ tais que $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, \dots, k$ e

$$(1 + \delta_i)(1 + \alpha_i) = (1 + \delta_j)(1 + \alpha_j) < 2, \text{ para } i, j = 1, \dots, k.$$

Do Lema 3.3.3 segue que para $(f_i^{1+\alpha_i}, \mathfrak{L}(H_i^r))$ a Condição 4 é cumprida, $i = 1, \dots, k$. Seja

$$f(u) = \sum_{i=1}^k f_i^{1+\alpha_i}(u^{(i)}),$$

onde $u = (u^{(1)}, \dots, u^{(k)}) \in \tilde{X}(G^r)$, $u^{(i)} \in \tilde{X}(G_i^{r_i})$, $i = 1, \dots, k$.

Vamos provar que para $(f, \mathfrak{L}(G^r))$ a Condição 3 é cumprida. Portanto, precisamos achar $0 \leq \delta < 1$, umas constantes positivas C_1, C_2, ε , e uns conjuntos finitos $A_1, A_2 \in \tilde{X}(G^r)$ e provar que dado $\hat{\eta}_t \in \mathfrak{L}(G^r)$ os ítems 1, 2, 3 da Condição 1 são cumpridos. A prova que os ítems 1 e 3 são cumpridos é evidente. Logo, precisamos provar que o ítem 2 é cumprido. Portanto, precisamos da seguinte

Proposição 3.3.1. *Existem $\varepsilon > 0$ e um conjunto finito $A_1 \in \tilde{X}(G^r)$ tais que dados $t, w \in \bar{A}_1$, e $\hat{\eta}_t \in \mathfrak{L}(G^r)$ temos*

$$\mathbf{E}(f(\hat{\eta}_{t+1}) - f(\hat{\eta}_t) \mid \hat{\eta}_t = w) \leq -\varepsilon.$$

Prova. Como dado $i \in \{1, \dots, k\}$ a Condição 4 para $(f_i^{1+\alpha_i}, \mathfrak{L}(H_i^r))$ é cumprida (na realidade precisamos de (3.3.7) e o fato que A_1 é finito), segue que existe uma constante $C > 0$ tal que dados $t, w \in \tilde{X}(G^r)$, e $\hat{\eta}_t \in \mathfrak{L}(G^r)$, temos

$$\mathbf{E}(f(\hat{\eta}_{t+1}) - f(\hat{\eta}_t) \mid \hat{\eta}_t = w) \leq C.$$

Portanto, dado $i \in \{1, \dots, k\}$, como para $(f_i^{1+\alpha_i}, \mathfrak{L}(H_i^r))$ a Condição 4 é cumprida (na realidade precisamos de (3.3.8) e o fato que A_3 é finito), segue que dado $\varepsilon > 0$ existem uns conjuntos finitos $A^{(i)} \subset \tilde{X}(H_i^r)$, $i = 1, \dots, k$, tais que dados t ,

$$w \in \tilde{X}(H_1^r) \times \dots \times \tilde{X}(H_{i-1}^r) \times \overline{A^{(i)}} \\ \times \tilde{X}(H_{i+1}^r) \times \dots \times \tilde{X}(H_k^r),$$

e $\hat{\eta}_t \in \mathfrak{L}(G^r)$ temos

$$\mathbf{E}(f(\hat{\eta}_{t+1}) - f(\hat{\eta}_t) \mid \hat{\eta}_t = w) \leq -\varepsilon.$$

Tomamos $A_1 = A^{(1)} \times \dots \times A^{(k)}$. □

Isto completa a prova do Lema 3.3.6. □

Caso 2. Seja $k = 1$. Então $|V_1| < s$. Da hipótese indutiva segue que existe uma função f_1 tal que para $(f_1, \mathfrak{L}(G_1^{r_1}))$ a Condição 3 é cumprida e a cadeia de Markov $\hat{\eta}_t \in \mathfrak{L}(G_1^{r_1})$ é ergódica. Note que para $k = 1$ temos $G^r = H_1^r$. Neste caso precisamos do seguinte

Lema 3.3.7. *Se $k = 1$, então existe uma função f tal que para $(f, \mathfrak{L}(G^r))$ a Condição 3 é cumprida.*

Prova. Fixamos $u_0^+, u_0^- \in \tilde{X}(G^r)$ tais que para cada elo l de $G_1^{r_1}$ tal que l é incidente para r_1 temos $(u_0^+)_l = 1$ e $(u_0^-)_l = -1$. Sabemos que para $(f_1, \mathfrak{L}(G_1^{r_1}))$ a Condição 3 é cumprida. Dado $0 < \varkappa < 1$, do Lema 3.3.3 segue que para $(f_1^{1+\varkappa}, \mathfrak{L}(G_1^{r_1}))$ a Condição 4 é cumprida. Seja $u = (u_I, \tilde{u}) \in \tilde{X}(G^r)$, onde $u_I = x_{r_1} - x_r \in \mathbb{Z}$, $\tilde{u} \in \tilde{X}(G_1^{r_1})$. Suponhamos que

$$f(u) = \tilde{f}(u) + g(u) + f_I(u),$$

onde g é uma função positiva limitada,

$$\tilde{f}(u) = f_1^{1+\varkappa}(\tilde{u}), \text{ e } f_I(u) = |u_I|^{1+\delta}$$

com δ da Condição 4 para $(f_1^{1+\varkappa}, \mathfrak{L}(G_1^{r_1}))$.

Vamos definir a função g e provar que para $(f, \mathfrak{L}(G^r))$ a Condição 3 é cumprida. Portanto, precisamos achar as constantes $C_1, C_2, \varepsilon, \delta$ e os conjuntos finitos $A_1, A_2 \in \tilde{X}(G^r)$, e provar que dado $\hat{\eta}_t \in \mathfrak{L}(G^r)$ os itens 1, 2, 3 da Condição 1 são cumpridos. A prova que os itens 1 e 3 são cumpridos é evidente. Precisamos provar que o item 2 é cumprido. Portanto, vamos provar que existem $\varepsilon > 0$ e um conjunto finito $A_1 \in \tilde{X}(G^r)$ tais que dados $t, w \in \overline{A_1}$, e $\hat{\eta}_t \in \mathfrak{L}(G^r)$ temos

$$\mathbf{E}(f(\hat{\eta}_{t+1}) - f(\hat{\eta}_t) \mid \hat{\eta}_t = w) \leq -\varepsilon. \quad (3.3.12)$$

Procuramos pelo conjunto finito A_1 da forma $A_1 = A'_1 \times A''_1$, onde $A''_1 \subset \tilde{X}(G_1^{r_1})$ e $A'_1 \subset \mathbb{Z}$ são uns conjuntos finitos, $0 \in A'_1, 0 \in A''_1$. Usamos a seguinte fórmula:

$$\begin{aligned} \overline{A_1} &= \overline{A'_1 \times A''_1} = (\overline{A'_1} \times \tilde{X}) \cup (\mathbb{Z} \times \overline{A''_1}) = \\ &= (\overline{A'_1} \cap \mathbb{Z}_+) \times (\tilde{X} \setminus \{u_0^+\}) \cup (\overline{A'_1} \cap \mathbb{Z}_-) \times (\tilde{X} \setminus \{u_0^-\}) \cup \\ &= (\overline{A'_1} \cap \mathbb{Z}_+) \times \{u_0^+\} \cup (\overline{A'_1} \cap \mathbb{Z}_-) \times \{u_0^-\} \cup (\mathbb{Z} \times \overline{A''_1}), \end{aligned}$$

onde $\tilde{X} = \tilde{X}(G_1^{r_1})$, $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \dots\}$, e $\mathbb{Z}_- = \{\dots, -1, 0\}$.

Precisamos das seguintes proposições.

Proposição 3.3.2. *Dado $\varepsilon_1 > 0$ existe uma função g e um conjunto finito $A'_1 \subset \mathbb{Z}$ tal que dados t ,*

$$w \in (\overline{A'_1} \cap \mathbb{Z}_+) \times (\tilde{X}(G_1^{r_1}) \setminus \{u_0^+\}) \cup (\overline{A'_1} \cap \mathbb{Z}_-) \times (\tilde{X}(G_1^{r_1}) \setminus \{u_0^-\}),$$

e $\hat{\eta}_t \in \mathfrak{L}(G^r)$ temos

$$\mathbf{E}(\tilde{f}(\hat{\eta}_{t+1}) + g(\hat{\eta}_{t+1}) - \tilde{f}(\hat{\eta}_t) - g(\hat{\eta}_t) \mid \hat{\eta}_t = w) \leq -\varepsilon_1. \quad (3.3.13)$$

Prova. Seja

$$g(u) = \begin{cases} g^+(\tilde{u}) & \text{se } u_I \leq 0 \\ g^-(\tilde{u}) & \text{se } u_I > 0 \end{cases}$$

Seja $A'_1 = \{0, 1\}$. Note que se

$$\hat{\eta}_t = u \in (\overline{A'_1} \cap \mathbb{Z}_+) \times \tilde{X}(G_1^{r_1}),$$

então $(\hat{\eta}_t)_I > 0$ e $(\hat{\eta}_{t+1})_I > 0$, se

$$\hat{\eta}_t = u \in (\overline{A'_1} \cap \mathbb{Z}_-) \times \tilde{X}(G_1^{r_1}),$$

então $(\hat{\eta}_t)_I \leq 0$ e $(\hat{\eta}_{t+1})_I \leq 0$, onde $(\hat{\eta}_t)_I = u_I$ se $\hat{\eta}_t = u$.

Vamos definir g^+ e provar que dados t ,

$$w \in (\overline{A'_1} \cap \mathbb{Z}_+) \times (\tilde{X}(G_1^{r_1}) \setminus \{u_0^+\}),$$

e $\hat{\eta}_t \in \mathfrak{L}(G^r)$ temos (3.3.13). É fácil ver que precisamos da prova somente para a cadeia de Markov $\hat{\eta}_t$ que é $\tilde{\eta}_t$ para a árvore com raiz $G_1^{r_1}$ com as condições de fronteira $\langle +\infty \rangle$. Como $(\tilde{f}, \mathfrak{L}(G_1^{r_1}))$ satisfaz a Condição 4 (precisamos de (3.3.8)), segue que existe um conjunto finito $B \in \tilde{X}(G_1^{r_1})$ tal que dado $u \in \tilde{X}(G^r)$ com $\tilde{u} \in B$ temos

$$\mathbf{E}(\tilde{f}(\hat{\eta}_{t+1}) - \tilde{f}(\hat{\eta}_t) \mid \hat{\eta}_t = u) \leq -\varepsilon_1.$$

Sabemos que a cadeia de Markov $\hat{\eta}_t$ é ergódica. Aplicando o Lema 3.3.4 e tomando $g^+ = \tilde{g}$, onde \tilde{g} é do Lema 3.3.4 com $w_0 = u_0^+$, $\varepsilon = \varepsilon_1$, o conjunto finito B e

$$\rho(w) = \mathbf{E}(\tilde{f}(\hat{\eta}_{t+1}) - \tilde{f}(\hat{\eta}_t) \mid \hat{\eta}_t = w),$$

$w \in B$, concluímos a prova.

Do modo análogo, definimos g^- e provamos que dado dado t ,

$$w \in (\overline{A'_1} \cap \mathbb{Z}_-) \times (\tilde{X}(G_1^{r_1}) \setminus \{u_0^-\}),$$

e $\hat{\eta}_t \in \mathfrak{L}(G^r)$ temos (3.3.13). Na prova somente temos que substituir a cadeia de Markov $\tilde{\eta}_t$ para a árvore com raiz $G_1^{r_1}$ com as condições de fronteira $\langle +\infty \rangle$ pela cadeia de Markov $\tilde{\eta}_t$ para a árvore com raiz $G_1^{r_1}$ com as condições de fronteira $\langle -\infty \rangle$ e também substituir u_0^+ por u_0^- . \square

Proposição 3.3.3. *Existe um conjunto finito $0 \in A'_1 \subset \mathbb{Z}$ tal que dados t , $w \in \overline{A'_1} \times \tilde{X}(G_1^{r_1})$, e $\hat{\eta}_t \in \mathfrak{L}(G^r)$ temos*

$$\mathbf{E}(f_I(\hat{\eta}_{t+1}) - f_I(\hat{\eta}_t) \mid \hat{\eta}_t = w) \leq w_I^\delta (1 + \delta) \mathbf{E}(|(\hat{\eta}_{t+1})_I| - |(\hat{\eta}_t)_I| \mid \hat{\eta}_t = w) + \frac{2}{|w_I|^{1-\delta}} \quad (3.3.14)$$

Prova. Seja $f_0(w) = |w_I|$. Usando (3.3.9), obtemos

$$\Delta f_I(w) \leq |w_I|^\delta (1 + \delta) \Delta f_0(w) + \frac{2(\Delta f_0(w))^2}{|w_I|^{1-\delta}}. \quad (3.3.15)$$

O calculo do valor médio de (3.3.15) e o uso do fato que $\mathbf{E}(\Delta f_0(w))^2 \leq 1$ completam a prova. \square

Proposição 3.3.4. *Dado $\varepsilon_1 > 0$ existe um conjunto finito $0 \in A'_1 \subset \mathbb{Z}$, tal que dados $t, w \in \overline{A'_1} \times \tilde{X}(G^{r_1})$, e $\hat{\eta}_t \in \mathfrak{L}(G^r)$ temos*

$$\mathbf{E}(f_I(\hat{\eta}_{t+1}) - f_I(\hat{\eta}_t) \mid \hat{\eta}_t = w) \leq \varepsilon_1.$$

Prova. Da nota 4 segue que dados $w \in \tilde{X}(G^r)$ e $\hat{\eta}_t \in \mathfrak{L}(G^r)$ temos

$$\mathbf{E}(|(\hat{\eta}_{t+1})_I| - |(\hat{\eta}_t)_I| \mid \hat{\eta}_t = w) \leq 0,$$

Logo, a aplicação da Proposição 3.3.3 completa a prova. \square

Proposição 3.3.5. *Dado $C > 0$ existe um conjunto finito $0 \in A'_1 \subset \mathbb{Z}$ tal que dados t ,*

$$w \in (\overline{A'_1} \cap \mathbb{Z}_+) \times \{u_0^+\} \cup (\overline{A'_1} \cap \mathbb{Z}_-) \times \{u_0^-\},$$

e $\hat{\eta}_t \in \mathfrak{L}(G^r)$ temos

$$\mathbf{E}(f_I(\hat{\eta}_{t+1}) - f_I(\hat{\eta}_t) \mid \hat{\eta}_t = w) \leq -C.$$

Prova. Se $u \in (\mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}) \times \{u_0^+\}$, então

$$\tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_{r_1}}(G^r) = \frac{\alpha}{s} \text{ e } \tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_r}(G^r) \in \left\{ \frac{\beta}{s}, \frac{\gamma}{s} \right\}.$$

Usando a Nota 4, dados $t, u \in (\mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}) \times \{u_0^+\}$, e $\hat{\eta}_t \in \mathfrak{L}(G^r)$ obtemos

$$\mathbf{E}(|(\hat{\eta}_{t+1})_I| - |(\hat{\eta}_t)_I| \mid \hat{\eta}_t = u) \leq -\frac{m}{s}.$$

Usando a Proposição 3.3.3, escolhemos um conjunto finito $0 \in A'_1 \in \mathbb{Z}$ e concluímos a prova para qualquer $u \in (A'_1 \cap \mathbb{Z}_+) \times \{u_0^+\}$.

Se $u \in (\mathbb{Z}_- \setminus \{0\}) \times \{u_0^-\}$, então

$$\tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_{r_1}}(G^r) = \frac{\gamma}{s} \text{ e } \tilde{Q}_{u, u+\varepsilon_r}(G^r) \in \left\{ \frac{\beta}{s}, \frac{\alpha}{s} \right\}.$$

Do modo análogo como em cima, escolhemos um conjunto finito $0 \in A'_1 \in \mathbb{Z}$ e concluímos a prova para qualquer $u \in (A'_1 \cap \mathbb{Z}_-) \times \{u_0^-\}$. \square

Proposição 3.3.6. *Dados $\varepsilon_1 > 0$ e uma função positiva $g_1 : \tilde{X}(G^r) \rightarrow \mathbb{R}$ existe um conjunto finito $A_1'' \subset \tilde{X}(G_1^{r_1})$ tal que dados $t, w \in \mathbb{Z} \times A_1''$, e $\hat{\eta}_t \in \mathfrak{L}(G^r)$ temos*

$$\mathbf{E}(\tilde{f}(\hat{\eta}_{t+1}) + g_1(\hat{\eta}_{t+1}) + f_I(\hat{\eta}_{t+1}) - \tilde{f}(\hat{\eta}_t) - g_1(\hat{\eta}_t) - f_I(\hat{\eta}_t) \mid \hat{\eta}_t = w) \leq -\varepsilon_1.$$

Prova. Usando a Proposição 3.3.4, temos que existe uma constante C tal que dados $t, u \in \tilde{X}(G^r)$, e $\hat{\eta}_t \in \mathfrak{L}(G^r)$ temos

$$\mathbf{E}(f_I(\hat{\eta}_{t+1}) - f_I(\hat{\eta}_t) \mid \hat{\eta}_t = u) \leq C.$$

Considerando o fato que para $(f_1^{1+\varkappa}, \mathfrak{L}(G_1^{r_1}))$ a Condição 4 é cumprida (precisamos de (3.3.8) e o fato que o conjunto A_3 é finito), concluimos a prova. \square

Vamos terminar a prova do Lema 3.3.7.

Fixamos um $\varepsilon > 0$. Inicialmente, usando a Proposição 3.3.2 e a Proposição 3.3.4, achamos uma função positiva limitada g e um conjunto finito $A_1' \subset \mathbb{Z}$ e provamos (3.3.12) para qualquer

$$w \in (\overline{A_1'} \cap \mathbb{Z}_+) \times (\tilde{X}(G_1^{r_1}) \setminus \{u_0^+\}) \cup (\overline{A_1'} \cap \mathbb{Z}_-) \times (\tilde{X}(G_1^{r_1}) \setminus \{u_0^-\}).$$

Em seguida, usando a Proposição 3.3.5 e o fato que g é limitada, ajustamos o conjunto A_1' e provamos (3.3.12) para qualquer

$$w \in (\overline{A_1'} \cap \mathbb{Z}_+) \times \{u_0^+\} \cup (\overline{A_1'} \cap \mathbb{Z}_-) \times \{u_0^-\}.$$

Finalmente, usando a Proposição 3.3.6 e o fato que g é limitada, achamos o conjunto A_1'' e provamos (3.3.12) para qualquer $w \in \mathbb{Z} \times \overline{A_1''}$. \square

Vamos terminar a prova do Teorema 3.3.3. Usando os Lemas 3.3.6 e 3.3.7 provamos que existe uma função $f : \tilde{X}(G^r) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para $(f, \mathfrak{L}(G^r))$ a Condição 3 é cumprida. Usando o fato que para $(f, \mathfrak{L}(G^r))$ a Condição 3 é cumprida (na realidade precisamos da constante ε , o fato que o conjunto A_1 é finito, e que o item 2 da Condição 1 é cumprido) e o Teorema 3.3.1, provamos que para todos os valores admissíveis de $\alpha, \beta, \gamma, \theta$, e Ξ a cadeia de Markov $\tilde{\eta}_t$ é ergódica. \square

Capítulo 4

Fuga de massa em processos de alcance nulo multidimensionais com taxas aleatórias

4.1 Introdução e resultados

O interesse no comportamento dos sistemas de partículas em meio aleatório cresceu recentemente: Benjamini, Ferrari e Landim (1996, [29]), Evans (1996, [30]) e Ferrari e Krug (1996, [34]) observaram a existência da transição de fase nestes modelos; Benjamini, Ferrari e Landim (1996, [29]), Krug e Seppäläinen (1999, [36]) e Koukkous (1999, [33]) investigaram o comportamento hidrodinâmico dos processos conservativos em meios aleatórios; Landim (1996, [35]) e Bahadoran (1998, [28]) estudaram o mesmo problema para processo não homogêneo assimétrico atrativo; Gielis, Koukkous e Landim (1998, [31]) deduziram as flutuações de equilíbrio de um processo simétrico com alcance nulo num meio aleatório; Andjel, Ferrari, Guiol e Landim (2000, [27]) provaram a convergência à medida invariante maximal para um processo unidimensional totalmente assimétrico com alcance nulo com vizinhos mais próximos em meio aleatório.

Neste capítulo consideramos um processo multi-dimensional com alcance nulo com taxas aleatórias. Seja $S = \mathbb{Z}^d$. Fixamos $0 < c < 1$ e consideramos uma coleção $\lambda = \{\lambda_x\}_{x \in S}$ assumindo valores em $(c, 1]$ tal que $c = \inf_{x \in S} \lambda_x$ e $\lambda_x > c$, para qualquer $x \in S$.

Neste capítulo usamos notação

$$\|x\| = \max_{i=1,\dots,d} |x_i|,$$

aqui $x = (x_1, \dots, x_d) \in S$.

Seja $M > 0$. Suponhamos que $p : S \rightarrow [0, 1]$ é uma função tal que $\sum_{x \in S} p(x) = 1$ e para qualquer x tal que $\|x\| > M$, temos $p(x) = 0$. Vamos supor que existem vetores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d \in S$ com as seguintes propriedades:

- $p(\mathbf{x}_i) > 0, i = 1, \dots, d$,
- $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d$ são linearmente independentes em \mathbb{R}^d .

Consideramos um processo com alcance nulo no meio λ . Isso é um processo de Markov que podemos descrever não formalmente da seguinte maneira. Inicialmente distribuimos partículas em S de algum modo. Se existe pelo menos uma partícula no sítio x , então com taxa $\lambda_x p(y - x)$ uma destas partículas pula para o sítio y .

Para construir o processo de Markov η_t em $X = \mathbb{N}^S$ que corresponde à descrição acima suponhamos que $N_{x,y}(t)$ é uma coleção de processos de Poisson independentes tais que para qualquer $x, y \in S$, $\|x - y\| \leq M$, temos $\mathbf{E}(N_{x,y}(t)) = \lambda_x p(y - x)t$. A evolução de η_t é agora dada pela seguinte regra: se o processo de Poisson $N_{x,y}$ pular no momento t e $\eta_{t-}(x) > 0$, então uma partícula pula de x para y neste momento. Vamos usar notações η e ξ para elementos de X .

O gerador deste processo L_λ , definido por

$$L_\lambda f(\eta) = d\mathbf{E}[f(\eta_t) \mid \eta_0 = \eta] / dt \Big|_{t=0},$$

atua sobre funções cilíndricas f do seguinte modo:

$$(L_\lambda f)(\eta) = \sum_{x \in S} \sum_{y \in S} \lambda_x p(y - x) 1_{\{\eta(x) > 0\}} [f(\eta^{x,y}) - f(\eta)].$$

Na fórmula acima temos $\eta^{x,y} = \eta - \partial_x + \partial_y$, onde ∂_z representa a configuração com exatamente uma partícula no sítio z e a adição de configurações é feita componente por componente.

Seja $\{S_\lambda(t), t \geq 0\}$ o semigrupo associado com o gerador L_λ , i.e.,

$$S_\lambda(t)f(\eta) = \mathbf{E}[f(\eta_t) \mid \eta_0 = \eta].$$

A prova da existência do processo η_t e do processo da Seção 4.2.1 pode ser encontrada em Andjel (1982, [26]) e no apêndice de Andjel (1980, [25]).

Seja v um número real tal que $0 \leq v \leq c$. Então um cálculo (primeira vez observado por Jackson (1957, [32]) no caso finito) mostra que a medida produto $\nu_{\lambda_p, v}$ com marginais

$$\nu_{\lambda, v} \{ \xi : \xi(x) = n \} = \left(\frac{v}{\lambda_x} \right)^n \left(1 - \frac{v}{\lambda_x} \right)$$

é uma medida invariante para o processo.

Para alguns casos sabe-se que o conjunto de todas as medidas invariantes é a envelope convexo do conjunto $\{ \nu_{\lambda, v} : 0 \leq v \leq c \}$. Para o processo totalmente assimétrico com alcance nulo com vizinhos mais próximos em dimensão 1 a prova pode ser encontrada em Andjel, Ferrari, Guiol e Landim (2000, [27]). Em dimensão 1 e 2 com $\sum xp(x) = 0$ é fácil provar o resultado usando o Teorema 1.10 de Andjel (1982, [26]).

Para definir a ordenação parcial padrão para medidas de probabilidade sobre X , primeiro, dizemos que $\eta \leq \xi$ se $\eta(x) \leq \xi(x)$ para todo $x \in S$. Depois dizemos que uma função com valores reais f definida em X é crescente se $\eta \leq \xi$ implica $f(\eta) \leq f(\xi)$. Finalmente, se μ e ν são duas medidas de probabilidade sobre X , dizemos que $\mu \leq \nu$ se $\int f d\mu \leq \int f d\nu$ para toda função crescente cilíndrica limitada f . Neste caso dizemos que ν domina μ .

Para formular o nosso teorema principal precisamos da seguinte condição.

Condição 5. Seja

$$J_n = \{ x \in S : \|x\| \leq n \log n \}, n = 1, 2, \dots$$

Uma medida de probabilidade μ sobre X satisfaz a Condição 5 se e somente se para qualquer constante $\beta > 0$, temos que a soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta n} \sum_{x \in J_n \setminus J_{n-1}} \eta(x) \tag{4.1.1}$$

é finita μ -q.c.

Mais fácil verificar a seguinte

Condição 6. Uma medida de probabilidade μ sobre X satisfaz a Condição 6 se e somente se para alguma constante $0 < \beta_0 < 1$, temos

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \eta(x) \exp(-\|x\|^{1-\beta_0}) = 0 \text{ } \mu\text{-q.c.} \tag{4.1.2}$$

É fácil ver que se μ satisfaz a Condição 6, então μ satisfaz a Condição 5. De fato, usando (4.1.2), obtemos que para algum $0 < \beta_0 < 1$ e qualquer $\beta > 0$, temos que a soma (4.1.1) é finita se a soma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n \log n)^d \exp((n \log n)^{1-\beta_0}) \exp(-\beta n), \quad (4.1.3)$$

é finita. É fácil ver que (4.1.3) converge.

É fácil verificar que se μ satisfaz a Condição 5, então dado t , segue que $\mu S_\lambda(t)$ satisfaz a Condição 5. A mesma coisa é válida para a Condição 6.

Teorema 4.1.1. *Seja \mathbb{P} uma distribuição de λ tal que $\{\lambda_x\}_{x \in S}$ são variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas, λ_0 assume valores em $(c, 1]$, e dado $\varepsilon > 0$ temos $\mathbb{P}(\lambda_0 \in (c, c + \varepsilon)) > 0$. Seja μ uma medida de probabilidade sobre X tal que μ satisfaz a Condição 5. Suponhamos que $\Xi_\lambda = \{\mu S_\lambda(t) : t > 0\}$. Então as seguintes proposições são verdadeiras \mathbb{P} -q.c.*

1. Ξ_λ é tight.
2. Todo limite fraco de Ξ_λ quando t converge para o infinito é dominado por $\nu_{\lambda,c}$.

Finalmente, vamos explicar porque achamos que o teorema é interessante. Sob algumas condições é possível introduzir a densidade assintótica de cada configuração $\rho(\lambda)$, a densidade crítica $\rho^*(\lambda)$ que corresponde à medida invariante $\nu_{\lambda,c}$, e ter $\rho^*(\lambda) < \infty$. O nosso teorema, em particular, está dizendo que se o processo começa com uma medida com uma densidade assintótica acima de $\rho^*(\lambda)$ e converge para alguma medida, então as configurações obtidas usando esta medida tem densidade assintótica menor ou igual a $\rho^*(\lambda)$. Este comportamento é notável porque o processo é *conservativo*, isto é, o número total de partículas é conservado, mas no limite “perde massa”. Mais detalhes em $d = 1$ podem ser encontrados em Andjel, Ferrari, Guiol e Landim (2000, [27]).

Note que de modo análogo o teorema pode ser formulado e provado para um tipo mais geral de processo com alcance nulo. Seja $g : \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty)$ uma função não decrescente tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} g(k) < \infty$, e $g(0) = 0$. O gerador deste processo L_λ atua sobre funções cilíndricas do seguinte modo:

$$(L_\lambda f)(\eta) = \sum_{x \in S} \sum_{y \in S} \lambda_x g(\eta(x)) p(y-x) [f(\eta^{x,y}) - f(\eta)].$$

O processo tem medidas invariantes $\nu_{\lambda,v}$ com as marginais

$$\nu_{\lambda,v}\{\xi : \xi(x) = k\} = \begin{cases} \frac{\gamma_x(v/\lambda_x)^k}{g(1)\dots g(k)} & \text{se } k > 0 \\ \gamma_x & \text{se } k = 0, \end{cases}$$

onde $0 \leq v \leq c$ e $\gamma_x = \gamma_x(\lambda, v)$ é uma constante para normalizar.

4.2 Provas

Na prova temos duas idéias principais. A primeira idéia é introduzir um processo com alcance nulo com um número infinito de partículas em alguns sítios. A segunda é esquecer o tempo e considerar o movimento de cada partícula como uma realização de uma cadeia de Markov em tempo discreto. Então é possível usar o Lema 4.2.3. Finalmente, alguns argumentos de acoplamento são usados.

Para o tipo mais geral de processo com alcance nulo podemos ainda usar as duas idéias, porque podemos assumir $g(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(k) < \infty$ e porque esquecemos do tempo. Detalhes sobre medidas invariantes, acoplamentos e existência dos processos no caso de tipo mais geral podem ser encontrados Andjel (1980, [25]) e (1982, [26]).

4.2.1 Prova do Teorema 4.1.1

Inicialmente, construímos uma família de processos no meio λ e provamos algumas propriedades dos processos. Precisamos das seguintes definições e lemas.

Seja $\alpha > 0$. Suponhamos que $\lambda^\alpha = \{\lambda_x^\alpha\}_{x \in S}$, onde

$$\lambda_x^\alpha = \begin{cases} c + \alpha & \text{se } \lambda_x \leq c + \alpha \\ \lambda_x & \text{se } \lambda_x > c + \alpha. \end{cases}$$

Seja $c^\alpha = \inf_{x \in S} \lambda_x^\alpha = c + \alpha$. Por $\bar{\mathbb{N}}$ designamos todos os números inteiros não negativos junto com o ponto $+\infty$.

Dado $\alpha \geq 0$ consideramos um processo com alcance nulo η_t no meio λ . Para $\alpha = 0$ o processo é o processo η_t definido na Seção 4.1. Usamos a mesma notação η_t para o processo com $\alpha > 0$. O espaço de configuração do processo é $\bar{\mathbb{N}}^S$. O processo novo η_t é definido do mesmo modo que o processo η_t da

Seção 4.1 com as seguintes diferenças. Quando uma partícula pula de (para) um sítio com o número infinito de partículas, então o número de partículas continua a ser infinito. A taxa do pulo de x para y é $\lambda_x^\alpha p(y-x)$. Suponhamos também que qualquer configuração inicial do processo η_t no meio λ tem o número infinito de partículas nos sítios com $\lambda_x^\alpha = c^\alpha$ e um número finito de partículas em todos os outros sítios. Por $\{N_{x,y}^\alpha(t)\}_{x,y \in S}$ designamos o processo de Poisson usado na construção de η_t com o parâmetro α . Sejam L_λ^α o gerador do processo η_t com o parâmetro α e $\{S_\lambda^\alpha(t), t \geq 0\}$ o semigrupo associado ao gerador L_λ^α .

Note que para qualquer $x \in S$, se $\eta_0(x) < \infty$, então para qualquer t , temos $\eta_t(x) < \infty$. Logo o processo η_t realmente evolue em $\mathbb{N}^{S(\lambda,\alpha)}$, onde

$$S(\lambda, \alpha) = \{x \in S : \eta_t(x) < \infty\}.$$

Portanto, podemos considerar uma medida nas configurações iniciais do processo η_t como uma medida em $\mathbb{N}^{S(\lambda,\alpha)}$.

É fácil verificar que a medida produto ν_λ^α com as marginais

$$\nu_\lambda^\alpha\{\xi : \xi(x) = k\} = \begin{cases} \left(\frac{c^\alpha}{\lambda_x^\alpha}\right)^k \left(1 - \frac{c^\alpha}{\lambda_x^\alpha}\right) & \text{se } x \in S(\lambda, \alpha) \\ \mathbf{1}_{\{k=\infty\}} & \text{se } x \in S \setminus S(\lambda, \alpha) \end{cases}$$

é uma medida invariante do processo η_t .

Temos o seguinte plano da prova do teorema. Inicialmente, para cada medida μ em X vamos por em correspondência uma família das medidas μ^α em \bar{X} . As medidas μ^α dominam μ e também dado t , segue que $\mu^\alpha S_\lambda^\alpha(t)$ domina $\mu S_\lambda(t)$. Em seguida, provamos a convergência de $\mu^\alpha S_\lambda^\alpha$ para a medida invariante ν_λ^α . Finalmente, usamos o fato que ν_λ^α converge fracamente para $\nu_{\lambda,c}$ quando α converge para 0. Portanto, precisamos dos seguintes lemas e definições.

A ordenação parcial para as medidas de probabilidade em \bar{X} é definido de modo análogo à ordenação parcial em X . Somente notamos que $+\infty \leq +\infty$ e dado $a \in \mathbb{N}$, temos $a \leq +\infty$. Note que se $\mu \leq \nu$ em X , então $\mu \leq \nu$ em \bar{X} .

À cada medida μ em X vamos por em correspondência uma família de medidas de probabilidade μ^α em \bar{X} , onde $\alpha > 0$ e μ^α é a medida em \bar{X} com os seguintes marginais. Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $A_i \subset X$, $x_i \in S(\lambda, \alpha)$, $i = 1, 2, \dots, n$, então

$$\mu^\alpha(\eta(x_i) \in A_i, i = 1, 2, \dots, n) = \mu(\eta(x_i) \in A_i, i = 1, 2, \dots, n).$$

Seja $x \notin S(\lambda, \alpha)$, então $\mu^\alpha(\eta(x) = \infty) = 1$.

Lema 4.2.1. *Sejam $\alpha > 0$ e $t \geq 0$. Então $\mu S_\lambda(t) \leq \mu^\alpha S_\lambda^\alpha(t)$.*

Lema 4.2.2. *Seja μ uma medida de probabilidade em X tal que a Condição 5 é cumprida para μ . Então para qualquer $\alpha > 0$, temos $\limsup_{t \rightarrow \infty} \mu^\alpha S_\lambda^\alpha(t) \leq \nu_\lambda^\alpha$ \mathbb{P} -q.c.*

Vamos terminar a prova do Teorema 4.1.1. Do Lema 4.2.1 e do fato que para fixos x e N a função $\mathbf{1}_{\eta(x) > N}$ é contínua e crescente, segue que dados $\alpha > 0, x \in S$ e $N > 0$, temos

$$\mu S_\lambda(t) \{\eta(x) > N\} \leq \mu^\alpha S_\lambda^\alpha(t) \{\eta(x) > N\}.$$

Portanto, do Lema 4.2.2, segue que Ξ_λ é tight.

Usando o Lema 4.2.1 e o Lema 4.2.2, obtemos

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \mu S_\lambda(t) \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \mu^\alpha S_\lambda^\alpha(t) \leq \nu_\lambda^\alpha.$$

Para concluir a prova, tem que passar ao limite quando $\alpha \rightarrow 0$. □

4.2.2 Ferramenta principal

Dado $\alpha \geq 0$ consideramos uma cadeia de Markov ζ_n no meio λ . A cadeia de Markov ζ_n tem espaço de estados S e matriz de transição $(p^\alpha(x, y) : x, y \in S)$. Seja

$$p^\alpha(x, y) = \begin{cases} p(y - x) & \text{se } x \in S(\lambda, \alpha), y \in S, x \neq y, \\ 1 & \text{se } x \in S \setminus S(\lambda, \alpha), x = y, \\ 0 & \text{se } x \in S \setminus S(\lambda, \alpha), y \in S, x \neq y. \end{cases}$$

Seja $A \subset S$ um conjunto finito. Por $\tau_A(x)$ designamos o primeiro momento tal tal que a cadeia de Markov ζ_n , começando no ponto x , atinge o conjunto A . Note que $\tau_A(x)$ é um tempo de parada. Lembramos que $\{\lambda_x\}_{x \in S}$ são i.i.d variáveis aleatórias.

Lema 4.2.3. *Dado $\alpha > 0$ existem \mathbb{P} -q.c. $N = N(\lambda, \alpha) \in \mathbb{N}$ e $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(\lambda, \alpha) > 0$ tais que dados $k, m \in \mathbb{N}, x, y \in S$ tais que $k > m > N, x \in J_m \setminus J_{m-1}, y \in S \setminus J_k$, temos*

$$\mathbf{P}(\tau_{S \setminus J_k}(x) < \infty) \leq e^{-\tilde{\beta}(k-m)} \tag{4.2.1}$$

$$\mathbf{P}(\tau_{J_m}(y) < \infty) \leq e^{-\tilde{\beta}(k-m)} \tag{4.2.2}$$

Prova. Sejam $\tilde{C} > 0$ e $\tilde{M} \in \mathbb{N}$. Sejam $\tilde{x} \in \mathbb{Z}^d$ e

$$I_{\tilde{x}} = \{x \in S : \|\tilde{x}(2\tilde{M} + 1) - x\| \leq \tilde{M}\}.$$

Na formulação do lema substituímos J_n com

$$J_n(\tilde{C}, \tilde{M}) = \{x \in S : x \in I_{\tilde{x}}, \|\tilde{x}\| \leq \tilde{C}n \log n\}.$$

Proposição 4.2.1. *O novo lema é equivalente ao lema original.*

Prova. Sejam $b_2 > b_1 > 0$, $a > 0$, e $\gamma > 0$. Seja f uma função tal que

$$\gamma f(a) \log f(a) = a \log a.$$

Como para algum $\varepsilon > 0$ e algum a suficientemente grande, temos

$$\log(f(a))^{1+\varepsilon} \geq \log(f(a) \log f(a)) = \log\left(\frac{a \log a}{\gamma}\right) \geq \log a - \log \gamma,$$

$$f'(a) = \frac{\log(a) + 1}{\gamma(\log f(a) + 1)},$$

segue que existem $C > 0$ e $b > 0$ tais que para todos $b_2 > b_1 > b$, temos

$$f(b_2) - f(b_1) = \int_{b_1}^{b_2} f'(a) da \leq C(b_2 - b_1). \quad (4.2.3)$$

Assumindo

$$\gamma = \frac{\tilde{C}}{2\tilde{M} + 1}$$

e aplicando a desigualdade (4.2.3), concluímos a prova. \square

Lembramos que os vetores $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_d \in S$ são definidos no começo da Seção 4.1. Dado $x \in S$ sejam

$$\begin{aligned} \chi_x &= \{x + \mathbf{x}_1 n_1 + \dots + \mathbf{x}_d n_d : n_1, \dots, n_d \in \mathbb{Z}\}, \\ \chi_x^+ &= \{x + \mathbf{x}_1 v_1 + \dots + \mathbf{x}_d v_d : v_1, \dots, v_d \in \mathbb{R}_+\}, \end{aligned}$$

onde $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$. Seja $G_0 = \bigcap_{x \in I_0} \chi_x^+$.

É fácil ver que existe $\tilde{z} \in \mathbb{Z}^d$ tal que $I_{\tilde{z}} \subset G_0$ e a função $\tilde{z} = \tilde{z}(\tilde{M})$ é um vetor constante para todo \tilde{M} suficientemente grande, isto é, existe um

$\tilde{M} > 0$ tal que dados $\tilde{M}_1 > \tilde{M}$ e $\tilde{M}_2 > \tilde{M}$, temos $\tilde{z}(\tilde{M}_1) = \tilde{z}(\tilde{M}_2)$. Seja $K = \|\tilde{z}\|$.

Suponhamos que $\tilde{M} > M$. Consideramos uma percolação por sítios não orientada no grafo $(\mathbb{Z}^d, E^{(d)})$, onde \mathbb{Z}^d é o conjunto dos sítios do grafo e

$$E^{(d)} = \{\{\tilde{x}, \tilde{y}\} : \tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{Z}^d, \|\tilde{x} - \tilde{y}\| = K + 1\}$$

é o conjunto dos elos.

Seja

$$I_{\tilde{x}}^{big} = \{x \in S : x \in I_{\tilde{y}}, \|\tilde{x} - \tilde{y}\| \leq K\}.$$

Suponhamos que $x \in I_0$. Por O_x designamos o conjunto dos sítios de I_0^{big} tal que a cadeia de Markov ζ_n atinge eles antes de sair de I_0^{big} com probabilidade positiva, isto é,

$$O_x = \{y \in I_0^{big} : \mathbf{P}(\tau_{\{y\}}(x) < \tau_{S \setminus I_0^{big}}(x)) > 0\}.$$

Como existem $s \in \mathbb{N}$ e uns vetores y_1, \dots, y_s tais que $S = \bigcup_{i=1}^s \chi_{y_i}$, segue que existem $s \in \mathbb{N}$ e uns conjuntos $Q_1, \dots, Q_s \subset S$ tais que

- $\{Q_1, \dots, Q_s\} = \{\chi_x \cap I_{\tilde{z}} : x \in I_0\}$,
- dado i temos $Q_i = Q_i(\tilde{M})$ e $|Q_i(\tilde{M})| \rightarrow \infty$ quando $\tilde{M} \rightarrow \infty$,
- a função $s = s(\tilde{M})$ é uma constante para todo \tilde{M} suficientemente grande.

Seja

$$Q_i^{\tilde{x}} = \{x \in S : x - \tilde{x}(2\tilde{M} + 1) \in Q_i\}.$$

Continuamos a definição do modelo de percolação. Cada sítio \tilde{x} é preto ou branco. É branco se e somente se todos os conjuntos

$$Q_1^{\tilde{x}} \cap (S \setminus S(\lambda, \alpha)), \dots, Q_s^{\tilde{x}} \cap (S \setminus S(\lambda, \alpha))$$

não são vazios. Lembramos que $\{\lambda_x : x \in S\}$ são i.i.d. Portanto, existe $\tilde{q} = \tilde{q}(\alpha, \tilde{M}) > 0$ tal que cada sítio é preto com probabilidade \tilde{q} e branco com probabilidade $1 - \tilde{q}$. Todos os sítios são pretos ou brancos mutuamente independente. Note que quando α é fixo, temos $\tilde{q} \rightarrow 1$ quando $\tilde{M} \rightarrow \infty$.

Sejam $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{Z}^d$. Existe um *caminho branco* conectando sítios \tilde{x} e \tilde{y} se existe uma coleção de sítios $(\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ tal que \tilde{x}_i é branco, $i = 0, \dots, n$, $\tilde{x}_0 = \tilde{x}$, $\tilde{x}_n = \tilde{y}$, $\{\tilde{x}_i, \tilde{x}_{i+1}\} \in E^{(d)}$, $i = 0, \dots, n-1$, e não existem i e j tais que $i \neq j$ e $\tilde{x}_i = \tilde{x}_j$. O número n é chamado o comprimento do caminho branco.

Proposição 4.2.2. *Dado $\alpha > 0$ existem $\tilde{M} > M, N_0 > 0$, e $\beta_1 > 0$ tais que dados $\tilde{x} \in \mathbb{Z}^d$ e $N_1 > N_0$, temos que a probabilidade que existe $\tilde{y} \in \mathbb{Z}^d$ tal que $\|\tilde{x} - \tilde{y}\| > N_1$ e existe um caminho branco conectando \tilde{x} e \tilde{y} é menor que $e^{-\beta_1 N_1}$.*

Prova. Sejam $\tilde{x} \in \mathbb{Z}^d$ e $K_1 = \#\{\tilde{y} \in \mathbb{Z}^d : \|\tilde{x} - \tilde{y}\| = K + 1\}$. A proposição segue do lema de Borel-Cantelli e o fato que a probabilidade que existe um caminho de comprimento n do sítio \tilde{x} é menor que $K^n(1 - \tilde{q})^n$, onde o número dos caminhos é majorizado por K^n e $(1 - \tilde{q})^n$ é probabilidade de cada caminho (isto é uma parte da bem conhecida na teoria de percolação prova para o fato que não existe percolação quando o parâmetro de percolação é suficientemente pequeno). Logo, dado $\tilde{M} > M$ suficientemente grande, temos que $1 - \tilde{q}$ é suficientemente pequeno e isto completa a prova. \square

Suponhamos que A_m é o evento que existem $\tilde{x}, \tilde{y} \in \mathbb{Z}^d$ tais que

$$\|\tilde{x}\| > \tilde{C}m \log m, \|\tilde{y}\| \leq \tilde{C}(m - 1) \log(m - 1) + K + 2,$$

e existe um caminho conectando os sítios \tilde{x} e \tilde{y} , $m = 2, 3, \dots$

Proposição 4.2.3. *Dado $\alpha > 0$ existem $\tilde{M} > M$ e $\tilde{C} > 0$ tais que no nosso modelo de percolação a variável aleatória $\sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{1}_{A_m}$ é finita q.c.*

Prova. Seja β_1 da Proposição 4.2.2. Seja $C_1 > 0$ tal que

$$C_1\beta_1 - (d - 1) > 2.$$

Suponhamos que $\tilde{C} > C_1$. Sejam $R_m = \tilde{C}m \log m, K_m = C_1(1 + \log m)$. Note que dado m suficientemente grande, temos $K_m < \lfloor R_m \rfloor - \lceil R_{m-1} \rceil - 2K - 5$. Da Proposição 4.2.2, segue que existem algumas constantes $C_2 > 0$ e $C_3 > 0$ tais que dado m suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_m) &\leq \#\{\tilde{x} \in \mathbb{Z}^d : R_m - K - 1 \leq \|\tilde{x}\| \leq R_m\} \exp(-\beta_1 K_m) \\ &\leq C_2(m \log m)^{d-1} \exp(-\beta_1 K_m) \leq \frac{C_3}{m^2}. \end{aligned}$$

Usando o lema de Borel-Cantelli, concluímos a prova. \square

Vamos terminar a prova do Lema 4.2.3. Suponhamos que

$$a := \min_{x \in I_0} \max_{i=1, \dots, s} \min_{y \in Q_i} \mathbf{P}(\tau_{\{y\}}(x) < \tau_{S \setminus I_0^{big}}(x)),$$

aqui $\alpha = 0$. Lembrando a definição dos conjuntos Q_i , obtemos $a > 0$. Se para alguns m, k tais que $k > m$ os eventos A_m, \dots, A_k não acontecem, então para atingir $J_m(\tilde{C}, \tilde{M})$ de $S \setminus J_k(\tilde{C}, \tilde{M})$ a cadeia de Markov ζ_n tem que passar alguns cubos $I_{\tilde{x}_{m+1}}, \dots, I_{\tilde{x}_k}$, onde $\tilde{x}_{m+1}, \dots, \tilde{x}_k$ são sítios pretos e dado i, j tais que $i \neq j$, temos $\|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j\| > K$. Se a cadeia de Markov ζ_n está em $I_{\tilde{x}}$ e \tilde{x} é um sítio preto, então com probabilidade pelo menos a a cadeia de Markov ζ_n atinge o conjunto $S \setminus S(\lambda, \alpha)$ e para. Em outras palavras, dado $y \in S \setminus J_k(\tilde{C}, \tilde{M})$, temos

$$\mathbf{P}(\tau_{J_m(\tilde{C}, \tilde{M})}(y)) \leq a^{k-m}.$$

De modo análogo pode ser provado que dado $x \in J_m(\tilde{C}, \tilde{M})$, temos

$$\mathbf{P}(\tau_{S \setminus J_k(\tilde{C}, \tilde{M})}(x)) \leq a^{k-m}.$$

Isto conclui a prova. \square

Na Seção 4.2.3 usamos a seguinte conexão entre o processo com alcance nulo η_t e a cadeia de Markov ζ_n . Vamos observar uma partícula que está no sítio x no momento 0. Observamos a partícula nos momentos quando a partícula pula de um sítio para um outro. A posição da partícula depois do pulo número m é ζ_m se $\zeta_0 = x$.

4.2.3 Provas dos lemas

Prova do Lema 4.2.1. Nesta prova usamos a notação η_t^α para o processo η_t com o parâmetro $\alpha > 0$ e a notação η_t para o processo η_t com o parâmetro $\alpha = 0$. Consideramos um acoplamento dos processos η_t e η_t^α . Fixamos uma realização do meio λ . Sejam $\eta_0^\alpha(x) = \eta_0(x)$ se $x \in S(\lambda, \alpha)$ e $\eta_0^\alpha(x) = +\infty$ se $x \in S \setminus S(\lambda, \alpha)$. Podemos obter os processos $N_{x,y}(t)$ e $N_{x,y}^\alpha(t)$ da seguinte maneira. Por $\{M_{x,y}(\cdot) : x, y \in S\}$ designamos uma família de independentes duas-dimensionais processos de Poisson com o parâmetro 1. Sejam

$$\begin{aligned} N_{x,y}(t) &= N_{x,y}([0, t]) = M_{x,y}([0, t] \times [0, p(y-x)\lambda_x]), \\ N_{x,y}^\alpha(t) &= N_{x,y}^\alpha([0, t]) = M_{x,y}([0, t] \times [0, p(y-x)\lambda_x^\alpha]). \end{aligned}$$

Como a taxa do pulo do processo η_t^α do sítio x é maior que a taxa do pulo do processo η_t quando $x \in S \setminus S(\lambda, \alpha)$, isto é, $\eta_t^\alpha(x) = +\infty$, segue que se $\eta_{t-}^\alpha \geq \eta_{t-}$, então $\eta_t^\alpha \geq \eta_t$. Também da definição do acoplamento segue que $\eta_0^\alpha \geq \eta_0$. \square

Prova do Lema 4.2.2. Por (ξ_t, η_t) vamos designar o acoplamento das duas versões do processo η_t , usando a mesma família de processos de Poisson $(N_{x,y}^\alpha(t) : x, y \in S)$. Seja \bar{L}_λ^α o gerador do processo (ξ_t, η_t) . Suponhamos que $\{\bar{S}_\lambda^\alpha : t \geq 0\}$ é um semigrupo associado ao gerador \bar{L}_λ^α .

Como ν_λ^α é uma medida invariante do processo η_t , segue que para provar o Lema 4.2.2 é suficiente provar que dados $\alpha > 0$ e μ tais que a Condição 5 é cumprida, segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\mu^\alpha \times \nu_\lambda^\alpha) \bar{S}_\lambda^\alpha(t) \{(\xi, \eta) : \xi(x) > \eta(x)\} = 0 \quad (4.2.4)$$

para todo $x \in S \setminus S(\lambda, \alpha)$ \mathbb{P} -q.c.

As configurações ξ e η são em princípio não ordenados: existem (possivelmente um infinito número de) sítios $x \in S(\lambda, \alpha)$ tais que $(\xi(x) - \eta(x))^+ > 0$ e (possivelmente um número infinito de) sítios $y \in S(\lambda, \alpha)$ tais que $(\xi(x) - \eta(x))^- > 0$. Dizemos que temos $\xi\eta$ -discrepâncias no primeiro caso e $\eta\xi$ -discrepâncias no segundo.

O número dos partículas acopladas no sítio z no momento t é dado por $\bar{\xi}_t(z) := \min\{\eta_t(z), \xi_t(z)\}$. As $\bar{\xi}$ -partículas se movem como umas partículas regulares (de primeira classe) do processo com alcance nulo. Há no máximo um tipo de discrepâncias em cada sítio no momento do tempo 0. Discrepâncias dos dois tipos se movem como umas partículas de segunda classe, isto é, uma $\xi\eta$ -discrepância pula de x para y com taxa

$$\lambda_x p(y - x) [\mathbf{1}_{\{\xi(x) \geq 1\}} - \mathbf{1}_{\{\bar{\xi}(x) \geq 1\}}]$$

e uma $\eta\xi$ -discrepância pula de x para y com taxa

$$\lambda_x p(y - x) [\mathbf{1}_{\{\eta(x) \geq 1\}} - \mathbf{1}_{\{\bar{\xi}(x) \geq 1\}}].$$

Se uma $\xi\eta$ -discrepância pula de um sítio z ocupado por pelo menos uma $\eta\xi$ -discrepância, então a $\xi\eta$ -discrepância e uma das $\eta\xi$ -discrepâncias em z coalescem numa $\bar{\xi}$ -partícula acoplada em z . A partícula acoplada comporte-se deste momento como uma partícula regular (de primeira classe). Se uma $\xi\eta$ -discrepância pula a um sítio x com o número infinito de partículas, isto é, $x \in S \setminus S(\lambda, \alpha)$, então a $\xi\eta$ -discrepância desaparece. Todas as partículas no sítio $x \in S \setminus S(\lambda, \alpha)$ são $\bar{\xi}$ -partículas. Portanto, qualquer partícula que pula de qualquer sítio $x \in S \setminus S(\lambda, \alpha)$ é uma $\bar{\xi}$ -partícula. A mesma coisa (todo este parágrafo) é a verdade quando os papéis de ξ e η são trocados.

Para provar o lema é suficiente provar que dados $\alpha > 0$, $\varepsilon > 0$, μ tais que eles satisfazem a Condição 5, λ (\mathbb{P} -q.c.), ξ_0 (μ -q.c.), e η_0 (ν_λ^α -q.c.), temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\delta_{\xi_0}^\alpha \times \delta_{\eta_0}^\alpha) \bar{S}_\lambda^\alpha(t) \{(\xi, \eta) : \xi(x) > \eta(x)\} < \varepsilon$$

para todo $x \in S \setminus S(\lambda, \alpha)$, onde δ_ξ é a medida de probabilidade concentrada no elemento ξ de X . De fato, inicialmente, usamos o lema de Levy para obter μ^α em vez de $\delta_{\xi_0}^\alpha$ e ν_λ^α em vez de $\delta_{\eta_0}^\alpha$, em seguida, passamos para o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Assumimos, sem perda de generalidade, que $x = 0$ e $0 \in S(\lambda, \alpha)$. Fixamos $\alpha > 0, \varepsilon > 0$, um meio λ , e uma configuração ξ_0 . Seja $\bar{M} \in \mathbb{N}$. Temos o seguinte plano. Cada $\xi\eta$ -discrepância que está em $J_{\bar{M}}$ no momento zero atinge o conjunto $S \setminus S(\lambda, \alpha)$ e desaparece (a Proposição 4.2.4). Como no momento zero há um número finito de $\xi\eta$ -discrepâncias em $J_{\bar{M}}$, segue que precisa de algum tempo finito (aleatório) para todos eles desaparecer. Portanto, somente as $\xi\eta$ -discrepâncias que estão no conjunto $S \setminus J_{\bar{M}}$ no momento zero podem estar no sítio 0 quando t é grande. Vamos esquecer do tempo e observar somente as trajetórias das $\xi\eta$ -discrepâncias. A probabilidade que pelo menos uma $\xi\eta$ -discrepância que está no conjunto $S \setminus J_{\bar{M}}$ no momento zero atinge o sítio 0 é suficientemente pequeno quando \bar{M} é suficientemente grande (a Proposição 4.2.5).

Logo, para terminar a prova do lema, somente precisamos provar as seguintes duas proposições, onde $\bar{\mathbf{P}}$ é a medida de probabilidade para a família de processos de Poisson $(N_{x,y}^\alpha(t) : x, y \in S)$. Nas provas das proposições usamos algumas definições do começo da Seção 4.2.2.

Proposição 4.2.4. *Cada $\xi\eta$ -discrepância que está em $J_{\bar{M}}$ no momento zero atinge o conjunto $S \setminus S(\lambda, \alpha)$ ($\bar{\mathbf{P}}$ -q.c.)*

Prova. Dado $M \in \mathbb{N}$, seja ζ_n^M uma cadeia de Markov com o parâmetro α no meio λ . A cadeia de Markov ζ_n^M tem espaço de estados J_M e matriz de transição $(q_M(x, y) : x, y \in J_M)$. Seja

$$q_M(x, y) = \begin{cases} p^\alpha(x, y) & \text{se } x, y \in J_M, x \neq y \\ \sum_{z \in J_M} p^\alpha(x, z) & \text{se } x = y \in J_M. \end{cases}$$

Vamos construir um acoplamento das cadeias de Markov ζ_n e ζ_n^M da seguinte maneira. Suponhamos que $x = \zeta_0 = \zeta_0^M \in J_M$. Então $\zeta_m^M = \zeta_m$ se

$m < \tau_{S \setminus J_M}(x)$. Para $m \geq \tau_{S \setminus J_M}(x)$ as cadeias de Markov ζ_n^M e ζ_n evoluem independentemente.

Sejam $A \subset J_M, x \in J_M$. Por $\tau_A^M(x)$ designamos o primeiro momento tal que a cadeia de Markov ζ_n^M começando no sítio x atinge o conjunto A .

Consideramos

$$A_M = \left\{ x \in J_M : \sum_{y \neq x} q_M(x, y) = 0 \right\}.$$

Como o espaço de estados da cadeia de Markov ζ_n^M é finito, segue que

$$\mathbf{P}(\tau_{A_M \cup (S \setminus S(\lambda, \alpha))}^M(x) < \infty) = 1.$$

É fácil ver que se η_n^M atinge algum sítio $x \in A_M \cap S(\lambda, \alpha)$ no momento m , então isto significa que no momento $m + 1$ a cadeia de Markov ζ_n pula fora do conjunto J_M com probabilidade 1. Portanto, todos os caminhos (realizações) da cadeia de Markov ζ_n com $\tau_{S \setminus J_M}(x) = \infty$ atinge o conjunto $J_M \cap (S \setminus S(\lambda, \alpha))$. Passando ao limite quando $M \rightarrow \infty$ e usando o Lema 4.2.3, concluímos a prova. \square

Proposição 4.2.5. *Dado $\alpha > 0$ e $\varepsilon > 0$, existe $\bar{M} \in \mathbb{N}$ tal que a probabilidade que no momento zero no conjunto $S \setminus J_{\bar{M}}$ existe pelo menos uma $\xi\eta$ -discrepância que em algum momento atinge o sítio 0 é menor que ε ($\bar{\mathbf{P}}$ -q.c.)*

Prova. A probabilidade é menor ou igual a

$$\sum_{y \in S(\lambda, \alpha) \setminus J_{\bar{M}}} \xi_0(y) \mathbf{P}(\tau_{\{0\}}(y) < \infty) \quad (4.2.5)$$

Usando o Lema 4.2.3, temos que existem $N \in \mathbb{N}$ e $\tilde{\beta} > 0$ tais que dado $\bar{M} > N$, segue que (4.2.5) é menor ou igual a

$$\sum_{n=\bar{M}}^{\infty} e^{-\tilde{\beta}(n-1)} \sum_{x \in J_n \setminus J_{n-1}} \xi_0(x). \quad (4.2.6)$$

Lembramos que μ satisfaz a Condição 5. Isto completa a prova. \square

Isto termina a prova do Lema 4.2.2. \square

Referências Bibliográficas

- [1] M.V. Menshikov, S.Yu. Popov, V.V. Sisko (2002) On the connection between oriented percolation and contact process *J. Teor. Probab.* **15**, 1, 207-221.
- [2] M.V. Menshikov, S.Yu. Popov, V.V. Sisko, M. Vachkovskaia On a many-dimensional random walk in a rarefied random environment. Submetido.
- [3] M.V. Menshikov V.V. Sisko Models of wave front propagation. Em andamento.
- [4] P.A. Ferrari, V.V. Sisko Loss of mass in multi-dimentional zero-range processes with random rates. Em andamento.
- [5] C. BEZUIDENHOUT AND G.R. GRIMMETT (1991) Exponential decay for subcritical contact and percolation processes. *Ann. Probab.* **19**, 984–1009.
- [6] L. CHAYES AND R.H. SCHONMANN (2000) Mixed percolation as a bridge between site and bond percolation. To appear in: *Ann. Appl. Probab.*
- [7] N. KONNO (1997) Lecture notes on interacting particle systems. *Rokko Lectures in Mathematics* **3**.
- [8] M.V. MENSNIKOV (1986) Coincidence of critical points in percolation problems. *Sov. Math. Doklady* **33**, 856–859.
- [9] M.V. MENSNIKOV (1987) Quantitative estimates and rigorous inequalities for critical points of a graph and its subgraphs. *Probab. Theory Appl.* **32**, 544–547.

- [10] S.A. ZUEV (1987) Bounds for the percolation threshold for a square lattice. *Probab. Theory Appl.* **32**, 551–553.
- [11] T.M. LIGGETT (1985) *Interacting particle systems*. Springer, New York.
- [12] R. DURRETT AND T.M. LIGGETT (1981) The shape of the limit set in Richardson’s growth model. *Ann. Probab.* **9**, 2, 186–193.
- [13] M.V. MENSHIKOV (1985) Estimates of percolation thresholds for lattices in \mathbb{R}^n . *Soviet Math. Docl.* **32**, 2, 368–370.
- [14] O.S.M. Alves, F.P. Machado, S.Yu. Popov (2002) The shape theorem for the frog model. *Ann. Appl. Probab.* **12** (2), 533–546.
- [15] F. den Hollander, M.V. Menshikov, S.Yu. Popov (1999) A note on transience versus recurrence for a branching random walk in random environment. *J. Statist. Phys.* **95** (3/4), 587–614.
- [16] F. den Hollander, M.V. Menshikov, S.E. Volkov (1995) Two problems about random walks in a random field of traps. *Markov Processes Relat. Fields* **1** (2), 185–202.
- [17] S.Yu. Popov (2001) Frogs in random environment. *J. Statist. Phys.* **102** (1/2), 191–201.
- [18] G. Fayolle, V.A. Malyshev and M.V. Menshikov (1995) *Topics in the Constructive Theory of Countable Markov Chains*. Cambridge University Press.
- [19] M.V. Menshikov and S.E. Volkov (1997) Branching Markov chains: qualitative characteristics. *Markov Processes Relat. Fields* **3**, 225–241.
- [20] A.N. Shiryaev (1984) *Probability*. Translated from Russian by R.P. Boas. Springer-Verlag, New York.
- [21] F. Asmussen (1987) *Applied probability and queues*. Wiley, Chichester.
- [22] F.G. Foster (1953) On stochastic matrices associated with certain queuing processes. *Ann. Math. Statist.* **24**, 355–360.

- [23] D.J. Gates and M. Westcott (1993) Markov models of steady crystal growth. *Ann. Appl. Probab.* **3**, 2, 339–355.
- [24] V.A. Malyshev, M.V. Menshikov (1979) Ergodicity, continuity and analyticity of countable Markov chains. *Proc. Moscow Math. Soc.* **39**, 3–48.
- [25] E.D. Andjel (1982) Ph.D. thesis. University of California, Los Angeles, (1980).
- [26] E.D. Andjel (1982) Invariant measures for the zero range process. *Ann. Probab.* **10** 525-547.
- [27] E.D. Andjel, P.A. Ferrari, H. Guiol, C. Landim (2000) Convergence to the maximal invariant measure for a zero-range process with random rates. *Stoch. Process. Appl.* **90** 67-81.
- [28] C. Bahadoran (1998) Hydrodynamical limit for spatially heterogeneous simple exclusion processes. *Probab. Theory Related Fields.* **110** no. 3, 287-331.
- [29] I. Benjamini, P.A. Ferrari, C. Landim (1996) Asymmetric conservative processes with random rates. *Stoch. Proc. Appl.* **61** 181-204.
- [30] M.R. Evans (1996) Bose-Einstein condensation in disordered exclusion models and relation to traffic flow. *Europhys. Lett.* **36** 13-18.
- [31] G. Gielis, A. Koukkous, C. Landim (1998) Equilibrium for zero range process in random environment. *Stoch. Proc. Appl.* **77** 187-205.
- [32] J.R. Jackson (1957) Networks of waiting lines. *Operation Res.* **5** 518-521.
- [33] A. Koukkous (1999) Hydrodynamic behavior of symmetric zero range process with random rates. *Stoch. Proc. Appl.* **84** 297-312.
- [34] J. Krug and P.A. Ferrari (1996) Phase transitions in driven diffusive systems with random rates. *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** 1465-1471.
- [35] C. Landim (1996) Hydrodynamical limit for space inhomogeneous one dimensional totally asymmetric zero range processes. *Ann. Probab.* **24** 599-638.

- [36] T. Seppäläinen and J. Krug (1999) Hydrodynamics and platoon formation for a totally asymmetric exclusion model with particlewise disorder. *J. Statist. Phys.* **95**, no. 3-4, 525-567.