

PROCESSO DE HAMMERSLEY

Jesús E. García

TESE APRESENTADA
AO
INSTITUTO DE MATEMATICA E ESTATISTICA
DA
UNIVERSIDADE DE SAO PAULO
PARA OBTER O GRAU
DE
DOUTOR EM ESTATISTICA

Área de concentração: Probabilidade
Orientador: Pablo Ferrari

Durante a realização deste trabalho o autor recebeu suporte financeiro do
CNPQ

São Paulo, setembro de 2000.

Processo de Hammersley

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Jesús Enrique García e aprovada pela comissão julgadora.

São Paulo, 5 de setembro de 2000.

Banca examinadora:

- Prof. Dr. Pablo Augusto Ferrari (IME-USP)
- Prof. Dr. Luiz Renato Fontes (IME-USP)
- Prof. Dr. Claudio Landim (IMPA)
- Prof. Dra. Maria Eulalia Vares (IMPA)
- Prof. Dr. Pierre Mathieu (CNRS, Marseille)

Agradecimentos

Ao Pablo, pela paciência, entusiasmo e amizade. Ao Herve por ter lido a versão original da tese e ter dado sugestões para o melhoramento dela. A Joachim e Timo pelo estímulo e as proveitosas discussões.

Resumo

Estudamos o processo de Hammersley. Provamos que o perfil de densidade convenientemente renormalizado converge a uma solução fraca de uma equação diferencial não linear tipo Burgers. Essa equação admite uma solução fraca constante num ponto. Com o tempo essa condição inicial é trasladada e é chamada de choque macroscópico. Partindo de medidas produto com densidades diferentes à esquerda e à direita da origem, provenientes de uma das soluções de choque da equação, provamos que existe um choque microscópico que corresponde àquele choque macroscópico. Provamos que a posição do choque é dada pela posição de uma partícula de segunda classe. Calculamos os dois primeiros momentos assintóticos dos fluxos de partículas de primeira e segunda classe e da posição de uma partícula de segunda classe sob condições iniciais de choque.

Abstract

We consider the Hammersley process. We show that the density profile converges to a weak solution of a non linear differential equation. Under shock initial conditions, the weak solution have a discontinuity (shock). We prove that under an initial measure corresponding to the macroscopic shock, there exists a microscopic shock given by the position of a second class particle. We compute the asymptotics of the first two moments for the fluxes of first and second class particles and for the position of a second class particles under shock initial conditions.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Processo de Hammersley	4
1.1.1	Problema de Ulam	4
1.1.2	Representação do Problema de Ulam por um Processo de Poisson no Plano	5
1.1.3	Processo de Hammersley	6
1.1.4	Construção Gráfica	8
1.2	Processo de Bastões	9
1.3	Acoplamento no processo de Hammersley	10
2	Limite Hidrodinâmico	12
3	O Processo visto da Partícula Marcada de Segunda Classe	19
4	Choques	23
4.1	Choque na Equação tipo Burgers	23
4.2	Choque Microscópico	25
5	Variância do Fluxo	31
5.1	O Processo de Hammersley Discreto	32
5.1.1	Partículas Marcadas no Processo de Hammersley Discreto	32
5.1.2	Partículas de Segunda Classe no Processo de Hammersley Discreto	34
5.2	Variância do Fluxo no Processo de Hammersley Discreto	37
5.3	Fluxo no Processo Contínuo	43
5.4	Dependência das Condições Iniciais	45
5.5	Dependência das Condições Iniciais para as Partículas de Segunda Classe	47
6	Variância do Choque	48

7	Apêndice	51
7.1	Processo de Exclusão Simples Completamente Assimétrico . . .	51
7.2	Processo de Hammersley	57

Capítulo 1

Introdução

Aldous e Diaconis definiram o processo de Hammersley para solucionar o problema de Ulam, que consiste em achar o comportamento assintótico da maior subsequência crescente de uma permutação aleatória de n elementos quando n vai para o infinito. Se chamarmos L_n o tamanho de uma subsequência crescente de tamanho maximal de uma permutação aleatória uniforme de n elementos, a solução do problema é $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{n^{1/2}} = 2$. O problema de Ulam pode ser representado por meio de um processo de Poisson no plano: se considerarmos os pontos do processo de Poisson num retângulo $[a, b] \times [c, d]$ estes definem uma permutação aleatória de n elementos, onde n é o número de pontos no retângulo. Portanto, nesta representação, n é aleatório. Para n fixo, basta condicionar $N([a, b] \times [c, d]) = n$. Esta representação dá a ligação entre o problema de Ulam e o processo de Hammersley. O problema de Ulam é equivalente à demonstração de um limite hidrodinâmico (Lei dos

grandes números) para o processo de Hammersley.

Uma configuração do processo de Hammersley consiste de partículas localizadas na reta real. Um estado do processo é uma seqüência enumerável de números reais. A dinâmica do processo pode ser descrita como segue: cada partícula pula para uma posição, escolhida uniformemente entre a posição no instante do pulo e a posição da partícula mais próxima à sua esquerda. O pulo é feito com taxa igual ao comprimento do intervalo entre as duas partículas.

Por esta definição, temos que a ordem entre as partículas é mantida e não temos aniquilação nem criação de partículas durante a evolução do processo.

Aldous e Diaconis [?] e Seppäläinen [?] mostraram que todas as medidas invariantes para o processo são misturas de processos de Poisson homogêneos na reta.

Nosso primeiro resultado é a prova de um limite hidrodinâmico. Quando escalado no tempo e no espaço, a densidade de partículas converge a uma solução fraca da seguinte equação tipo Burgers,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{u(x, t)} = 0,$$

A demonstração é feita em termos da equação equivalente de Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial}{\partial t} U(x, t) - \frac{1}{\frac{\partial}{\partial x} U(x, t)} = 0.$$

Onde u é a derivada de Radon Nikodyn de U . Esta maneira de provar limites hidrodinâmicos foi introduzida por Seppäläinen [?].

Neste processo podemos definir partículas de segunda classe de forma análoga às do processo de exclusão, isto é, consideremos dois processos η_t e ζ_t , acoplados convenientemente e com configurações iniciais $\zeta < \eta$, então $\xi_t = \eta_t - \zeta_t$ é o processo de partículas de segunda classe .

Nosso segundo resultado diz respeito à existência de um choque microscópico. Consideremos $\rho < \lambda$, e $\nu_{\rho,\lambda}$ a medida que corresponde a ter à esquerda da origem um processo de Poisson de parâmetro ρ e à direita um processo de Poisson de parâmetro λ . Esta medida inicial corresponde à condição inicial de choque na equação diferencial anterior. Nosso segundo resultado é a prova de que existe um choque microscópico e que a posição do choque corresponde à de uma partícula de segunda classe que no instante inicial estiver na origem. A prova do teorema segue o espírito da prova em Ferrari [?], mas utilizando neste caso medidas de Palm, pois neste processo a probabilidade de um ponto conter uma partícula é zero.

Nosso terceiro resultado é uma lei dos grandes números para o fluxo (utilizando o limite hidrodinâmico acima). Calculamos o limite da variância do fluxo, apropriadamente renormalizada, tanto para partículas de primeira como de segunda classe e a variância da partícula de segunda classe. Para isto, trabalhamos primeiro numa versão discreta do processo de Hammersley

que no limite resulta no processo de Hammersley contínuo.

1.1 Processo de Hammersley

1.1.1 Problema de Ulam

O problema de Ulam consiste em estimar o comprimento de uma subsequência crescente maximal de uma permutação aleatória de n elementos. Uma permutação aleatória de n elementos é uma permutação π_n dos elementos $\{1, 2, \dots, n\}$, tal que

$$\mathbb{P}(\pi_n(i) = j) = \frac{1}{n} \quad \forall i, j \in 1, \dots, n.$$

Uma subsequência crescente de π_n é uma seqüência

$$\pi(i_1) < \pi(i_2) < \dots < \pi(i_k),$$

com $i_1 < i_2 < \dots < i_k$.

Por exemplo, para a permutação

$$\pi : (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots) \rightarrow (3, 9, 7, 4, 1, 2, 8, 5, 6),$$

a subsequência 3 4 5 6 é uma subsequência crescente de comprimento maximal (assim como a subsequência 1 2 5 6).

Seja $L_n(\pi)$ o comprimento de uma subsequência crescente de comprimento maximal de uma permutação aleatória uniforme de $\{1, 2, \dots, n\}$. O

problema de Ulam consiste em encontrar $\alpha(n)$ e c determinísticas tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{\alpha(n)} = c. \quad (1.1)$$

A solução foi encontrada por Vershik e Kerov [?] e Logan e Shepp [?] e é dada por $\alpha(n) = n^{1/2}$ e $c = 2$. Eles provaram que

$$\frac{EL_n}{n^{1/2}} \rightarrow 2.$$

1.1.2 Representação do Problema de Ulam por um Processo de Poisson no Plano

Consideremos um processo de Poisson homogêneo de parâmetro um em $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ e suponhamos que na região (finita) $[0, x] \times [0, t)$ temos n pontos $(x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n)$ do processo. Isto define uma permutação π com a seguinte regra:

a i -ésima menor coordenada t , corresponde à $\pi(i)$ -ésima menor coordenada x .

Definimos um caminho crescente de $(0, 0)$ a (x, t) como uma subsequência $(x_{i_1}, t_{i_1}), \dots, (x_{i_k}, t_{i_k})$ de $(x_1, t_1), \dots, (x_n, t_n)$, com $x_{i_l} < x_{i_{l+1}}$, $t_{i_l} < t_{i_{l+1}}$, $l = 1, \dots, k - 1$.

Consideremos $L(x, t)$ o maior k para o qual existe um caminho crescente com k pontos de $(0, 0)$ a (x, t) . Se o número de pontos em $[0, x] \times [0, t]$ é $M(x, t)$, temos que

$$L(x, t) = L_{M(x, t)} \quad \text{em distribuição.}$$

Com esta representação do problema de Ulam, Aldous e Diaconis notaram que o limite (1.1) podia ser visto como um limite hidrodinâmico, num processo que eles denominaram processo de Hammersley, pois esse processo esteve implícito num trabalho de Hammersley [?]. Vamos agora definir esse processo.

1.1.3 Processo de Hammersley

Este processo foi introduzido por Aldous e Diaconis [?] e utilizado para encontrar uma nova prova para o limite (1.1) através de um limite hidrodinâmico para este processo. A existência do processo foi provada por Sepäläinen em [?]. A prova de existencia precisa do seguinte espaço de estado:

X é o conjunto das seqüências crescentes de números reais $z = (z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, $z_k \in \mathbb{R}$, tais que $\lim_{k \rightarrow -\infty} k^{-2} z_k = 0$.

Informalmente, o processo evolui da seguinte maneira: *cada partícula z_i pula com uma taxa igual ao comprimento do intervalo (z_{i-1}, z_i) , a uma posição escolhida uniformemente neste intervalo.*

Formalmente, definimos a evolução do processo através de um processo pontual de Poisson de parâmetro 1 sobre $\mathbb{R} \times (0, \infty)$. Fixemos P uma realização deste processo e sejam $s < t, a < b$ tais que $C = (a, b] \times (s, t]$ seja finito, denotamos por $\Delta(a, b, s, t)$ ao conjunto dos caminhos crescentes em $C \cap P$. Seja $\gamma \in \Delta(a, b, s, t)$ e $\|\gamma\|$ o número de pontos em γ , definimos:

$$L(a, b, s, t) = \max\{\|\gamma\| : \gamma \in \Delta(a, b, s, t)\}$$

e

$$\Gamma((a, s), t, k) = \inf\{h > 0 : L(a, a + h, s, t) > k\},$$

isto é, a menor distância horizontal tal que o caminho tem tamanho maior ou igual a k . Então, Sepäläinen em [?] prova que dada uma seqüência inicial $\sigma^0 = (\sigma_k^0)_{k \in \mathbb{Z}}$,

$$\sigma_k(t) = \inf_{i \leq k} \{\sigma_i^0 + \Gamma((\sigma_i^0, 0), t, k - i)\} \quad (1.2)$$

define a evolução do processo.

O processo de Hammersley é um processo de Markov definido sobre X com gerador

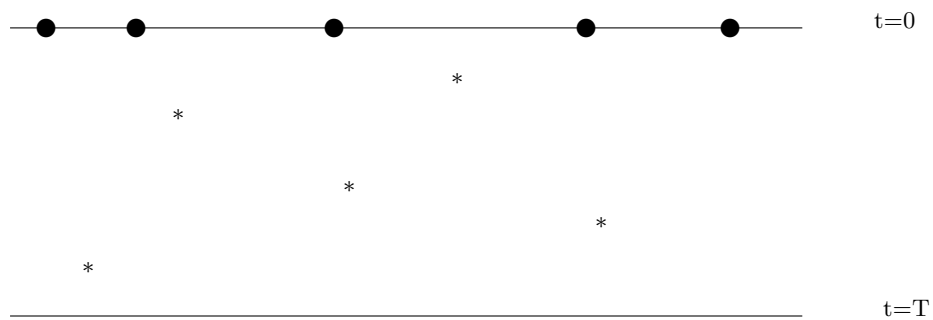
$$\Omega f(\sigma) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{\sigma_{i-1}}^{\sigma_i} du [f(\sigma^{u,i}) - f(\sigma)],$$

onde $\sigma_k^{u,i} = \begin{cases} \sigma_k & \text{se } k \neq i, \\ u & \text{se } k = i \end{cases}$.

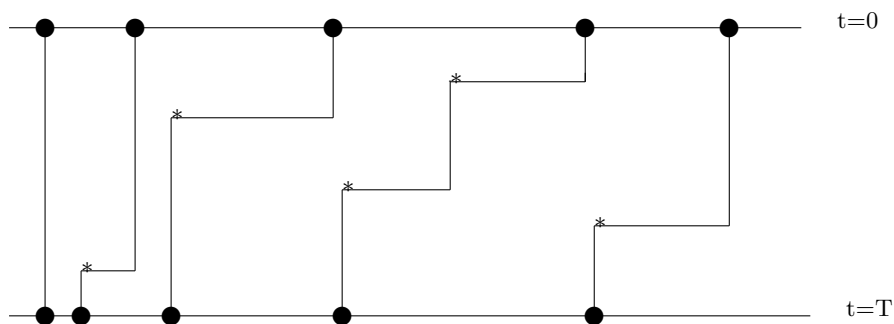
1.1.4 Construção Gráfica

Seja P um processo de Poisson no Plano, η uma configuração inicial, $k \in Z$ e $t \in \mathbb{R}^+$. Usando (1.2), obtemos $z_k(s)$, para $0 \leq s \leq t$. Agora, para z_{k+1} , obtemos o caminho utilizando a seguinte regra: quando houver uma marca do processo P no intervalo (z_k, z_{k+1}) , a partícula z_{k+1} vai pular para a posição da marca.

Por exemplo, para o seguinte gráfico:



a construção gráfica poderia resultar nas seguintes trajetórias para as partículas:



1.2 Processo de Bastões

Existe um outro processo relacionado com o processo de Hammersley, o chamado processo de bastões. Este é um processo sobre Z onde os estados são configurações $\eta = (\eta_i)_{i \in Z}$, $\eta_i > 0, \eta_i \in R$, tal que

$$\lim_{k \rightarrow -\infty} k^{-2} \sum_{i=0}^k \eta_i = 0.$$

A evolução do processo é a seguinte: para cada sítio $i \in Z$, o bastão η_i quebra-se com taxa η_i , e uma parte de tamanho u do bastão η_i é tirada desse bastão e agregada ao bastão η_{i+1} , u é escolhido uniformemente no intervalo $(0, \eta_i)$.

A relação entre este processo e o de Hammersley é que se z_t é um processo de Hammersley, pegando $\eta_i(t) = z_{i+1}(t) - z_i(t)$, η_t é um processo de bastões (i.e., o comprimento do i -ésimo bastão é a distancia entre z_i e z_{i+1}).

O gerador para este processo tem a expressão

$$\Omega f(\eta) = \sum_{i \in Z} \int_0^{\eta_i} du [f(\eta^{u,i,i+1}) - f(\eta)],$$

onde

$$\eta_k^{u,i,i+1} = \begin{cases} \eta_k & \text{se } k \neq i, i+1 \\ \eta_k - u & \text{se } k = i \\ \eta_k + u & \text{se } k = i+1 \end{cases}.$$

O processo assim definido é Feller e tem como medida invariante um processo de Poisson em \mathbb{R} .

Escalado no espaço e no tempo, o perfil do processo de bastões converge a uma solução fraca da equação de Burgers:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mu(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}\mu(x, t)^2 = 0,$$

onde $\mu(x, t)$ é uma função a valores reais definida para $(x, t) \in R \times (0, \infty)$ (ver referência [1]). A definição de solução fraca está no capítulo 2.

1.3 Acoplamento no processo de Hammersley

Na construção gráfica, fixemos uma realização P do processo de Poisson no plano, e consideremos duas configurações iniciais $\sigma = \{\sigma_i\}_{i \in Z}$ e $\zeta = \{\zeta_j\}_{j \in Z}$, tal que $\sigma \subset \zeta$ como conjuntos, que denotaremos por $\sigma \leq \zeta$. Agora faremos com que essas duas configurações evoluam segundo a construção gráfica usando a realização P do processo de Poisson. Teremos então que $\sigma_t \leq \zeta_t$, para todo t , pois suponhamos que $\sigma_s \leq \zeta_s$ e temos uma marca do processo de Poisson em x , então nesse instante a primeira partícula σ à direita de x vai pular para x . O mesmo acontece com ζ . Temos dois casos: se a partícula ζ esta sozinha, ela vai se juntar a uma partícula σ . Neste caso a partícula ζ que estava com σ vai ficar sozinha mas ainda preservando $\sigma \leq \zeta$. Se a partícula ζ estava junta com uma partícula σ , as duas vão pular juntas para x . Temos então que

$$\sigma \leq \zeta \Rightarrow \sigma_t \leq \zeta_t \quad \forall t > 0.$$

Seja $\xi_t = \zeta_t - \sigma_t$ e consideremos (σ_t, ξ_t) . As partículas ξ evoluem da seguinte maneira:

- se temos uma marca e a primeira partícula à direita é uma partícula σ então a partícula pula para a marca;
- se temos uma marca e a primeira partícula à direita é uma partícula ξ então a partícula ξ pula para a posição da primeira partícula σ a sua direita e a partícula σ pula para a marca.

As partículas tipo σ ignoram as de tipo ξ , no entanto estas estão subordinadas às partículas tipo σ .

A interação entre σ_t e ξ_t nos leva a chamar as partículas σ de partículas de primeira classe e as partículas ξ de partículas de segunda classe.

Capítulo 2

Limite Hidrodinâmico

Neste capítulo provamos um limite hidrodinâmico para o processo. Provamos que escalado no tempo e no espaço, o perfil de densidades do processo de Hammersley converge para uma solução fraca da equação diferencial

$$\rho_t + \left(-\frac{1}{\rho}\right)_x = 0,$$

com $\rho(x, 0) = \mu_0(x)$, onde μ_0 é o limite das densidades de partículas das configurações iniciais $\{z_i^N\}_{i \in \mathbb{Z}}$, $z^N \sim \mu_0^N$ escaladas no espaço.

Para provar isso vamos fazer uso de alguns resultados da teoria de Hamilton-Jacobi. Nesta teoria muitos dos resultados exigem que a função de fluxo seja convexa. Em nosso caso, o fluxo é côncavo ($f(\rho) = -1/\rho$), pois definimos o processo com as partículas pulando para a esquerda. Se redefinirmos a dinâmica do processo com as partículas pulando para a direita, a função de fluxo fica convexa ($f(\rho) = 1/\rho$), o que simplifica muito a notação e as

demonstrações, sem modificar a validade dos resultados para o processo de Hammersley clássico.

Portanto, neste capítulo vamos mudar a definição do processo para a seguinte:

- Espaço de estados: seja X o conjunto das seqüências crescentes de números reais $z = (z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, $z_k \in \mathbb{R}$, tais que $\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-2} z_k = 0$.
- Evolução: cada partícula z_i , pula com uma taxa igual à longitude do intervalo (z_i, z_{i+1}) , para uma posição escolhida uniformemente nesse intervalo.

Para este processo, a equação diferencial fica:

$$\rho_t + \left(\frac{1}{\rho} \right)_x = 0. \quad (2.1)$$

Definição 2.1 *Diremos que $u(x, t)$ é uma solução fraca de*

$$\begin{aligned} u_t + (f(u))_x &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x) \end{aligned}$$

se para cada $T > 0$, $\phi \in C_1(\mathbb{R})$ de suporte compacto,

$$\int_{\mathbf{R}} \phi(x) u(x, T) - \int_{\mathbf{R}} \phi(x) u_0(x) - \int_0^T \int_{\mathbf{R}} f(x) \phi_x(x) dx dt = 0.$$

Notemos que em nosso caso, a equação anterior fica

$$\int_{\mathbf{R}} \phi(x) u(x, T) dx - \int_{\mathbf{R}} \phi(x) u_0(x) dx - \int_0^T \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{u(x, t)} \phi_x(x) dx dt = 0. \quad (2.2)$$

Definição 2.2 Diremos que a solução fraca $u(x, t)$ é a solução entrópica de se existe $E > 0$ tal que para todo $t > 0$, x em \mathbb{R} e $a > 0$,

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} \leq \frac{E}{t}.$$

Teorema 2.1 A única solução fraca entrópica de (2.2) é a derivada de Radon-Nikodyn da medida definida pela função (crescente)

$$U(x, t) = \inf_{q > x} \left\{ U_0(q) - 2\sqrt{(q-x)t} \right\},$$

onde

$$U_0(b) - U_0(a) = \int_{[a,b]} u_0(x) dx.$$

Prova: Vamos a utilizar a formulação do problema em termos de uma equação de Hamilton-Jacobi,

$$\begin{aligned} U_t + f(U_x) &= 0, \\ U(x, 0) &= U_0(x), \end{aligned}$$

com $f(u) = 1/u$. Bardi e Evans [?] mostraram que se U_0 é uniformemente Lipschitz e f convexa, então existe uma única solução fraca viscosa desta

equação que é dada por $U(x, t)$:

$$U(x, t) = \inf_{q>x} \sup_y \{U_0(q) + y(x - q) - tf(y)\}.$$

Em nosso caso $f(\rho) = 1/\rho$. Derivando em relação a y a expressão dentro do supremo obtemos que existe um máximo em

$$y^+ = \sqrt{\frac{t}{q-x}}.$$

Portanto, podemos eliminar os supremo em y . Substituindo fica

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \inf_{q>x} \left\{ U_0(q) + \sqrt{\frac{t}{q-x}}(x - q) - t \frac{1}{\sqrt{\frac{t}{q-x}}} \right\}, \\ U(x, t) &= \inf_{q>x} \left\{ U_0(q) - 2\sqrt{t(q-x)} \right\}, \end{aligned}$$

que é a equação que procurávamos.

Vamos denotar $C_0(\mathbb{R})$ ao conjunto de funções de \mathbb{R} contínuas de suporte compato.

Definição 2.3 *Sejam $\{m_n\}$, μ medidas de Radon sobre \mathbb{R} , $m_n \rightarrow \mu$ na topologia vaga se para cada $\phi \in C_0(\mathbb{R})$,*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} m_N(\phi) = \mu(\phi).$$

Definição 2.4 *Seja z uma realização do processo de Hammersley, para cada $\phi \in C_0(\mathbb{R})$, vamos chamar $\alpha_t^N(\phi) = \sum_i \frac{1}{N} \phi\left(\frac{z_i(t)}{N}\right)$.*

Teorema 2.2 *Seja m_0 uma medida de Radon sobre \mathbb{R} tal que :*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 m_0[x, 0) \rightarrow 0.$$

Sejam $\{\mu_0^N\}$ as distribuições iniciais das configurações satisfazendo:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mu_0^N \left\{ z \in Y : \left| \frac{1}{N} \# \{z \cap [Na, Nb]\} - \mu_0[a, b] \right| \geq \varepsilon \right\} = 0,$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $-\infty < a < b < \infty$, e seja $\mu(x, t)$ a solução fraca entrópica da equação diferencial (2.2). Então, para cada $t > 0$, $\alpha_{Nt}^N \rightarrow \mu(x, t) dx$ em probabilidade na topologia vaga das medidas de Radon sobre \mathbb{R} . Isto é, para cada $\phi \in C_0(\mathbb{R})$ e $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P^N \left\{ \left| \alpha_{Nt}^N(\phi) - \int \phi(x) \mu(x, t) dx \right| \geq \varepsilon \right\} = 0.$$

Prova: na prova anterior, mostramos que a solução fraca de (2.2) $u(x, t)$ é a derivada de Radon Nikodym da medida definida por $m_t(a, b) = U(b, t) - U(a, t)$. Então precisamos apenas provar o teorema para $\phi = 1_{[a, b]}$, com $-\infty < a < b < \infty$, i.e.,

$$\alpha_{Nt}^N(\phi) \rightarrow \int_a^b \mu(x, t) dx \text{ em probabilidade quando } N \rightarrow \infty,$$

$$\alpha_{Nt}^N(\phi) = \sum_i \frac{1}{N} 1_{[a, b]} \left(\frac{z_i(tN)}{N} \right), \quad (2.3)$$

que pode ser descrito como o número de partículas no intervalo $[Na, Nb]$ dividido por N . Podemos usar a notação do artigo de Aldous e Diaconis [?].

Seja

$$N(x, t) = \sup \{k : z_k(t) \leq x\},$$

então $N(b, t) - N(a, t)$ é o número de partículas no intervalo $(a, b]$, no instante t . Aldous e Diaconis [?] demonstraram que,

$$N(x, t) = \inf_{z \geq x} \{N(z, 0) - L(z, 0, x, t)\}$$

usando esta notação, a equação (2.3) fica,

$$\alpha_{Nt}^N(\phi) = \frac{1}{N} (N(bN, tN) - N(aN, tN)). \quad (2.4)$$

Nosso problema fica então reduzido a provar que

$$\frac{N(xN, tN)}{N} \rightarrow U(x, t) \text{ em probabilidade,}$$

mas, pela hipótese do teorema, temos que

$$\frac{N(xN, 0)}{N} \rightarrow U_0(x) \text{ em probabilidade.} \quad (2.5)$$

Seppäläinen [?] e Aldous e Diaconis [?] demonstraram que

$$\frac{L(0, 0, xN, tN)}{N} \rightarrow 2\sqrt{xt} \text{ em probabilidade,} \quad (2.6)$$

$$\frac{N(xN, tN)}{N} = \frac{1}{N} \inf_{z \geq xN} \{N(z, tN) - L(z, 0, xN, tN)\},$$

que também pode ser escrito

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{N} \inf_{q \geq x} \{N(qN, tN) - L(qN, 0, xN, tN)\} \\ &= \inf_{q \geq x} \left\{ \frac{N(qN, 0)}{N} - \frac{L(qN, 0, xN, tN)}{N} \right\}. \end{aligned}$$

Por (2.5) e (2.6), o termo dentro do ínfimo converge para

$$U_0(q) - 2\sqrt{(q-x)t}.$$

Portanto, podemos passar o limite para dentro do ínfimo:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N(xN, tN)}{N} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \inf_{q \geq x} \left\{ \frac{N(qN, 0)}{N} - \frac{L(qN, 0, xN, tN)}{N} \right\} \\ &= \inf_{q \geq x} \left\{ U_0(q) - 2\sqrt{(q-x)t} \right\} \\ &= U(x, t). \end{aligned}$$

Capítulo 3

O Processo visto da Partícula Marcada de Segunda Classe

Seja π uma medida invariante por translações para o processo de Hammersley, $\eta \sim \pi$ uma configuração de partículas, $A \subset \mathbb{R}$ finito não vazio, vamos denotar $\eta(A) = \#\{i \in \mathbb{Z} : \eta_i \in A\}$ e $\alpha(\pi) = \pi(\eta(A)) / |A|$, onde $\#$ é o número de elementos no conjunto e $|A|$ é o volume de A .

Definimos agora uma medida π' da seguinte maneira,

$$\int d\pi'(\eta) f(\eta) = \frac{1}{\alpha(\pi)|A|} \int d\pi(\eta) \sum_{\eta_i \in A} \tau_{\eta_i} f(\eta),$$

para toda f limitada e mesurável. Onde τ é a translação

A medida π' pode ser interpretada como a medida π condicionada a ter uma partícula na posição zero (Ver [?]).

Vamos a denotar por ν_ρ a medida de um processo de Poisson de parâmetro ρ .

Definição 3.1 *Diremos que uma medida π_2 tem boas marginais, se*

$$\begin{aligned}\int d\pi_2(\sigma, \xi) f(\sigma) &= \nu_\rho(f), \\ \int d\pi_2(\sigma, \xi) f(\sigma + \xi) &= \nu_\lambda(f).\end{aligned}$$

As medidas ν_ρ e ν_λ são estacionárias. Portanto, se (σ_t, ξ_t) tem boas marginais para $t = 0$, então as terá para todo t .

Vamos construir uma medida com boas marginais.

Seja η um processo de Poisson de parâmetro λ e $\{U_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ variáveis aleatórias independentes, uniformes no intervalo $(0, 1)$; sejam agora os processos:

$$\begin{aligned}\sigma &= \{\eta_i : U_i < \frac{\rho}{\lambda}\} \\ \xi &= \{\eta_i : \frac{\rho}{\lambda} < U_i < 1\}.\end{aligned}$$

Então, σ tem distribuição ν_ρ e $\eta = \sigma + \xi$ tem distribuição ν_λ . Portanto, se chamarmos a distribuição de (σ, ξ) de π_2 , então π_2 tem boas marginais.

A seguir, acoplamos os processos σ e ξ , fazendo que evoluam usando o mesmo processo de Poisson em $\mathbb{R} \times [0, \infty)$.

Chamemos $S_2(t)$ ao semigrupo deste processo.

Seja π'_2 a medida π_2 condicionada a ter uma partícula ξ na origem, isto é, para toda f mensurável e limitada,

$$\int d\pi'_2(\sigma, \xi) f(\sigma, \xi) = \frac{1}{\alpha(\pi_2)|A|} \int d\pi_2(\sigma, \xi) \sum_{\xi_i \in A} \tau_{\xi_i} f(\sigma, \xi),$$

onde $0 < |A| < \infty$.

Seja $(\sigma, \xi) \sim \pi'_2$, portanto $\xi(0) = 1$. Seja $X^\xi(t)$ a posição no tempo t desta partícula ξ , que no instante zero estava na origem. O processo da partícula marcada é o processo visto desta partícula ξ , i.e., o processo $\tau_{X^\xi(t)}(\sigma_t, \xi_t)$. Chamemos $S'_2(t)$ ao semigrupo deste processo. Temos então que para $(\sigma, \xi) \sim \pi'_2$ e f limitada e mensurável,

$$S'_2(t) f(\sigma, \xi) = \int dP^{(\sigma, \xi)}(\sigma, \xi) \tau_{(X^\xi(t), X^\xi(t))} f(\sigma_t, \xi_t),$$

onde as $P^{(\sigma, \xi)}$ são as probabilidades correspondentes ao processo sem marcar.

Teorema 3.1

$$\pi'_2 S'_2(t) = (\pi_2 S_2(t))'$$

Prova (adaptação da prova do Teorema 6.5 de [?]): Seja $A \subset R$, tal que $|A| = 1$,

$$\pi'_2 S'_2(t) f = \int d\pi'_2(\sigma, \xi) S'_2(t) f(\sigma, \xi)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\alpha(\pi_2)} \int d\pi_2(\sigma, \xi) \sum_{\xi_i \in A} \tau_{\xi_i} S'_2(t) f(\sigma, \xi) \\
&= \frac{1}{\alpha(\pi_2)} \int d\pi_2(\sigma, \xi) \sum_{\xi_i \in A} S'_2(t) f((\sigma, \xi) - (\xi_i, \xi_i)) \\
&= \frac{1}{\alpha(\pi_2)} \int d\pi_2(\sigma, \xi) \sum_{\xi_i \in A} \int dP^{(\sigma - \xi_i, \xi - \xi_i)}(\sigma, \xi) \tau_{(X^{(\xi - \xi_i)}(t))} f(\sigma_t, \xi_t).
\end{aligned}$$

Usando a invariância por translações da P , na integral interior, temos que,

$$\begin{aligned}
\pi'_2 S'_2(t) f &= \frac{1}{\alpha(\pi_2)} \int d\pi_2(\sigma, \xi) \sum_{\xi_i \in A} \int dP^{(\sigma - \xi_i, \xi - \xi_i)}(\sigma, \xi) \tau_{(X^{(\xi - \xi_i)}(t))} f(\sigma_t, \xi_t) \\
&= \frac{1}{\alpha(\pi_2)} \int d\pi_2(\sigma, \xi) \sum_{\xi_i \in A} \int dP^{(\sigma, \xi)}(\sigma, \xi) \tau_{\xi_i(t)} f(\sigma_t, \xi_t) \\
&= \frac{1}{\alpha(\pi_2)} \int d\pi_2(\sigma, \xi) \int dP^{(\sigma, \xi)}(\sigma, \xi) \sum_{\xi_i \in A} \tau_{\xi_i(t)} f(\sigma_t, \xi_t) \\
&= (\pi S(t))'(f).
\end{aligned}$$

A última linha segue de $\alpha(\pi_2) = \alpha(\pi_2 S_2(t))$ pois π_2 é invariante.

Capítulo 4

Choques

4.1 Choque na Equação tipo Burgers

Consideremos, na equação diferencial derivada no capítulo anterior para a densidade do processo de Hammersley, o problema com condição inicial,

$$\mu_0(x) = \rho 1_{\{x \leq 0\}} + \lambda 1_{\{x > 0\}},$$

onde $\rho < \lambda$.

Como em [?], a equação é equivalente a

$$u_t + f_x = 0,$$

onde $f(x, t) = -1/u(x, t)$, ou

$$u_t + a(u) u_x = 0,$$

onde $a(u) = 1/u^2$, portanto quando

$$\frac{d}{dt}x(t) = a,$$

u tem que ser constante em $(x(t), t)$, as $x(t)$ que cumplan com esa condição são chamadas curvas características.

Estamos começando com uma descontinuidade na origem, portanto não esperaremos encontrar uma solução continua. Encontraremos uma solução descontínua, mas que será única no sentido de ser a solução entrópica.

Chamemos $y(t)$ à posição da descontinuidade, fixemos t e chamemos $y = y(t)$, u_e e u_d o valor de u à esquerda e à direita de x , respectivamente, $a < x < b$.

Seja,

$$I(t) = \int_a^b u(x, t) dx = \int_a^y u(x, t) dx + \int_y^b u(x, t) dx.$$

Derivando I ,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \int_a^b u_t(x, t) dx \\ &= \int_a^b -f_x(x, t) dx \\ &= -f(u(b, t)) + f(u(a, t)) \\ &= \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\rho} \\ &= \frac{\rho - \lambda}{\lambda\rho}. \end{aligned}$$

Mas,

$$I(t) = \int_a^y u(x, t) dx + \int_y^b u(x, t) dx.$$

Derivando I ,

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \int_a^y u_t(x, t) dx + u_e y_t + \int_y^b u_t(x, t) dx - u_d y_t \\ &= - \int_a^y f_x(x, t) dx + u_e y_t - \int_y^b f_x(x, t) dx - u_d y_t \\ &= -f(u_e) + f(u(a, t)) + u_e y_t - f(u(b, t)) + f(u_d) - u_d y_t \\ &= \rho y_t - \lambda y_t \\ &= y_t (\rho - \lambda). \end{aligned}$$

Logo,

$$y_t = \frac{1}{\rho\lambda}$$

Então, a solução da equação é

$$\mu(x, t) = \rho 1_{\{x \leq Y(t)\}} + \lambda 1_{\{x > Y(t)\}},$$

com $Y(t) = \frac{1}{\rho\lambda}t$ a posição do choque.

4.2 Choque Microscópico

Seja $\rho < \lambda$ e $\nu_{\rho, \lambda}$ a medida que corresponde a ter à esquerda da origem um processo de Poisson de parâmetro ρ e à direita um processo de Poisson de parâmetro λ , esta condição inicial corresponde ao choque na solução da equação diferencial anterior.

Definição 4.1 *Seja $\eta \sim \nu_{\rho,\lambda}$ diremos que uma posição aleatória $X(t)$ é um choque microscópico para η_t se são verificados os seguintes limites uniformes em t ,*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tau_x \mu_t = \nu_\lambda, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \tau_x \mu_t = \nu_\rho,$$

onde μ_t é a distribuição de $\tau_{X(t)} \eta_t$.

Vamos começar construindo essa medida inicial $\nu_{\rho,\lambda}$.

De agora em diante denotaremos por ν_ρ a um processo de Poisson de parâmetro ρ .

Para construir a medida inicial, construímos os processos σ_t e γ_t acoplados de tal maneira que $\sigma \sim \nu_\rho$, $\gamma \sim \nu_{0,\lambda-\rho}$ e $\sigma + \gamma \sim \nu_{\rho,\lambda}$. Seja N um processo pontual de Poisson de parâmetro λ e $\{U_i\}$ iid $U(0,1)$, $\sigma = \{N_i : U_i < \frac{\rho}{\lambda}\}$ e $\gamma = \{N_i : \frac{\rho}{\lambda} < U_i < 1, N_i \geq 0\}$. Então $\eta = \sigma + \gamma$, tem distribuição $\nu_{\rho,\lambda}$. Agora acoplamos os processos fazendo que evoluam, usando o mesmo processo de Poisson em $\mathbb{R} \times [0, \infty)$.

Agora construímos um terceiro processo, $\zeta = \{N_i : \frac{\rho}{\lambda} < U_i < 1, N_i < 0\}$. $\xi = \gamma + \zeta$ tem distribuição $\nu_{\lambda-\rho}$, portanto (σ_t, ξ_t) tem distribuição inicial tal que $\sigma \sim \nu_\rho$, $\sigma + \xi \sim \nu_\lambda$.

Teorema 4.1 *Se η_0 tem distribuição $\nu_{\rho,\lambda}$ e $X(t)$ é a posição de uma partícula de segunda classe com $X(0) = 0$. Então $X(t)$ é um choque microscópico*

para η_t .

Prova: Seja π_2 uma medida com as boas marginais e $(\sigma, \xi) \sim \pi_2$. Se definirmos

$$\eta(x) = \sigma(x) + 1_{\{x>0\}}\xi(x),$$

então $\eta \sim \nu_{\rho,\lambda}$ e fixando a construção gráfica,

$$\eta_t(x) = \sigma_t(x) + 1_{\{x>X(t)\}}\xi_t(x),$$

pois σ_t depende somente de σ_0 e do processo de Poisson bidimensional P da construção gráfica, e não de $X(t)$ nem de ξ . O movimento de cada partícula ξ , somente depende das partículas ξ à sua direita (além de σ e P).

Se $(\sigma', \xi') \sim \pi'_2$, e $\eta'(x) = \sigma'(x) + 1_{\{x>0\}}\xi'(x)$, então $\eta' \sim \nu'_{\rho,\lambda}$ e

$$\eta'_t(x) = \sigma'_t(x) + 1_{\{x>0\}}\xi'_t(x).$$

Portanto, basta provar que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \tau_x (\pi_2 S_2(t))' f(\sigma(r) + 1_{\{r>0\}}\xi(r)) &= \nu_\rho f, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \tau_x (\pi_2 S_2(t))' f(\sigma(r) + 1_{\{r>0\}}\xi(r)) &= \nu_\lambda f, \end{aligned}$$

uniformemente em t . Fixemos t . Como f é cilíndrica, existe $0 < M < \infty$, tal que para $x > M$

$$\begin{aligned} \tau_x f(\sigma(r) + 1_{\{r>0\}}\xi(r)) &= \tau_x f(\sigma), \\ \tau_{-x} f(\sigma(r) + 1_{\{r>0\}}\xi(r)) &= \tau_{-x} f(\sigma + \xi) \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned}\tau_x (\pi_2 S_2(t))' f(\sigma(r) + 1_{\{r>0\}}\xi(r)) &= \tau_x (\pi_2 S_2(t))' f(\sigma), \\ \tau_{-x} (\pi_2 S_2(t))' f(\sigma(r) + 1_{\{r>0\}}\xi(r)) &= \tau_{-x} (\pi_2 S_2(t))' f(\sigma + \xi),\end{aligned}$$

para todo $x > M$. Então temos que provar que

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \tau_x (\pi_2 S_2(t))' f(\sigma) &= \nu_\rho f, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \tau_x (\pi_2 S_2(t))' f(\sigma + \xi) &= \nu_\lambda f,\end{aligned}$$

uniformemente em t . Começamos com o segundo limite. Seja $\{x_i\}$ uma seqüência crescente tal que $x_i \rightarrow \infty$ e $(\sigma, \xi) \sim \pi$, f limitada implica que existe uma subseqüência convergente $\{\tau_{x_{i_n}} f(\sigma + \xi)\}$. Seja L o comprimento do intervalo do qual f depende. Existe uma subsubseqüência $\{x_{i_{n_k}}\}$ tal que $|x_{i_{n_k}} - x_{i_{n_{k-1}}}| > L \forall k$. Então, como σ e ξ são processos de Poisson independentes, $\tau_{x_{i_{n_{k_1}}}} f(\sigma + \xi)$ é independente de $\tau_{x_{i_{n_{k_2}}}} f(\sigma + \xi)$, para todo $k_1 \neq k_2$, e têm a mesma distribuição. Portanto,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tau_{x_{i_{n_k}}} f(\sigma + \xi) = (\pi_2 S_2(t)) f(\sigma + \xi)$$

e

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} (\pi_2 S_2(t)) \sum_{k=1}^N \tau_{x_{i_{n_k}}} f(\sigma + \xi) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} (\pi_2 S_2(t)) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tau_{x_{i_{n_k}}} f(\sigma + \xi) \\ &= (\pi_2 S_2(t)) f(\sigma + \xi) \\ &= \nu_\lambda(f).\end{aligned}$$

Então, a seqüência $(\pi_2 S_2(t)) \tau_{x_{in_k}} f(\sigma + \xi)$ é convergente e o limite de Cesaro é $(\pi_2 S_2(t)) f(\sigma + \xi)$. Portanto, o limite da seqüência é

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} (\pi_2 S_2(t)) \tau_{x_{in_k}} f(\sigma + \xi) = (\pi_2 S_2(t)) f(\sigma + \xi).$$

A convergência não depende em t , so depende do soporte da f e da distribuição de $\sigma + \xi$ que é invariante em t .

Agora, por definição, para todo $A \subset \mathbb{R}$ finito,

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow +\infty} (\pi_2 S_2(t))' \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tau_{x_{in_k}} f(\sigma + \xi) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\pi_2 S_2(t)) (\xi(A))} (\pi_2 S_2(t)) \frac{1}{N} \sum_{\xi_i \in A} \tau_{\xi_i} \sum_{k=1}^N \tau_{x_{in_k}} f(\sigma + \xi) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\pi_2 S_2(t)) (\xi(A))} (\pi_2 S_2(t)) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{\xi_i \in A} \tau_{\xi_i} f(\tau_{x_{in_k}} (\sigma + \xi)). \end{aligned}$$

Pela definição da distância entre configurações no processo de Hammersley, temos que para toda configuração ζ ,

$$d(\zeta, \tau_{\delta/2} \zeta) < \delta.$$

Fixemos $\varepsilon > 0$, f contínua implica que existe δ tal que se $d(\zeta, \chi) < \delta$ então $|f(\zeta) - f(\chi)| < \varepsilon$. Tomemos A tal que $|A| < \delta/2$ (com $0 \in A$). Então, para todo $\xi_i \in A$, $|\xi_i| < \delta/2$ e, portanto, $|f(\zeta) - \tau_{\xi_i} f(\zeta)| < \varepsilon$, para qualquer configuração ζ .

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\pi_2 S_2(t)) (\xi(A))} (\pi_2 S_2(t)) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{\xi_i \in A} \tau_{\xi_i} f(\tau_{x_{in_k}} (\sigma + \xi)) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\pi_2 S_2(t)) (\xi(A))} (\pi_2 S_2(t)) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi(A) (f(\tau_{x_{in_k}} (\sigma + \xi)) \pm \varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\pi_2 S_2(t)) (\xi(A))} (\pi_2 S_2(t)) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi(A) \left(f(\tau_{x_{in_k}}(\sigma + \xi)) \pm \varepsilon \right) \\
&= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\pi_2 S_2(t)) (\xi(A))} (\pi_2 S_2(t)) \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi(A) f(\tau_{x_{in_k}}(\sigma + \xi)) \right) \pm \varepsilon \\
&= \frac{1}{(\pi_2 S_2(t)) (\xi(A))} (\pi_2 S_2(t)) (\xi(A)) (\pi_2 S_2(t)) f(\sigma + \xi) \pm \varepsilon \\
&= (\pi_2 S_2(t)) f(\sigma + \xi) \pm \varepsilon \\
&= \nu_\lambda f \pm \varepsilon,
\end{aligned}$$

onde ε é arbitrário e não depende de t . Portanto,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} (\pi S(t))' \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tau_{x_{in_k}} f(\sigma + \xi) = \nu_\lambda f.$$

O outro limite sai de maneira similar.

Capítulo 5

Variância do Fluxo

Ao longo deste capítulo trabalharemos no caso de medida estacionária. Seja $J_{rt,t}$ o fluxo através da reta rt definido pelo número de partículas que no tempo zero estiveram à esquerda do zero e no tempo t estão à direita da posição rt , menos o número de partículas que no tempo zero estiveram à direita do zero e no tempo t estão à esquerda de rt .

Formalmente, o fluxo no tempo t é

$$J_{rt,t} = \# \{x < 0 : \eta_0(x) = 1, X^x(t) \geq rt\} - \# \{x \geq 0 : \eta_0(x) = 1, X^x(t) < rt\}. \quad (5.1)$$

Queremos mostrar que se r é a velocidade de uma partícula de segunda classe, então:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Var(J_{rt,t})}{t} = 0.$$

Vamos mostrar isso primeiro para a versão discreta do processo de Hammersley e logo deduzir que é verdade para a versão contínua.

5.1 O Processo de Hammersley Discreto

5.1.1 Partículas Marcadas no Processo de Hammersley Discreto

Vamos fixar $h > 0$ (que posteriormente irá para 0) e considerar o processo de Hammersley sobre hZ , com $0 < h \leq 1$, construído sobre o mesmo processo de Poisson em $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ e de parâmetro 1, usado na construção gráfica do contínuo.

No caso discreto, na construção gráfica, quando aparece uma marca do processo de Poisson à esquerda da partícula, se o primeiro ponto de hZ à esquerda da marca estiver vazio a partícula pula ao ponto, se estiver ocupado a partícula não pula.

Seja $X(t)$ a posição de uma partícula marcada, que no tempo zero esteve na posição zero. Precisamos calcular

$$\frac{EX(t)}{t} \quad \text{e} \quad \frac{Var(X(t))}{t}.$$

Na referência [5], é mostrado que $X(t)$ é um processo de Markov com taxas

$$c_{hk}^h = q(x, x - hk) = h(1 - h\rho)^k.$$

Então,

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} \frac{EX(t)}{t} &= - \sum_{k=0}^{\infty} h^2 k (1 - h\rho)^k \\
&= -h^2 \frac{1 - h\rho}{h\rho} \sum_{k=0}^{\infty} k (1 - h\rho)^{k-1} h\rho \\
&= -h^2 \frac{1 - h\rho}{h\rho} \frac{1}{h\rho} \\
&= -\frac{1 - h\rho}{\rho^2}.
\end{aligned}$$

Agora, para a variância,

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{var}(X(t))}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} (hk - EX(t))^2 \frac{p_k^t}{t} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (hk)^2 c_{hk}^h \\
&= h^2 \sum_{k=0}^{\infty} k^2 h (1 - h\rho)^k \\
&= h^3 \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1 - h\rho)^k \\
&= h^3 \frac{1 - h\rho}{h\rho} \sum_{k=0}^{\infty} k^2 (1 - h\rho)^{k-1} h\rho \\
&= \frac{(1 - h\rho)(2 - h\rho)}{\rho^3}.
\end{aligned}$$

Por ser $X(t)$ um processo de Markov, temos que

$$\begin{aligned}
\frac{EX(t)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{EX(t)}{t} \\
&= -\frac{1 - h\rho}{\rho^2}
\end{aligned} \tag{5.2}$$

e para a variância

$$\frac{\text{Var}(X(t))}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{Var}(X(t))}{t}$$

$$= \frac{(1 - h\rho)(2 - h\rho)}{\rho^3}.$$

5.1.2 Partículas de Segunda Classe no Processo de Hamersley Discreto

Seja R_t^h uma partícula de segunda classe que no tempo zero esteve na posição zero, queremos calcular $E(R_t^h)$.

$$\begin{aligned} J_{rt,t}^h &= \# \{k < 0 : \eta_0(hk) = 1, X^{hk}(t) \geq rt\} \\ &\quad - \# \{k \geq 0 : \eta_0(hk) = 1, X^{hk}(t) < rt\} \\ &= \sum_{k < 0} \eta_0(hk) I_{\{X^{hk}(t) \geq rt\}} - \sum_{k \geq 0} \eta_0(hk) I_{\{X^{hk}(t) < rt\}}, \end{aligned}$$

onde $X^{hk}(t)$ é a posição no tempo t da partícula que na configuração inicial estava na posição zero. Os dois termos são finitos com probabilidade 1, portanto,

$$\begin{aligned} E J_{rt,t}^h &= E \left(\sum_{k < 0} \eta_0(hk) I_{\{X^{hk}(t) \geq rt\}} - \sum_{k \geq 0} \eta_0(hk) I_{\{X^{hk}(t) < rt\}} \right) \\ &= E \sum_{k < 0} \eta_0(hk) I_{\{X^{hk}(t) \geq rt\}} - E \sum_{k \geq 0} \eta_0(hk) I_{\{X^{hk}(t) < rt\}}. \end{aligned}$$

Para o primeiro termo,

$$\begin{aligned} E \sum_{k < 0} \eta_0(hk) I_{\{X^{hk}(t) \geq rt\}} &= \sum_{k < 0} E \left(\eta_0(hk) I_{\{X^{hk}(t) \geq rt\}} \right) \\ &= \sum_{k < 0} P \left(X^{hk}(t) \geq rt \right) P \left(\eta_0(hk) = 1 \right) \\ &= h\rho \sum_{k < 0} P \left(X^{hk}(t) \geq rt \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= h\rho \sum_{k>0} P\left(\frac{X^0(t) - rt}{h} \geq k\right) \\
&= h\rho E\left(\frac{X^0(t) - rt}{h}\right)^+ \\
&= \rho E\left(X^0(t) - rt\right)^+. \tag{5.3}
\end{aligned}$$

Da mesma forma, para o segundo termo,

$$\begin{aligned}
E \sum_{k \geq 0} \eta_0(hk) I\{X^{hk}(t) < rt\} &= \sum_{k \geq 0} E\left(\eta_0(hk) I\{X^{hk}(t) < rt\}\right) \\
&= \sum_{k \geq 0} P\left(X^{hk}(t) < rt\right) P(\eta_0(hk) = 1) \\
&= h\rho \sum_{k \geq 0} P\left(X^{hk}(t) < rt\right) \\
&= h\rho \sum_{k \geq 0} P\left(-\frac{X^0(t) - rt}{h} \geq k\right) \\
&= \rho E\left(X^0(t) - rt\right)^-.
\end{aligned}$$

Agora fixamos h e chamamos $J_{rt,t}^\rho$ ao fluxo para o processo ρ . Temos então

$$\begin{aligned}
E J_{rt,t}^\rho &= \rho E\left(X^0(t) - rt\right)^+ - \rho E\left(X^0(t) - rt\right)^- \\
&= \rho E\left(X^0(t) - rt\right)
\end{aligned}$$

e usando (5.2),

$$\begin{aligned}
E J_{rt,t}^\rho &= \rho E\left(X^0(t) - rt\right) \\
&= \rho t \left(-\frac{1 - h\rho}{\rho^2} - r\right) \\
&= \left(-\frac{1 - h\rho}{\rho} - \rho r\right) t.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$E J_{rt,t}^\rho = \left(-\frac{1 - h\rho}{\rho} - \rho r\right) t.$$

Consideremos agora $EJ_{rt,t}^\rho - EJ_{rt,t}^\lambda$,

$$\begin{aligned} EJ_{rt,t}^\rho - EJ_{rt,t}^\lambda &= \left(-\frac{1-h\rho}{\rho} - \rho r + \frac{1-h\lambda}{\lambda} + \lambda r \right) t \\ &= (\rho - \lambda)t \left(-\frac{1-h\rho}{\rho(\rho - \lambda)} + \frac{1-h\lambda}{\lambda(\rho - \lambda)} - r \right). \end{aligned}$$

Também,

$$\begin{aligned} \frac{1-h\rho}{\rho(\rho - \lambda)} - \frac{1-h\lambda}{\lambda(\rho - \lambda)} &= \frac{(1-h\rho)\lambda - (1-h\lambda)\rho}{\rho\lambda(\rho - \lambda)} \\ &= \frac{\lambda - h\rho\lambda - \rho + h\lambda\rho}{\rho\lambda(\rho - \lambda)} \\ &= \frac{\lambda - \rho}{\rho\lambda(\rho - \lambda)} \\ &= -\frac{1}{\rho\lambda} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$E(J_{rt,t}^\rho - J_{rt,t}^\lambda) = t(\rho - \lambda) \left(\frac{1}{\rho\lambda} - r \right).$$

Agora, $J_{rt,t}^\xi = (J_{rt,t}^\rho - J_{rt,t}^\lambda)$, então $EJ_{rt,t}^\xi = t(\rho - \lambda) \left(\frac{1}{\rho\lambda} - r \right)$.

Por outro lado:

$$J_{rt,t}^\xi = \sum_{k<0} \xi_0(hk) I_{\{\xi^{hk}(t) \geq rt\}} - \sum_{k \geq 0} \xi_0(x) I_{\{\xi^{hk}(t) < rt\}}$$

asumindo $r = 0$, temos como antes,

$$EJ_t^\xi = \sum_{k<0} P(\xi_0(hk) I_{\{\xi^{hk}(t) \geq 0\}}) - \sum_{k \geq 0} P(\xi_0(x) I_{\{\xi^{hk}(t) < 0\}})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k < 0} P(\xi_0(0)I_{\{\xi(t) \geq hk\}}) - \sum_{k \geq 0} P(\xi_0(0)I_{\{\xi(t) < hk\}}) \\
&= E(\xi_t I_{\{\xi_0(0)=1\}}) \\
&= (\rho - \lambda)E(\xi_t | \xi_0(0) = 1) \\
&= (\rho - \lambda)ER_t.
\end{aligned}$$

Juntando isto com a formula para EJ_t^ξ que tinhamos achado antes temos,

$$t(\rho - \lambda) \left(\frac{1}{\rho\lambda} \right) = (\rho - \lambda)ER_t$$

e portanto

$$ER_t = \frac{1}{\rho\lambda}t.$$

5.2 Variância do Fluxo no Processo de Hammersley Discreto

Novamente, vamos adaptar ao nosso processo uma prova escrita em [?], que permite escrever a variância do fluxo de partículas em função dos dois primeiros momentos da posição de uma partícula marcada e do valor esperado da posição de uma partícula de segunda classe. Queremos mostrar que

$$\begin{aligned}
VJ_{rt,t}^h &= \rho^2 V X^0(t) - \rho(1 - h\rho)E(X^0(t) - rt) \\
&\quad + 2\rho(1 - h\rho) \left(E(R_t - rt)^+ - E(R_t - X^0(t))^+ \right). \quad (5.4)
\end{aligned}$$

Lembrando de (5.1), podemos escrever $J_{rt,t} = (J_{rt,t})^+ - (J_{rt,t})^-$ com $(J_{rt,t})^+ (J_{rt,t})^- = 0$. Portanto,

$$V J_{rt,t} = V (J_{rt,t})^+ + V (J_{rt,t})^- + 2E (J_{rt,t})^+ E (J_{rt,t})^- .$$

Agora,

$$\begin{aligned} E \left((J_{rt,t})^- \right)^2 &= E \left(\sum_{k \geq 0} \eta_0(hk) I_{\{X^{hk}(t) < rt\}} \right)^2 \\ &= E \sum_{k \geq 0} \eta_0(hk) I_{\{X^{hk}(t) < rt\}} + 2E \sum_{j > k \geq 0} \eta_0(hk) \eta_0(hj) I_{\{X^{hk}(t) < rt\}} I_{\{X^{hj}(t) < rt\}} \\ &= \rho E (X^0(t) - rt)^- + 2 \sum_{j > k \geq 0} E \eta_0(hk) \eta_0(hj) I_{\{X^{hj}(t) < rt\}} \\ &= \rho E (X^0(t) - rt)^- + 2(h\rho)^2 \sum_{j > k \geq 0} \mathbb{P} (X^{hj}(t) < rt) \\ &\quad + 2 \sum_{j > k \geq 0} \left(E \eta_0(hk) \eta_0(hj) I_{\{X^{hj}(t) < rt\}} - (h\rho)^2 \mathbb{P} (X^{hj}(t) < rt) \right) \\ &= A_1 + A_2 + A_3, \end{aligned}$$

a terceira igualdade é devida a (5.3) e ao fato do evento $X^{hk}(t) < rt$ estar incluso no evento $X^{hj}(t) < rt$. Pela invariância por translações,

$$\begin{aligned} A_2 &= 2(h\rho)^2 \sum_{j > k \geq 0} \mathbb{P} (X^{hj}(t) < rt) \\ &= 2\rho^2 h^2 \sum_{j > k \geq 0} \mathbb{P} (X^0(t) - rt < -hj) \\ &= 2\rho^2 h^2 \sum_{j \geq 1} (j) \mathbb{P} (-X^0(t) + rt > hj) \\ &= \rho^2 h^2 \sum_{j \geq 0} 2(j) \mathbb{P} (-X^0(t) + rt > hj) \\ &= \rho^2 h^2 \left(\sum_{j \geq 0} (2j + 1) P (-X^0(t) + rt > hj) - \sum_{j \geq 0} \mathbb{P} (-X^0(t) + rt > hj) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \rho^2 h^2 \left(\sum_{j \geq 0} (2j - 1) \mathbb{P}(-X^0(t) + rt > hj) - \sum_{j \geq 0} \mathbb{P}(-X^0(t) + rt > hj) \right) \\
&= \rho^2 \left(E((X^0(t) - rt)^-) - hE(X^0(t) - rt)^- \right),
\end{aligned}$$

condicionando ao evento $\eta_0(hk) = 1$,

$$\begin{aligned}
A_3(t) &= 2\rho h \sum_{0 \leq k < j} [\mathbb{P}(X_t^{hj} < rt, \eta(hj) = 1 | \eta(hk) = 1) - \mathbb{P}(X_t^{hj} < rt, \eta(hj) = 1)] \\
&= 2\rho h (1 - \rho h) \sum_{0 \leq k < j} [\mathbb{P}(X_t^{hj} < rt, \eta(hj) = 1 | \eta(hk) = 1) \\
&\quad - \mathbb{P}(X_t^{hj} < rt, \eta(hj) = 1 | \eta(hk) = 0)] \\
&= -2\rho h (1 - \rho h) \sum_{0 \leq k < j} [\mathbb{P}(X_t^{hj} < rt, \eta(hj) = 1 | \eta(hk) = 0) \\
&\quad - \mathbb{P}(X_t^{hj} < rt, \eta(hj) = 1 | \eta(hk) = 1)] \\
&= -2\rho h (1 - \rho h) \sum_{0 \leq k < j} E \left(\eta(hj) 1 \{ Z_t^{hj,k} \leq rt < U_t^{hj,k} \} \right),
\end{aligned}$$

onde U_t^{hj} é X_t^{hj} com $\eta(hk) = 1$ e Z_t^{hj} é X_t^{hj} com $\eta(hk) = 0$. A segunda linha sai de considerar $\mathbb{P}(A|B) - \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B^c)(\mathbb{P}(A|B) - \mathbb{P}(A|B^c))$.

Agora, acoplamos dois processos com uma única discrepância (partícula de segunda classe) na posição hk , no instante inicial, e vamos chamar R_t^{hk} a posição da partícula de segunda classe.

Lema 5.1 Para todo $r \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{0 < j} E \left(\eta(hj) 1 \{ Z_t^{hj,0} \leq rt < U_t^{hj,0} \} \right) = \mathbb{P} \left(X_t^0 \leq rt < R_t^0 \right).$$

Prova: A prova é a mesma do lema 2.10 em [?].

Usando o lema temos que

$$A_3(t) = -2\rho h(1 - \rho h) \sum_{0 < k} P(X_t^{hk} \leq rt < R_t^{hk}).$$

Substituindo,

$$\begin{aligned} E((J_{rt,t}^-)^2) &= \rho E(X^0(t) - rt)^- + \rho^2 (E((X^0(t) - rt)^-)^2 - hE(X^0(t) - rt)^-) \\ &\quad - 2\rho h(1 - \rho h) \sum_{0 < k} IP(X_t^{hk} \leq rt < R_t^{hk}) \\ &= \rho E(X^0(t) - rt)^- + \rho^2 (E((X^0(t) - rt)^-)^2 - hE(X^0(t) - rt)^-) \\ &\quad - 2\rho h(1 - \rho h) \left(\sum_{0 < k} IP(X_t^{hk} \leq rt) - \sum_{0 < k} IP(X_t^{hk} \leq rt \geq R_t^{hk}) \right) \\ &= \rho E(X^0(t) - rt)^- + \rho^2 (E((X^0(t) - rt)^-)^2 - hE(X^0(t) - rt)^-) \\ &\quad - 2\rho(1 - \rho h) \left(E(X^0(t) - rt)^- - \sum_{0 < k} IP(R_t^{hk} \leq rt) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{0 < k} IP(X_t^{hk} > rt \geq R_t^{hk}) \right) \\ &= \rho E(X^0(t) - rt)^- + \rho^2 (E((X^0(t) - rt)^-)^2 - hE(X^0(t) - rt)^-) \\ &\quad - 2\rho(1 - \rho h) E(X^0(t) - rt)^- \\ &\quad - 2\rho h(1 - \rho h) \left(E(R^0(t) - rt)^- \frac{1}{h} - \sum_{0 < k} IP(X_t^{hk} > rt \geq R_t^{hk}) \right). \end{aligned}$$

Substituindo em

$$V(J_{rt,t}^-) = E((J_{rt,t}^-)^2) - (E(J_{rt,t}^-))^2,$$

temos

$$V(J_{rt,t}^-) = \rho E(X^0(t) - rt)^- + \rho^2 (E((X^0(t) - rt)^-)^2 - hE(X^0(t) - rt)^-) - (E(J_{rt,t}^-))^2$$

$$\begin{aligned}
& -\rho^2 \left(E(X^0(t) - rt)^- \right)^2 - 2\rho(1 - \rho h) E \left(X^0(t) - rt \right)^- \\
& - 2\rho h(1 - \rho h) \left(E \left(R^0(t) - rt \right)^- \frac{1}{h} - \sum_{0 < k} \mathbb{P} \left(X_t^{hk} > rt \geq R_t^{hk} \right) \right) \\
= & \rho(1 - h\rho) E \left(X^0(t) - rt \right)^- + \rho^2 V \left((X^0(t) - rt)^- \right) \\
& - 2\rho(1 - \rho h) E \left(X^0(t) - rt \right)^- \\
& - 2\rho h(1 - \rho h) \left(E \left(R^0(t) - rt \right)^- \frac{1}{h} - \sum_{0 < k} \mathbb{P} \left(X_t^{hk} > rt \geq R_t^{hk} \right) \right) \\
= & -\rho(1 - h\rho) E \left(X^0(t) - rt \right)^- + \rho^2 V \left((X^0(t) - rt)^- \right) \\
& - 2\rho h(1 - \rho h) \left(E \left(R^0(t) - rt \right)^- \frac{1}{h} - \sum_{0 < k} \mathbb{P} \left(X_t^{hk} > rt \geq R_t^{hk} \right) \right).
\end{aligned}$$

Para $(J_{rt,t})^+$,

$$V(J_{rt,t})^+ = E \left((J_{rt,t})^+ \right)^2 - \left(E(J_{rt,t})^+ \right)^2,$$

$$\begin{aligned}
E \left((J_{rt,t})^+ \right)^2 &= E \left(\sum_{k < 0} \eta_0(hk) I_{\{X^{hk}(t) \geq rt\}} \right)^2 \\
&= E \sum_{k < 0} \eta_0(hk) I_{\{X^{hk}(t) \geq rt\}} + 2E \sum_{j < k < 0} \eta_0(hk) \eta_0(hj) I_{\{X^{hk}(t) \geq rt\}} I_{\{X^{hj}(t) \geq rt\}} \\
&= \rho E \left(X^0(t) - rt \right)^+ + 2 \sum_{j < k < 0} E \eta_0(hk) \eta_0(hj) I_{\{X^{hj}(t) \geq rt\}} \\
&= \rho E \left(X^0(t) - rt \right)^+ + 2(h\rho)^2 \sum_{j < k < 0} \mathbb{P} \left(X^{hj}(t) \geq rt \right) \\
&\quad + 2 \sum_{j < k < 0} \left(E \eta_0(hk) \eta_0(hj) I_{\{X^{hj}(t) \geq rt\}} - (h\rho)^2 \mathbb{P} \left(X^{hj}(t) \geq rt \right) \right) \\
&= A_1 + A_2 + A_3.
\end{aligned}$$

Da mesma forma que para $J_{rt,t}^-$, temos

$$E \left((J_{rt,t})^+ \right)^2 = \rho E \left(X^0(t) - rt \right)^+ + \rho^2 \left(E \left((X^0(t) - rt)^+ \right)^2 - h E \left(X^0(t) - rt \right)^+ \right),$$

$$\begin{aligned}
V(J_{rt,t})^+ &= E((J_{rt,t})^+)^2 - (E(J_{rt,t})^+)^2 \\
&= \rho E(X^0(t) - rt)^+ + \rho^2 (E((X^0(t) - rt)^+)^2) - hE(X^0(t) - rt)^+ \\
&\quad - \rho^2 (E((X^0(t) - rt)^+))^2 \\
&= \rho(1 - h\rho) E(X^0(t) - rt)^+ + \rho^2 V((X^0(t) - rt)^+),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VJ_{rt,t} &= V(J_{rt,t})^+ + V(J_{rt,t})^- + 2E(J_{rt,t})^+ E(J_{rt,t})^- \\
&= \rho(1 - h\rho) E(X^0(t) - rt) + \rho^2 (V((X^0(t) - rt)^-) + V((X^0(t) - rt)^+)) \\
&\quad - 2\rho h(1 - \rho h) \left(\frac{1}{h} E(R^0(t) - rt)^- - \sum_{0 < k} \mathbb{P}(X_t^{hk} > rt \geq R_t^{hk}) \right) \\
&\quad + 2\rho E(X^0(t) - rt)^+ \rho E(X^0(t) - rt)^- \\
&= \rho(1 - h\rho) E(X^0(t) - rt) + \rho^2 V(X^0(t) - rt) \\
&\quad - 2\rho h(1 - \rho h) \left(\frac{1}{h} E(R^0(t) - rt)^- - \sum_{0 < k} \mathbb{P}(X_t^{hk} > rt \geq R_t^{hk}) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{VJ_{rt,t}^h}{t} &= \rho^2 \frac{VX_t^0}{t} - \rho(1 - h\rho) \frac{E(X^0(t) - rt)}{t} \\
&\quad + 2\rho(1 - h\rho) \left(\frac{E(R_t - rt)^-}{t} - \frac{E(R_t - X^0(t))^-}{t} \right) \\
&= \rho^2 \frac{(1 - h\rho)(2 - h\rho)}{\rho^3} - \rho(1 - h\rho) \left(-\frac{(1 - h\rho)}{\rho^2} - r \right) \\
&\quad + 2\rho(1 - h\rho) \left(\frac{E(R_t - rt)^-}{t} - \frac{E(R_t - X^0(t))^-}{t} \right).
\end{aligned}$$

Seja $r \geq \frac{ER_t}{t}$,

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{VJ_{rt,t}^h}{t} &= \rho(1 - h\rho) \left(\frac{(2 - h\rho)}{\rho^2} + \frac{(1 - h\rho)}{\rho^2} + r - 2 \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{(1 - h\rho)}{\rho^2} \right) \right) \\
&= \rho(1 - h\rho) \left(\frac{(2 - h\rho)}{\rho^2} + r - \frac{2}{\rho^2} - \frac{(1 - h\rho)}{\rho^2} \right)
\end{aligned}$$

$$= \rho(1 - h\rho) \left(r - \frac{1}{\rho^2} \right).$$

Seja $r < \frac{ER_t}{t}$,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{VJ_{rt,t}^h}{t} &= \rho(1 - h\rho) \left(\frac{(2 - h\rho)}{\rho^2} + \frac{(1 - h\rho)}{\rho^2} + r + 2 \left(\frac{1}{\rho^2} - r \right) \right) \\ &\quad - 2\rho(1 - h\rho) \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{(1 - h\rho)}{\rho^2} \right) \\ &= \rho(1 - h\rho) \left(\frac{(2 - h\rho)}{\rho^2} + r + -2r - \frac{(1 - h\rho)}{\rho^2} \right) \\ &= \rho(1 - h\rho) \left(\frac{1}{\rho^2} - r \right). \end{aligned}$$

Então,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{VJ_{rt,t}^h}{t} = \begin{cases} \rho(1 - h\rho) \left(\frac{1}{\rho^2} - r \right) & \text{se } \frac{1}{\rho^2} \geq r \\ \rho(1 - h\rho) \left(r - \frac{1}{\rho^2} \right) & \text{se } r \geq \frac{1}{\rho^2} \end{cases},$$

isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{VJ_{rt,t}^h}{t} = \rho(1 - h\rho) \left| \frac{1}{\rho^2} - r \right|,$$

para todo h .

Agora, $\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{VJ_{rt,t}^h}{t} = \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{VJ_{rt,t}^h}{t}$ pois isso acontece para cada uma das componentes de $\frac{VJ_{rt,t}^h}{t}$ portanto tomando limite em h temos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{VJ_{rt,t}}{t} = \rho \left| \frac{1}{\rho^2} - r \right|.$$

5.3 Fluxo no Processo Contínuo

Temos que o fluxo é

$$J_{rt,t} = N(rt, t),$$

portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{J_{rt,t}}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(rt,t)}{t}.$$

Como vimos na seção do limite hidrodinâmico,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(rt,t)}{t} = U(r,1),$$

com

$$U(x,t) = \sup_{q < x} \left\{ U_0(q) + 2\sqrt{(x-q)t} \right\}.$$

Nesta seção consideramos o processo estacionário com um processo de Poisson de parâmetro ρ como distribuição inicial, isto é, $u_0(x) = \rho$. Portanto, U_0 tem que satisfazer

$$U_0(b) - U_0(a) = \int_a^b \rho dx.$$

Sendo $U_0(x) = \rho x$,

$$U(x,t) = \sup_{q < x} \left\{ \rho q + 2\sqrt{(x-q)t} \right\}.$$

O máximo para a expressão dentro do supremo é atingido em

$$q = x - \frac{t}{\rho^2}.$$

Com isso temos

$$U(x,t) = \rho x + \frac{t}{\rho}$$

e, substituindo, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{J_{rt,t}}{t} &= \rho r + \frac{1}{\rho} \\ &= \rho \left(r + \frac{1}{\rho^2} \right). \end{aligned}$$

5.4 Dependência das Condições Iniciais

Seja $N^\eta(a, b)$ o número de partículas η no intervalo (a, b) ie.

$$N^\eta(a, b) = \# \{ \eta \cap (a, b) \}$$

Proposição 5.1 *Seja $J_{0,t}$ o fluxo através de zero no tempo t , para todo $\delta > 0$,*

$$J_{0,t} = N^\eta \left(-\frac{t}{\rho^2}, 0 \right) + \left[2\frac{t}{\rho} \right] + o \left(t^{1/3+\delta} \right),$$

Prova: Vamos utilizar novamente a notação da medida de contagem para o processo de Hammersley,

$$N(x, t) = \sup_{q < x} \{ N(q, 0) + L(q, 0, x, t) \}.$$

Então, podemos escrever

$$J_{0,t} = N(0, t).$$

Vamos utilizar também o seguinte resultado de [?]:

$$z \left([tx] + \left[2\frac{t}{\rho} \right], t \right) = \frac{t}{\rho^2} + z([tx], 0) + o \left(t^{\frac{1}{3}+\delta} \right), \quad (5.5)$$

para todo $\delta > 0$. Temos também a relação:

$$N(x, t) = \sup \{ k : z(k, t) \leq x \},$$

então,

$$N(0, t) = \sup \{ k : z(k, t) \leq 0 \}$$

e

$$N(0, t) = [tx_0] + \left[2\frac{t}{\rho}\right],$$

com

$$\begin{aligned} x_0 &= \sup \left\{ x : \frac{t}{\rho^2} + z(tx, 0) + o(t^{1/3+\delta}) \leq 0 \right\} \\ &= \sup \left\{ x : z(tx, 0) + o(t^{1/3+\delta}) \leq -\frac{t}{\rho^2} \right\}. \end{aligned}$$

Utilizando a relação:

$$N(z(k, t), t) = k,$$

temos

$$\begin{aligned} z(tx, 0) &\leq -\frac{t}{\rho^2} + o(t^{1/3+\delta}) \\ N(z(tx, 0), 0) &\leq N^\eta \left(-\frac{t}{\rho^2} + o(t^{1/3+\delta}), 0 \right) \\ tx &\leq N^\eta \left(-\frac{t}{\rho^2} + o(t^{1/3+\delta}), 0 \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$tx_0 = N^\eta \left(-\frac{t}{\rho^2} + o(t^{1/3+\delta}), 0 \right)$$

e, então,

$$\begin{aligned} N(0, t) &= N^\eta \left(-\frac{t}{\rho^2} + o(t^{1/3+\delta}), 0 \right) + \left[2\frac{t}{\rho}\right] \\ J_{0,t} - N^\eta \left(-\frac{t}{\rho^2}, 0 \right) - \left[2\frac{t}{\rho}\right] &= N^\eta \left(-\frac{t}{\rho^2} + o(t^{1/3+\delta}), 0 \right) - N^\eta \left(-\frac{t}{\rho^2}, 0 \right) \\ &= N^\eta \left(o(t^{1/3+\delta}), 0 \right). \end{aligned}$$

Mas $N^\eta(., 0)$ é a medida de contagem de um processo de Poisson, portanto,

$$\frac{N^\eta \left(o(t^{1/3+\delta}), 0 \right)}{t^{1/3+\delta}} \rightarrow 0 \text{ com probabilidade um.}$$

5.5 Dependência das Condições Iniciais para as Partículas de Segunda Classe

Lembrando que

$$J_{rt,t}^{\xi} = \left(J_{rt,t}^{\rho} - J_{rt,t}^{\lambda} \right),$$

da proposição anterior, temos

$$J_{0,t}^{\xi} = N^{\rho} \left(\frac{t}{\rho^2}, 0 \right) - N^{\lambda} \left(\frac{t}{\lambda^2}, 0 \right) + 2 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\lambda} \right) t + o \left(t^{1/3+\delta} \right).$$

Capítulo 6

Variância do Choque

A prova é similar à da variância do fluxo de partículas de primeira classe.

Como antes, podemos escrever $J_{rt,t}^\xi = (J_{rt,t}^\xi)^+ - (J_{rt,t}^\xi)^-$ com $(J_{rt,t}^\xi)^+ (J_{rt,t}^\xi)^- =$

0. Portanto,

$$V J_{rt,t}^\xi = V (J_{rt,t}^\xi)^+ + V (J_{rt,t}^\xi)^- + 2E (J_{rt,t}^\xi)^+ E (J_{rt,t}^\xi)^-.$$

Agora,

$$V (J_{rt,t}^\xi)^+ = E \left((J_{rt,t}^\xi)^+ \right)^2 - \left(E (J_{rt,t}^\xi)^+ \right)^2$$

e

$$\begin{aligned} E \left((J_{rt,t}^\xi)^+ \right)^2 &= E \left(\sum_{k<0} \xi_0(hk) I_{\{Z^{hk}(t) \geq rt\}} \right)^2 \\ &= E \sum_{k<0} \xi_0(hk) I_{\{Z^{hk}(t) \geq rt\}} + 2E \sum_{j<k<0} \xi_0(hk) \xi_0(hj) I_{\{Z^{hk}(t) \geq rt\}} I_{\{Z^{hj}(t) \geq rt\}} \\ &= (\rho - \lambda) E (Z^0(t) - rt)^+ + 2 \sum_{j<k<0} E \xi_0(hk) \xi_0(hj) I_{\{Z^{hj}(t) \geq rt\}} \\ &= (\rho - \lambda) E (Z^0(t) - rt)^+ + 2 \sum_{j<k<0} E \xi_0(hj) \xi_0(hk) I_{\{Z^{hj}(t) \geq rt\}} \end{aligned}$$

$$+2(h(\rho - \lambda))^2 \sum_{j < k < 0} \mathbb{P}(Z^{hj}(t) \geq rt) \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} & -2(h(\rho - \lambda))^2 \sum_{j < k < 0} \mathbb{P}(Z^{hj}(t) \geq rt) \\ & = (\rho - \lambda) \left(E(Z^0(t) - rt)^+ + 2h\rho \sum_{j < k < 0} \mathbb{P}(Z^{hj}(t) \geq rt) \right) \\ & \quad + 2h(\rho - \lambda) \sum_{j < k < 0} E\xi_0(hj)\xi_0(hk)I_{\{Z^{hj}(t) \geq rt\}} \\ & \quad - 2h^2(\rho - \lambda)^2 \sum_{j < k < 0} \mathbb{P}(Z^{hj}(t) \geq rt) \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} & = (\rho - \lambda) \left(E(Z^0(t) - rt)^+ + 2h(\rho - \lambda) \sum_{j < k < 0} \mathbb{P}(Z^{hj}(t) \geq rt) \right) \\ & \quad + \left(2 \sum_{j < k < 0} E\xi_0(hj)\xi_0(hk)I_{\{Z^{hj}(t) \geq rt\}} - 2(h\rho)^2 \sum_{j < k < 0} \mathbb{P}(Z^{hj}(t) \geq rt) \right). \end{aligned}$$

Como para o fluxo de partículas de primeira classe, a terceira igualdade é devida ao fato do evento $Z^{hk}(t) \geq rt$ estar incluso no evento $Z^{hj}(t) \geq rt$. O resto da prova sai da mesma maneira que para o fluxo de primeira classe. Neste caso, o termo A_3 fica

$$-2(\rho - \lambda)h(1 - (\lambda - \rho)h) \sum_{0 > k > j} E(\xi(hj)1_{\{U_t^{hj,k} \leq rt < \hat{Z}_t^{hj,k}\}}),$$

onde U_t^{hj} é Z_t^{hj} , com $\eta(hk) = 1$, e \hat{Z}_t^{hj} é Z_t^{hj} , com $\eta(hk) = 0$. Novamente, acoplamos dois processos com uma única discrepância posição hk no instante inicial e obtemos, como no caso do fluxo de primeira classe,

$$A_2(t) = -2h(1 - (\lambda - \rho)h) \sum_{0 > k} \mathbb{P}(Z_t^{hk} \leq rt < R_t^{hk}).$$

Substituindo, obtemos

$$VJ_t = (\lambda - \rho)^2 V X_t - (\lambda - \rho) E X_t + 2(\lambda - \rho)(ER_t^+ - E(R_t - X_t)^+)$$

$$+2(\lambda - \rho)\rho(E\hat{R}_t^+ - E(\hat{R}_t - X_t)^+).$$

Pelo visto antes e dado que \hat{R}_t é uma partícula de segunda classe com respeito a σ , e R_t é uma partícula de segunda classe, com respeito a η , temos que

$$\begin{aligned} E\hat{R}_t &= -\frac{1}{\rho^2}t, \\ ER_t &= -\frac{1}{\lambda^2}t. \end{aligned}$$

Pela equação (5.5)

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{VJ_t}{t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{V(N^\rho(-\frac{t}{\rho^2}, 0) - N^\lambda(-\frac{t}{\lambda^2}, 0))}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{VN^{\lambda-\rho}(-\frac{t}{\lambda^2}, 0) + VN^\rho(-\frac{t}{\rho^2}, -\frac{t}{\lambda^2})}{t} \\ &= \frac{\lambda\rho - 2\rho^2 + \lambda^2}{\lambda^2\rho}, \end{aligned}$$

portanto, aplicando a fórmula anterior,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{VX_t}{t} = \frac{\lambda^3 - \rho^3 - (\lambda - \rho)^2\lambda\rho}{(\lambda^2 - \rho^2)(\lambda\rho)^2}.$$

Capítulo 7

Apêndice

Este apêndice é incluído para melhor comparar os resultados da tese com os resultados existentes na literatura.

7.1 Processo de Exclusão Simples Completamente Assimétrico

- Espaço de estados: $X = \{0, 1\}^Z$;
- $\eta \in X$ é chamado de configuração;
- $\eta \in X$ tem uma partícula em $x \in Z$ se $\eta(x) = 1$.

Informalmente, as partículas movem-se em Z de acordo com as seguintes leis:

1. uma partícula na posição x aguarda um tempo exponencial com parâmetro um;
2. ao final desse tempo, se o sítio $x + 1$ não estiver ocupado, a partícula pula para a posição $x + 1$, caso contrário ela continua na posição x . Nesse instante um novo tempo exponencial começa a correr;
3. os tempos de espera de partículas diferentes são independentes.

O Gerador

$$\Omega f(\eta) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} \eta(x) (1 - \eta(x + 1)) [f(\eta^{x,x+1}) - f(\eta)],$$

onde f é uma função cilíndrica e

$$\eta^{x,x+1}(y) = \begin{cases} \eta(x), & \text{se } y = x + 1, \\ \eta(x + 1), & \text{se } y = x, \\ \eta(y), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Construção Gráfica

A cada par $(x, x + 1)$ associamos um processo de Poisson de parâmetro um, que denotaremos por $(T_{x,n})_{n>0}$ para cada x . $T_{x,n}$ representa o n -ésimo instante em que uma partícula na posição x (se tiver alguma) tentará pular à posição $x + 1$. O pulo será feito se a posição $x + 1$ não estiver ocupada.

Medidas Invariantes

Seja $C(X)$ o conjunto de funções contínuas de X e $f \in C(X)$. Definimos $S(t)f$ por:

$$S(t)f(\eta) = E_\eta(f(\eta_t)),$$

onde $S(t)$ é o semigrupo do processo.

Se $S(t)f \in C(X) \quad \forall f \in C(X)$ e $t > 0$, diremos que o processo é Feller.

Denotamos por $\mu S(t)$ à medida definida por

$$\int f d[\mu S(t)] = \int S(t)f d\mu, \quad \forall f \in C(X).$$

Definição 7.1 *A medida μ é invariante para o processo se*

$$\mu S(t) = \mu, \quad \forall t > 0.$$

As medidas invariantes para este processo são combinações convexas das medidas ν_α e ν_n com $0 < \alpha < 1$ e $n \in \mathbb{Z}$, onde ν_α é a medida produto definida por

$$\nu_\alpha(\{\eta(x) = 1 \quad \forall x \in A\}) = \alpha^{|A|}$$

e ν_n é a medida concentrada na configuração $\eta^{(n)}$ com

$$\eta^{(n)} = \begin{cases} 1 & \text{para } x \geq n \\ 0 & \text{para } x < n \end{cases} \quad (\text{Liggett 1976}).$$

Acoplamento

Consideramos a evolução do processo (σ_t, ζ_t) , onde cada componente é um processo de exclusão com configurações iniciais (σ, ζ) que evoluem utilizando a mesma realização dos processos de Poisson da construção gráfica.

Diremos que $\sigma \leq \rho$, se $\sigma(x) \leq \rho(x)$, $\forall x \in Z$, e que $\mu_1 \leq \mu_2$, se $\exists \mu$ sobre X^2 com marginais μ_1 e μ_2 , tal que $\mu\{(\sigma_1, \sigma_2) : \sigma_1 \leq \sigma_2\} = 1$.

Temos como consequência que, com probabilidade um,

$$\sigma \leq \zeta \Rightarrow \sigma_t \leq \zeta_t, \quad \forall t > 0,$$

$$\mu \leq \nu \Rightarrow \mu S(t) \leq \nu S(t), \quad \forall t > 0,$$

isto é, o processo é atrativo.

Suponhamos $\sigma \leq \zeta$, logo $\sigma_t \leq \zeta_t$, $\forall t > 0$. Então, podemos definir $\xi_t = \zeta_t - \sigma_t$. Vejamos a dinâmica de (σ_t, ξ_t) .

Temos que em cada ponto $x \in Z$ o sítio pode estar vazio, pode ter uma partícula σ ou ter uma partícula ξ . Suponhamos que uma partícula tenta saltar da posição x para a posição $x+1$, teremos uma das seguintes situações:

- se x e $x+1$ estão ocupados por partículas do mesmo tipo, então nada acontece,

- se x está ocupada por uma partícula de qualquer tipo e $x+1$ está vazio, ela pula;
- se temos uma partícula σ em x e ξ em $x+1$, elas trocam posições;
- se x tem uma partícula ξ e $x+1$ uma σ , então nada acontece.

Diremos que as partículas σ são de primeira classe e as ξ de segunda classe.

Limite Hidrodinâmico:

Seja uma seqüência $\eta^N(\cdot)$, com medidas de probabilidades P^N , tal que para todo $-\infty < a < b < \infty$ e $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P^N \left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_{i=[Na]+1}^{[Nb]} \eta_i^N(0) - \int_a^b u_0(x) dx \right| \geq \varepsilon \right\} = 0$$

e definamos $\alpha_t^N = N^{-1} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \eta_i^N(t) \delta_{i/N}$. Então, para toda função ϕ contínua de suporte compacto,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P^N \left\{ \left| \alpha_{Nt}^N(\phi) - \int \phi(x) u(x, t) dx \right| \geq \varepsilon \right\} = 0,$$

onde $u(x, t)$ é solução fraca de

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = - \frac{\partial}{\partial x} [u(x, t) (1 - u(x, t))],$$

com condição inicial u_0 .

O limite hidrodinâmico do processo de exclusão foi estudado por Rost , Andjel e Vares, Benassi e Fouque, Landim, Rezakhaonlu e Seppäläinen.

Choque

Seja $\rho < \lambda$ e consideremos o problema com condição inicial

$$u_0(x) = \rho 1_{\{x \leq 0\}} + \lambda 1_{\{x > 0\}}.$$

Nesse caso, a solução dá origem a uma descontinuidade. Utilizando as curvas características, obtemos uma solução do tipo

$$u(x, t) = \rho 1_{\{x \leq X(t)\}} + \lambda 1_{\{x > X(t)\}},$$

com $X(t) = (1 - \lambda - \rho)t$ sendo a posição do choque.

Choque Microscópico

Seja η com distribuição $\nu_{\rho, \lambda}$, onde $\nu_{\rho, \lambda}$ é a medida produto com densidade ρ à esquerda e λ à direita do zero.

Definição 7.2 *Diremos que a posição aleatória $X(t)$ é um choque microscópico para o processo η_t se para toda função cilíndrica f*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \tau_x \mu_t f &= \nu_\lambda f, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \tau_x \mu_t f &= \nu_\rho f, \end{aligned}$$

uniformemente em t , onde μ_t é a distribuição de $\tau_{X(t)} \eta_t$.

Denotemos por $X(t)$ a posição no tempo t da partícula de segunda classe, que no tempo zero esteve na origem. Então $X(t)$ é um choque para γ_t (Ferrari, Kipnis, Saada, 1991)

Variância do Fluxo

Ferrari e Fontes [?] mostraram que $J_{rt,t}$, o fluxo através da reta rt no tempo t , satisfaz

- $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{J_{rt,t}}{t} = \rho(1 - \rho) - r\rho$, onde ρ é a densidade;
- C.L.T.: $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{J_{rt,t} - EJ_{rt,t}}{\sqrt{t}} = G(0, D_J)$ em distribuição, onde $D_J = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Var(J_{rt,t})}{t}$;
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Var(J_{rt,t})}{t} = \rho(1 - \rho) |(1 - 2\rho) - r|$;
- Dependência das condições iniciais, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(J_{rt,t} - N_{th(r,\rho)} - \rho^2 t)^2}{t} = 0$, com $h(r, \rho) = r - (1 - 2\rho)$, $N_r(\eta) = \begin{cases} -\sum_{x=0}^r \eta(x) & r > 0 \\ \sum_{x=r}^0 \eta(x) & r \leq 0 \end{cases}$.

7.2 Processo de Hammersley

Problema de Ulam

Uma subseqüência crescente $\pi(i_1) < \pi(i_2) < \dots < \pi(i_k)$ de uma permutação $i \rightarrow \pi(i)$ é uma subseqüência tal que

$$i_1 < i_2 < \dots < i_k \text{ e } \pi(i_1) < \pi(i_2) < \dots < \pi(i_k).$$

Por exemplo, para a permutação 3 9 7 4 1 2 8 5 6, a subseqüência 3 4 5 6 é uma subseqüência crescente (de tamanho maximal), assim como a subseqüência 1 2 5 6.

Seja L_n o tamanho de uma subsequência crescente de tamanho maximal de uma permutação aleatória uniforme de $\{1, 2, \dots, n\}$.

O problema de Ulam consiste em encontrar $\alpha(n)$ tal que $L_n \approx \alpha(n)$ para n grande. A solução é

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n}{n^{1/2}} = 2.$$

Representação por meio de um Processo de Poisson no Plano

Consideremos um processo de Poisson em $\mathbb{R} \times [0, \infty)$ e suponhamos que na região (finita) $[0, x] \times [0, t)$ temos n pontos (x_i, t_i) do processo de Poisson. Isto define uma permutação π com a seguinte regra:

a i -ésima menor coordenada t , corresponde à $\pi(i)$ -ésima menor coordenada x .

Consideremos agora $L(x, t)$ o número maximal de pontos num caminho crescente de $(0, 0)$ a (x, t) . Se o número de pontos em $[0, x] \times [0, t]$ é $M(x, t)$, temos que

$$L(x, t) = L_{M(x, t)}, \quad \text{em distribuição.}$$

Definição do processo de Hammersley

No processo de Hammersley as posições estão definidas nos números reais e um estado do processo é uma seqüência $z = (z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de posições sobre \mathbb{R} .

O processo evolui da seguinte maneira: cada partícula z_i pula, com uma taxa igual à longitude do intervalo (z_{i-1}, z_i) , a uma posição escolhida uniformemente nesse intervalo.

Formalmente, definimos a evolução do processo através de um processo pontual de Poisson sobre $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ de parâmetro um. Fixemos P uma realização desse processo. Sejam s, t, a, b tais que $L = (a, b] \times (s, t]$ seja finito e $(x_1, t_1), (x_2, t_2), \dots, (x_n, t_n) \subset L \cap P$ uma seqüência tal que $x_i < x_{i+1}$ e $t_i < t_{i+1}$ $i \in 1, \dots, n$.

Denotaremos por $\Delta(a, b, s, t)$ ao conjunto desses caminhos crescentes. Definimos

$$L(a, b, s, t) = \max\{\|\gamma\| : \gamma \in \Delta(a, b, s, t)\},$$

$$\Gamma((a, s), t, k) = \inf\{h > 0 : L(a, a + h, s, t) > k\},$$

isto é, a menor distância horizontal tal que o caminho tem tamanho maior o igual a k .

Então, dada uma seqüência inicial $\sigma^0 = (\sigma_k^0)_{k \in \mathbb{Z}}$,

$$\sigma_k(t) = \inf_{i \leq k} \{\sigma_i^0 + \Gamma((\sigma_i^0, 0), t, k - i)\}$$

define a evolução do processo.

Gerador

Para este processo temos o seguinte gerador,

$$\Omega f(\sigma) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_{\sigma_{i-1}}^{\sigma_i} du [f(\sigma^{u,i}) - f(\sigma)],$$

onde $\sigma_k^{u,i} = \begin{cases} \sigma_k & \text{se } k \neq i, \\ u & \text{se } k = i \end{cases}$

Medidas Invariantes

As medidas invariantes para este processo são as correspondentes a processos de Poisson na reta real.

Vamos denotar por ν_α um processo de Poisson de parâmetro α .

Construção Gráfica

Seja η uma configuração inicial, utilizando um processo de Poisson P no plano, temos a seguinte construção gráfica: cada partícula espera até aparecer uma marca do P à sua esquerda, no instante em que a marca aparece, a partícula pula à marca.

Acoplamento

Consideremos duas configurações iniciais (σ, ζ) que evoluem segundo a construção gráfica, utilizando a mesma realização do processo de Poisson no plano.

Temos então que $\sigma \leq \zeta \Rightarrow \sigma_t \leq \zeta_t \quad \forall t > 0$.

Seja $\xi_t = \zeta_t - \sigma_t$.

As Partículas evoluem da seguinte maneira:

- se temos uma marca e a primeira partícula à direita é uma partícula σ , então a partícula pula para a marca;
- se temos uma marca e a primeira partícula à direita é uma partícula ξ , então a partícula ξ pula à posição da primeira partícula σ à sua direita e a partícula σ pula para a marca.

As partículas tipo σ ignoram as tipo ξ , no entanto estas estão subordinadas às partículas tipo σ .

A interação entre σ_t e ξ_t nos leva a chamar as partículas σ de partículas de primeira classe e as partículas ξ partículas de segunda classe.

Limite Hidrodinâmico para o Processo de Hammersley

Para o caso do processo de Hammersley provamos o teorema que diz que, quando escalado no tempo e no espaço, a densidade de partículas converge para uma solução fraca da seguinte equação tipo Burgers,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\mu(x, t)} = 0.$$

Choque na Equação tipo Burgers

Seja $\rho < \lambda$ e consideremos o problema com condição inicial

$$\mu_0(x) = \rho 1_{\{x \leq 0\}} + \lambda 1_{\{x > 0\}}.$$

Utilizando as curvas características vemos que a solução tem uma descontinuidade e obtemos uma solução do tipo

$$\mu(x, t) = \rho 1_{\{x \leq X(t)\}} + \lambda 1_{\{x > X(t)\}},$$

com $X(t) = \frac{1}{\rho\lambda}t$ sendo a posição do choque.

Choque Microscópico

Seja $\rho < \lambda$, e $\nu_{\rho,\lambda}$ a medida que corresponde a ter à esquerda da origem um processo de Poisson de parâmetro ρ e à direita um processo de Poisson de parâmetro λ , esta medida inicial corresponde à condição inicial de choque da equação diferencial anterior.

Denotemos agora por ν_ρ um processo de Poisson de parâmetro ρ .

Definição 7.3 *Seja $\eta \sim \nu_{\rho,\lambda}$, diremos que uma posição aleatória $X(t)$ é um choque microscópico para η_t se temos os seguintes limites uniformes em t ,*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tau_x \mu_t = \nu_\lambda, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \tau_x \mu_t = \nu_\rho,$$

onde μ_t é a distribuição de $\tau_{X(t)}\eta_t$.

Provamos o seguinte teorema:

Teorema 7.1 *Se chamarmos $X(t)$ à posição de uma partícula de segunda classe, que no tempo zero esteve na posição zero, então $X(t)$ é um choque.*

Variação do Fluxo no Processo de Hammersley

No caso da medida estacionária ν_ρ , seja $J_{rt,t}$ o fluxo através da reta rt no tempo t , definido por:

$$J_{rt,t} = \# \{x < 0 : \eta_0(x) = 1, X^x(t) \geq rt\} \\ - \# \{x \geq 0 : \eta_0(x) = 1, X^x(t) < rt\},$$

provamos que

$$\lim \frac{J_{rt,t}}{t} = -\rho \left(\frac{1}{\rho^2} + r \right), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{VJ_{rt,t}}{t} = \rho \left| \frac{1}{\rho^2} - r \right|$$

Variação da Partícula de segunda classe

No caso das condições iniciais do choque, a variância da partícula de segunda classe X_t que identifica o choque tem variância:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{VX_t}{t} = \frac{\lambda^3 - \rho^3 - (\lambda - \rho)^2 \lambda \rho}{(\lambda^2 - \rho^2)(\lambda \rho)^2}.$$