APOIO 3 - TETRAEDRO - CÁLCULO II -

Bacharelado Química - Diurno

2º SEMESTRE de 2008

Professor Oswaldo Rio Branco

1. Projeto proposto em Stewart, J. Cálculo, vol 1, pg. 811.

   Com a notação do livro texto e P, Q, R, S os vértices do tetraedro temos (é geométrico),

   $$\vec{v_1} = \vec{QR}\times\vec{QS}\,, \quad \vec{v_2} = -\vec{RS}\times\vec{RP}\,, \quad \vec{v_3} = \vec{SP}\times\vec{SQ}\,, \quad \vec{v_4} = -\vec{PQ}\times\vec{PR}\,.$$

   Logo, pelas propriedades do produto vetorial,

   $$\vec{v_1}+\vec{v_2}+\vec{v_3}+\vec{v_4} = \vec{QR}\times\vec{QS} \;-\; \vec{RS}\times\vec{RP} \;+\; \vec{SP}\times\vec{SQ} \;-\; \vec{PQ}\times\vec{PR} \;=$$
   $$= [\,-\vec{QR}\times\vec{SQ} \;+\; \vec{SP}\times\vec{SQ}\,] \;+\; [\,\vec{RS}\times\vec{PR} \;-\; \vec{PQ}\times\vec{PR}\,] =$$
   $$= [\,-\vec{QR} \;+\; \vec{SP}\,]\times\vec{SQ} \;+\; [\,\vec{RS} - \vec{PQ}\,]\times\vec{PR}\,] =$$
   $$= \vec{SQ}\times[\,\vec{QR} - \vec{SP}\,] \;+\; ....repete..2^{a}..parcela......... =$$
   $$= \vec{SQ}\times[\vec{QR} + \vec{PS}\,] \;+\; ....repete..2^{a}..parcela......... =$$
   $$= \vec{SQ}\times[\,\vec{QS} + \vec{SR} + \vec{PS}\,] \;+\; ....repete..2^{a}..parcela........ =$$
   $$= \vec{SQ}\times[\,\vec{SR} + \vec{PS}\,] \;+\; ....repete..2^{a}..parcela......... =$$
   $$= \vec{SQ}\times[\,\vec{PS} + \vec{SR}\,] \;+\; [\,\vec{RS} - \vec{PQ}\,]\times\vec{PR} =$$
   $$= \vec{SQ}\times\vec{PR} \;+\; [\,\vec{RS} + \vec{QP}\,]\times\vec{PR} =$$
   $$= [\,\vec{SQ} \;+\; \vec{RS} \;+\; \vec{QP}\,]\times\vec{PR} =$$
   $$= [\,\vec{RS} + \vec{SQ} + \vec{QP}\,]\times\vec{PR} \;=$$
   $$= \vec{RP}\times\vec{PR} = \vec{0}\;.$$

2. A face oposta ao vértice P é o triângulo $\triangle QRS$, de área $A = \frac{|\vec{QR}\times\vec{QS}|}{2}$. A distância de P à face $\triangle QRS$ é a altura h, a projeção de $\vec{PQ}$ na direção do vetor normal, $\vec{n} = \vec{QR}\times\vec{QS}$, ao plano contendo $\triangle QRS$. Assim, h é dado pelo produto interno: $h = \left|\vec{PQ}.\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}\right|$ ou,

   $$h = \left|\vec{PQ}.\frac{\vec{QR}\times\vec{QS}}{|\vec{QR}\times\vec{QS}|}\right| = \left|\frac{\vec{QS}.[\vec{QR}\times\vec{QS}]}{|\vec{QR}\times\vec{QS}|}\right| = \left|\frac{[\,\vec{QS}, \vec{QR}, \vec{QS}\,]}{|\vec{QR}\times\vec{QS}|}\right|,$$

   com $[\,\vec{QS}, \vec{QR}, \vec{QS}\,]$ o produto misto dos vetores $\{\vec{QS}, \vec{QR}, \vec{QS}\}$. øvolume do tetraedro é

   $$V_T = \frac{1}{3}hA(\triangle QRS) = \frac{1}{6}\left|[\vec{QS}, \vec{QR}, \vec{QS}]\right|\;;$$

   Dadas coord. P, Q, R e S, V_T é $\frac{1}{6}$ do módulo do determinante 3x3 de linhas: $Q-P$, $R-P$ e $S-P$.

3. Por 1 e sendo o tetraedro tri-retangular: $v_4 = -v_1 - v_2 - v_3 = -(v_1 + v_2 + v_3)$,

   $$\begin{cases} \vec{v_1} \;/\!/\; \vec{PS} \\ \vec{v_2} \;/\!/\; \vec{QS} \\ \vec{v_3} \;/\!/\; \vec{RS}\,; \quad \vec{v_1} \perp \vec{v_2},\; \vec{v_1} \perp \vec{v_3},\; \vec{v_2} \perp \vec{v_3}. \end{cases}$$

   Logo: $D^2 = |v_4|^2 = v_4.v_4 = (v_1 + v_2 + v_3).(v_1 + v_2 + v_3) = |v_1|^2 + |v_2|^2 + |v_3|^2 = A^2 + B^2 + C^2$.