Curso: MAT 221- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2008

SÉRIES

ELEMENTOS

1. **Definições** A sequência das somas parciais de $(a_n) \subset \mathbb{K}$, (s_n), com $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, é a série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$, associada a (a_n), com termo geral a_n e s_n sua soma parcial de ordem n. O limite da série, se existir (finito ou infinito), é a soma da série também indicada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

2. **Notações** Se a série inicia em $n = p$ notamos $\sum_{n \geq p} a_n$ ou $\sum_{n=p}^{+\infty} a_n$.

3. Se a soma é finita a série é convergente e notamos $\sum_{n\geq 1} a_n < \infty$, senão, ela é divergente.

4. **Proposição 1** Seja $a_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$. A série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge se, e só se, as somas parciais $s_n = a_1 + ... + a_n$ formam uma sequência limitada.
   Prova Imediata aplicação do Axioma do Supremo.

5. Para séries convergentes de termos positivos notamos também, simplesmente, $\sum a_n$. O motivo surge no estudo de somabilidade (somas) em $\mathbb{K}$ e séries absolutamente e/ou comutativamente convergentes em $\mathbb{K}$.

6. **Proposição 2** O espaço das séries em $\mathbb{K}$ e convergentes é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial.
   Prova: exercício.

7. **Condição necessária à convergência** Se $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge em $\mathbb{K}$ então, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
   Prova: É óbvio que $s_{n+1} - s_n = a_n$, $\forall n$, e, por hipótese, existe $\lim_{n\to+\infty} s_n = x \in \mathbb{C}$. É fácil ver que $\lim_{n\to+\infty} s_{n+1} = x$ e, assim,
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n\to+\infty} s_{n+1} - \lim_{n\to+\infty} s_n = x - x = 0 \ \blacksquare$$

8. **Critério de Cauchy para séries** A série $\sum_{n\geq 1} a_n$, em $\mathbb{K}$, é convergente se, e só se, $\forall \epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| < \epsilon, \forall N > n_0, \forall p \in \mathbb{N}$.
   Prova É claro que $|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| = |s_{n+p} - s_n|$, s_n a n-ésima soma parcial da série e, a série é convergente se, e só se, (s_n) é uma sequência de Cauchy, donde a tese $\blacksquare$

9. **Definições** A série $\sum_{n\geq 1} a_n$, em $\mathbb{K}$, é
   (a) **absolutamente convergente** se $\sum_{n\geq 1} |a_n| < \infty$.
   (b) **condicionalmente convergente** se é convergente e $\sum |a_n| = \infty$.

O Teorema a seguir é de extrema importância. Breve abordaremos a teoria elementar de séries e veremos uma prova 'realmente' elementar. Abaixo seguem duas provas simples.

10. **Teorema** Toda série, em $\mathbb{K}$, absolutamente convergente é convergente.
Prova 1 Seja $S_n = |a_1| + ... + |a_n|$; (S_n) é uma sequência de Cauchy e, $\forall\ \epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n > n_0$ e $p \in \mathbb{N}$, $S_{n+p} - S_n = |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_{n+p}| < \epsilon$. Logo, se s_n é a n-ésima soma parcial de $\sum a_n$, $|s_{n+p} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + ... + |a_{n+p}| < \epsilon$.
Prova 2 Uma série em $\mathbb{C}$ origina duas em $\mathbb{R}$ e, converge absolutamente se, e só se, a parte real e a imaginária também (pois, $|Re(z)|,\ |Im(z)| \ \leq |z| \ \leq \ |Re(z)| + |Im(z)|$). Assim, podemos supor a série em $\mathbb{R}$.
Para $\sum |a_n| < +\infty$, $a_n \in \mathbb{R}$, temos, $0 \leq\ a_n + |a_n| \leq\ 2|a_n|$ e, como $\sum 2|a_n|$ converge, pelo critério da comparação, $\sum\limits_{n\geq 1}(a_n + |a_n|)$ converge e portanto, sendo a série $\sum(-|a_n|)$ convergente, $\sum\limits_{n\geq 1} a_n = \sum\limits_{n\geq 1}(a_n + |a_n|)\ +\ \sum(-|a_n|)$ também converge ■
Seguem resultados que desde o abaixo até os critérios da razão e da raíz, não dependem da relação de ordem em $\mathbb{R}$ e sim da função módulo e, portanto, valem em $\mathbb{K}$.

11. **Critério da Comparação** Sejam $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ e $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ séries em $\mathbb{K}$. Se existem $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que $|a_n| \leq c|b_n|, \forall n > n_0$, e $\sum |b_n| < \infty$ então $\sum |a_n| < \infty$.
Prova: Segue da proposição acima.

12. **Critério do Limite** Sejam $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ e $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$, $b_{n's} \neq 0$, séries em $\mathbb{K}$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_n|}{|b_n|} = L \in [0, +\infty]$.
    (a) Se $L = 0$ e $\sum |b_n|$ é convergente então, $\sum |a_n|$ é convergente.
    (b) Se $0 < L < +\infty$ então, $\sum |a_n|$ é convergente se, e só se, $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ é convergente.
    (c) Se $L = +\infty$ e $\sum |b_n|$ é divergente então, $\sum |a_n|$ é divergente.

    Prova (a) Se $L = 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| \leq |b_n|, \forall n \geq n_0$. Logo, $\sum\limits_{n=n_o}^{+\infty} |a_n| \leq \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} |b_n| < +\infty$.
    (b) Existe n_0 tal que, se $n \geq n_0$, $|b_n|\frac{L}{2}\ \leq\ |a_n|\ \leq \frac{3L}{2}|b_n|$. A tese segue da comparação.
    (c) Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0$, $|a_n| \geq |b_n|$. Logo, $\sum |a_n| \geq \sum |b_n| = +\infty$ ■

13. **Critério da Raíz** Seja $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ uma série em $\mathbb{K}$. Se $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = r \in [0, +\infty]$ temos,
    (a) Se $r < 1$, a série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ é absolutamente convergente.
    (b) Se $r = 1$, nada se pode afirmar sobre a convergência de $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$.
    (c) Se $r > 1$ ou $r = +\infty$, a série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ é divergente.

    Prova (a) Basta tomarmos $\lambda > 0$, $r < \lambda < 1$, e n_0 tal que, se $n > n_0$, $\sqrt[n]{|a_n|} < \lambda$ e, $|a_n| < \lambda^n$.
    (c) Basta escolhermos $\lambda > 0$, $1 < \lambda < r$ e n_0 tal que, se $n > n_0$, $\sqrt[n]{|a_n|} > \lambda$ e, $|a_n| > \lambda^n$.
    (b) A série $\sum \frac{1}{n}$ diverge enquanto $\sum \frac{1}{n^2}$ converge. Porém, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$. ■

14. **Critério da Razão** Dada $\sum_{n\geq 1} a_n$, em $\mathbb{K}$, $a_n \neq 0 (\forall n)$, se $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = r \in [0,+\infty]$ temos,

(a) Se $r < 1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

(b) Se $r = 1$, nada se pode afirmar sobre a convergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

(c) Se $r > 1$ ou $r = +\infty$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é divergente.

Prova (a) Escolhamos $\lambda \in \mathbb{R}$, $r < \lambda < 1$, e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > n_0$, $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < \lambda$. Então, para $n > n_0$, $|a_n| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}\cdots\cdots\frac{|a_3|}{|a_2|}\frac{|a_2|}{|a_1|}|a_1| \leq |a_1|\lambda^{n-1}$, donde a convergência de $\sum |a_n|$.
(c) Neste caso existe n_0 tal que, se $n > n_0$, $\frac{|a_{n+1}}{|a_n|} > 1$ e portanto, $|a_{n+1}| \geq |a_n|$.
(b) Os exemplos citados no critério da raíz servem aqui também ■

Abaixo, uma versão simples do teorema 4 no apêndice de sequências, não utilizando as noções de *lim sup* ou lim *inf*.

15. **Proposição 3** Se $\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$ então $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$.
Prova Dado $\epsilon > 0$, seja $0 < \delta < \epsilon$ e n_0 tal que, se $n \geq n_0$, $L - \delta < \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < L + \delta$. Logo,

$$(L-\delta)^{n-n_0}|a_{n_0}| \leq |a_n| = \frac{|a_n|}{|a_{n-1}|}\frac{|a_{n-1}|}{|a_{n-2}|}\cdots\cdots\frac{|a_{n_0+1}|}{|a_{n_0}|}|a_{n_0}| \leq (L+\delta)^{n-n_0}|a_{n_0}|$$

e, ainda para $n > n_0$,

$$\frac{(L-\delta)^n}{(L-\delta)^{n_0}} \leq \frac{|a_n|}{|a_{n_0}|} \leq \frac{(L+\delta)^n}{(L+\delta)^{n_0}}\ .$$

Sendo $L - \delta < \ L \ < L + \delta$ temos (omitimos o caso $L = 0$, que é similar)

$$\frac{(L-\delta)^n}{L^{n_0}} \leq \frac{|a_n|}{|a_{n_0}|} \leq \frac{(L+\delta)^n}{L^{n_0}},$$

e, definindo $\alpha = \frac{|a_{n_0}|}{L^{n_0}}$,

$$\sqrt[n]{\alpha}(L-\delta) \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\alpha}(L+\delta)\,, \quad \forall n > n_0.$$

Como $\frac{L-\epsilon}{L-\delta} < 1 < \frac{L+\epsilon}{L+\delta}$ e $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1$, fixamos $N > n_0$ tal que, se $n > N$, $\frac{L-\epsilon}{L-\delta} < \sqrt[n]{\alpha} < \frac{L+\epsilon}{L+\delta}$. Assim procedendo, concluímos

$$(L-\epsilon) < \sqrt[n]{\alpha}(L-\delta) \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \sqrt[n]{\alpha}(L+\delta) < (L+\epsilon),\ \forall\ n > N\ ■$$

16. **Critério da Integral** Seja $\sum_{n\geq 1} a_n, a_n \geq 0$, uma série e $f : [p, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$, contínua e decrescente, com $a_n = f(n), \forall n \geq p$. Temos,

$$\int_p^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n < +\infty$$

Prova Se $k \geq p$ e $x \in [k,\, k+1]$ então, $a_{k+1} \leq f(x) \leq a_k$, $a_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \leq a_k$ e,

$$\sum_p^n a_{k+1} \leq \sum_p^n \int_k^{k+1} f(x)\,dx = \int_p^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_p^n a_k\ .$$

Logo, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n <$ é convergente se, e só se, $\lim_{n\to+\infty} \int_p^{n+1} f(x)\,dx = \int_p^{+\infty} f(x)\,dx < \infty$ ■

Uma função como no enunciado do critério acima sempre existe mas, em geral, não é útil. Basta definir f em $[n, n+1]$ tendo por gráfico o segmento unindo (n, a_n) e $(n+1, a_{n+1})$.

17. **(Critério de Dirichlet)** Em $\mathbb{R}$, seja $\sum_{n\geq 1} a_n$ uma série (não necessariamente convergente) com sequência das somas parciais, (s_n), limitada e (b_n) uma sequência decrescente, $\lim b_n = 0$. Então, $\sum_{n\geq 1} a_n b_n$ é convergente.

    Prova Temos,

    $a_1b_1 + a_2b_2 = a_1(b_1 - b_2) + (a_1 + a_2)b_2 = s_1(b_1 - b_2) + s_2b_2,$

    $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = s_1(b_1 - b_2) + s_2b_2 + a_3b_3 = s_1(b_1 - b_2) + s_2(b_2 - b_3) + s_3b_3,$

    e, de forma geral (exercício: verifique, a indução é simples),

    $$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n = \sum_{i=2}^{n} s_{i-1}(b_{i-1} - b_i) \; + \; s_nb_n \; .$$

    Para $M \in \mathbb{R}$ tal que $|s_n| \leq M$ temos, $\sum_{n=2}^{+\infty} |s_{i-1}(b_{i-1} - b_i)| \leq M \sum_{n=2}^{+\infty} (b_{i-1} - b_i) = Mb_1$ e portanto, $\sum_{n=2}^{+\infty} s_{i-1}(b_{i-1} - b_i)$ é absolutamente convergente, logo convergente e, como $\lim s_nb_n = 0$, a série $\sum_{n\geq 1} a_nb_n$ é convergente ■

    No resultado abaixo enfraquecemos a hipótese sobre (b_n) porém, exigimos mais de $\sum a_n$.

18. **Critério de Abel** Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é convergente e (b_n) é uma sequência decrescente de números positivos (não necessariamente tendendo para zero) então, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_nb_n$ é convergente.

    Prova Para $c = \lim b_n$, $(b_n - c) \searrow 0$. Logo, pelo Critério de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(b_n - c)$ é convergente e, devido à hipótese, $\sum_{n=1}^{+\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ também e assim $\sum_{n=1}^{+\infty} a_nb_n$ ■

19. **Critério de Leibiniz** Se (b_n) é decrescente e $\lim b_n = 0$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n b_n$ é convergente.

    Prova Consequência direta do critério de Dirichlet ■

Os critérios a seguir são um refinamento do critério da razão.

20. **Critério de Comparação de Razões** Sejam $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ e $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ duas séries em $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$. Suponhamos que exista $p \in \mathbb{N}$ tal que

    $$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq \left|\frac{b_{k+1}}{b_k}\right|, \; \forall \; k \; \geq p.$$

    Temos, se $\sum |b_k|$ converge então $\sum |a_k|$ converge. Isto é, $\sum |a_k| = +\infty \Rightarrow \sum |b_k| = +\infty$.

    Prova Da hipótese temos, para $k \geq p$, $|\frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}| \leq |\frac{a_k}{b_k}|$. Logo, para $k \geq p$ a sequência $\frac{|a_k|}{|b_k|}$ decresce, $\frac{|a_k|}{|b_k|} \leq \frac{|a_p|}{|b_p|}$, e então, $|a_k| \leq \frac{|a_p|}{|b_p|}|b_k|$. Pelo critério da comparação, segue a tese ■

21. **Critério de Raabe** Seja $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, uma série em $\mathbb{K}$, $|a_n| \neq 0, \forall n$, tal que

$$\lim_{n\to+\infty} n(1-|\frac{a_{n+1}}{a_n}|) = L \in [-\infty,+\infty]$$

(a) Se $L>1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente.

(b) Se $L<1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

(c) Se $L=1$ o critério nada revela.

Prova (a) Seja α tal que $1< \ \alpha<L$. Então, existe $N\in\mathbb{N}$ para o qual

$$k\left(1-|\frac{a_{k+1}}{a_k}|\right) \ > \ \alpha \ , \ \forall k \ \geq \ N \ .$$

Logo, para tais valores de k, $|\frac{a_{k+1}}{a_k}| < 1-\frac{\alpha}{k}$. Para continuarmos façamos uma observação.

Obs Para $\alpha>1$, $x \ \geq \ -1$ e $f(x)=(1+x)^\alpha$ temos $f''\geq 0$, $f'(0)=\alpha$, concavidade voltada para cima e reta tangente em $(0,1)$ dada por $y=1+\alpha x$. Logo, $(1+x)^\alpha \ \geq 1+\alpha x$.

Assim, utilizando tal desigualdade para $x=-\frac{1}{k}$, obtemos

$$|\frac{a_{k+1}}{a_k}| \ < \ 1-\frac{\alpha}{k} \ \leq \ (1-\frac{1}{k})^\alpha = \frac{\frac{1}{k^\alpha}}{\frac{1}{(k-1)^\alpha}} = \frac{b_{k+1}}{b_k}\,, \quad b_k = \frac{1}{(k-1)^\alpha} \quad .$$

Como $\sum \frac{1}{k^\alpha} < \infty$ $(\alpha>1)$, pelo critério da comparação entre razões $\sum|a_k|$ é convergente.

(b) Seja $N\in\mathbb{N}$ tal que, se $k \ \geq \ N$, $k\left(1-|\frac{a_{k+1}}{a_k}|\right) \ \leq 1$. Assim,

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \ \geq \ 1-\frac{1}{k} \ = \ \frac{k-1}{k} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k-1}} = \frac{b_{k+1}}{b_k} \ , \quad b_{k+1} = \frac{1}{k} \quad .$$

Como a série harmônica diverge, pelo critério de comparações de razões, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ diverge.

(c) A série $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k ln\, k}$ diverge pois $\int_2^\infty \frac{1}{x ln\, x}\,dx \ = \ ln\,(ln\,x)\Big|_2^{+\infty} \ = +\infty$. Simplificando a expressão na condição no teste de Raabe para tal série obtemos,

$$k\left(1-\frac{k ln\, k}{(k+1)ln\,(k+1)}\right) = \frac{k}{k+1}\left[\frac{(k+1)ln(k+1)-k ln\, k}{ln(k+1)}\right] \ .$$

Se $k\to+\infty$, $\frac{k}{k+1}$ tende a 1 e, também, a fração entre colchetes pois,

$$\frac{(k+1)ln(k+1)-k ln\, k}{ln(k+1)} = 1 \ + \ \frac{k ln(k+1)-k ln\, k}{ln(k+1)} = 1 \ + \ \frac{ln\,(1+\frac{1}{k})^k}{ln\,(k+1)} \longrightarrow 1+0 = 1 \ .$$

A série $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(\log k)^2}$ é convergente pois $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{y^2}\,dy < \infty$. Simplificando a expressão na condição no teste de Raabe para tal série obtemos,

$$I(k) = k\left(1-\frac{k\log^2 k}{(k+1)\log^2(k+1)}\right) = \frac{k}{k+1}\left[\frac{(k+1)\log^2(k+1)-k\log^2 k}{\log^2(k+1)}\right] \ .$$

$$= \frac{k}{k+1}\left[1 + \frac{k\log^2(k+1) - k\log^2 k}{\log^2(k+1)}\right].$$

Como $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{k}{k+1} = 1$, simplificamos a análise de $I(k)$ estudando,

$$\frac{k\log^2(k+1)\ -\ k\log^2 k}{\log^2(k+1)} = k\,\frac{\log(k+1)\ -\ \log k}{\log(k+1)}\ \frac{\log(k+1)\ +\ \log k}{\log(k+1)}.$$

Pela regra de L'Hospital, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\log x}{\log(x+1)} = 1$ e deduzimos que $\lim\limits_{k\to+\infty} \frac{\log(k+1)\ +\ \log k}{\log(k+1)} = 2$. Finalmente, como $\lim\limits_{k\to+\infty} k\,\frac{\log(k+1)\ -\ \log k}{\log(k+1)} = \lim\limits_{k\to+\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{k})^k}{\log(k+1)} = 0$ concluímos $\lim I(k) = 1$ ■