Curso: MAT 221- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2008

APRESENTAÇÃO

Um objetivo do curso: Um estudo da exponenciação, subdividido nos tópicos a seguir.

1. Apresentação do número e.
2. A função exponencial real, $\exp : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$, $\exp(x) = e^x$.
3. A função exponencial complexa, $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* = \mathbb{C} - \{0\}$, $\exp(z) = e^z$.
4. A exponencial de uma matriz quadrada, $A \in M_n(\mathbb{K}) = M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\exp : M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow M_n(\mathbb{K})$, $\exp(A) = e^A$.
5. A curva $t \mapsto e^{tA} \in M_n(\mathbb{K})$, $t \in \mathbb{R}$, no espaço das matrizes quadradas e suas aplicações em EDL's de ordem n com coeficientes constantes. Interpretação geométrica.
6. A base de soluções exponenciais complexas de uma EDL, ordem n e coeficientes constantes. Interpretação física.
7. A forma exponencial dos coeficientes da série, e do teorema da integral, de Fourier.

Bibliografia:

(1) T. M. Apostol, Calculus, 2nd. ed., Ed. Waltham/Blaisdell, 1967-1969.

(2) E. F. Buck, Advanced Calculus, 2nd. ed., McGraw-Hill, New York, 1965.

(3) H. L. Guidorzzi, Cálculo, Vol. 4, 5ª ed., Ed. LTC - Livros Técnicos e Científicos, 2002.

(4) Lima, E. L. Curso de Análise, Rio de Janeiro, IMPA, CNPq, 1976.

Lista 1

ELEMENTOS

1. **Binômio de Newton** $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{p=n} \binom{n}{p} a^p\, b^{n-p}, \forall n \in \mathbb{N}$.

   Sugestão: Por indução. Lembrete: $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$ e $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, $p = 0, 1, 2 ...., n$.

2. **Progressão Geométrica** $s_n = 1 + a + a^2 + ... + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}, \forall n \in \mathbb{N}$.

3. **Uma Fatoração Polinomial** $x^n - 1 = x^{n-1} + x^{n-2} + ... + x + 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

4. **Um Produto Notável** $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + b^{n-2}a + b^{n-1}), \forall n \in \mathbb{N}$.

5. (Será bem útil) $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

6. **Desigualdade de Bernoulli** Mostre por indução: se $\alpha > 0$, $(1+\alpha)^n \geq n\alpha\ \forall n \in \mathbb{N}$.

7. Consequências da desigualdade de Bernoulli:

   (i) Se $a > 1$ então $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

   (ii) Se $0 < a < 1$, então $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$.

8. **Axioma do Supremo** Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais crescente, ou decrescente, e limitada então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Isto é, existe $L \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L\ .$$

   Aplicações

   (i) Se $a > 1$, a sequência $(\sqrt[n]{a}) = (a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, ...,)$ é decrescente e limitada inferiormente por zero. Logo, pelo Axioma do Supremo, convergente. Determine o seu limite.

   (ii) Se $0 < a < 1$, a sequência $(\sqrt[n]{a}) = (a, \sqrt{a}, \sqrt[3]{a}, ...,)$ é crescente e limitada superiormente por 1. Logo, pelo Axioma do Supremo, convergente. Determine seu limite.

   (iii) A sequência $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, não é limitada superiormente.
   Sugestão: $s_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + ... + (\frac{1}{2^{n-1}+1} + ...\frac{1}{2^n}) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + ... + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + n\frac{1}{2}$.

   (iv) A sequência (a_n) tal que o n-ésimo termo é $a_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$ é convergente pois (verifique) é limitada superiormente por 3.
   Sugestão: $\frac{1}{2!} \leq \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3!} = \frac{1}{3.2} \leq \frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{4!} = \frac{1}{4.3.2} \leq \frac{1}{2.2.2} = \frac{1}{2^3}$, ... Prossiga.

(v) A sequência (b_n), $b_n = (1+\frac{1}{n})^n$ é crescente e limitada por 3. Logo, convergente.

Solução: Pelo binômio de Newton,

$$b_n = (1+\frac{1}{n})^n = \sum_{p=0}^{p=n}\binom{n}{p}1^{n-p}(\frac{1}{n})^p = \sum_{p=0}^{p=n}\binom{n}{p}\frac{1}{n^p}.$$

Destaquemos nos coeficientes binomiais o fatorial de p, para $p \geq 1$,

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1).....2.1}{(n-p)!}\frac{1}{p!} = [n.....(n-p+1)]\frac{1}{p!}.$$

Reintroduzindo n^p no denominador obtemos,

$$\binom{n}{p}\frac{1}{n^p} = \frac{n.....(n-p+1)}{n^p}\frac{1}{p!} = (1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})....(1-\frac{p-1}{n})\frac{1}{p!}.$$

Exemplificando, para $n \geq 4$, como $\binom{n}{0}\frac{1}{n^0} = \binom{n}{1}\frac{1}{n^1} = 1$,

$$(*) \quad \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\frac{1}{n^p} = 1+1+(1-\frac{1}{n})\frac{1}{2!}+(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\frac{1}{3!}+(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})\frac{1}{4!}+.... \quad .$$

Cada uma das $n+1$ parcelas positivas da expansão de $(1+\frac{1}{n})^n$ é um múltiplo positivo de $\frac{1}{p!}$. Se n aumenta, o número de parcelas aumenta e o coeficiente de $\frac{1}{p!}$ também, pois $\frac{1}{n}$ decresce e assim, $1-\frac{j}{n}$, $j = 1, ...,$ cresce e, (b_n) é crescente. Pela expressão em (*), $b_n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+...$, a qual, por (iv), é menor que 3. Logo, b_n é convergente.

(vi) Definimos $e = \lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$. Afirmação: $\lim_{n\to\infty} a_n = e$, onde $a_n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....\frac{1}{n!}$.

Solução: Em (v) vimos que $b_n = (1+\frac{1}{n})^n \leq a_n \leq 3$. Logo, $e \leq \lim a_n$. Fixado $p \in \mathbb{N}$, para $n \geq p$ e truncando a expansão de b_n no termo correspondente a $p!$ temos,

$$b_n \geq \sum_{j=0}^{p}\binom{n}{j}\frac{1}{n^j} = 1+1+(1-\frac{1}{n})\frac{1}{2!}+.......+(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n}).....(1-\frac{p-1}{n})\frac{1}{p!}.$$

Tomando o limite da expressão acima para $n \to +\infty$, obtemos $e \geq 1+1+\frac{1}{2!}+....\frac{1}{p!}$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$. Logo, $e \geq 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+....\frac{1}{n!}+.......$ Por (v), concluímos a tese.

(vii) A sequência $(\sqrt[n]{n}) = (1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[4]{4}, ...)$ é, a partir do terceiro termo, decrescente e limitada inferiormente por 1. Logo, convergente. Determine seu limite.

9. **Série Geométrica** A sequência $s_0 = 1$, $s_1 = 1+r$, $s_2 = 1+r+r^2$, $s_3 = 1+r+r^2+r^3+....$, indicada por $(s_n)_{n\geq 0}$, onde s_n, seu termo geral, é a soma dos $(n+1)$ primeiros termos de uma progressão geométrica de razão r é convergente, ou não, dependendo da razão r. Determine os valores de r tais que (s_n) é convergente e, neste caso, o limite.

Sugestão: Exercício 2.

NÚMEROS COMPLEXOS

10. **Adição** Sejam $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$, dois números complexos, sendo $i^2 = -1$, $a_j = Re(z_j)$, $b_j = Im(z_j)$. Definimos a adição por $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$.

    (a) A adição é comutativa, associativa, $(\mathbb{C}, +)$ têm elemento neutro, todo elemento $z \in \mathbb{C}$ têm elemento oposto (para a adição). Se $\lambda \in \mathbb{R}$, definindo $\lambda z = \lambda a + i\lambda b$ sendo $a = Re(z), b = Im(z)$, temos uma multiplicação por escalares reais tal que $\mathbb{C}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Isto é, $\lambda_1(\lambda_2 z) = (\lambda_1\lambda_2)z$, $-(\lambda z) = (-\lambda)z$, $1.z = z$ e ainda, $\lambda(z_1 + z_2) = \lambda z_1 + \lambda z_2$ e $(\lambda_1 + \lambda_2)z = \lambda_1 z + \lambda_2 z$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

    (b) Geométricamente, a adição de números complexos é a adição de vetores em $\mathbb{R}^2$. Represente, graficamente, as adições:

    (i) $(1 + 3i) + (2 - 5i)$. (ii) $(-4 - i) + (-7 + 2i)$. (iii) $7 + (-1 + i)$.

    (c) Mostre que $Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$ e $Re(\lambda z) = \lambda Re(z), \lambda \in \mathbb{C}$.

    (d) $Re(iz) = -Im(z)$ e $Im(iz) = Re(z)$.

11. **Multiplicação** Dados $z = x + iy$ e $w = u = iv$, onde x, y, u e $v \in \mathbb{R}$, e $i^2 = -1$, definimos $zw = (x + iy)(u + iv) = (xu - yv) + i(xv + yu)$. Verifique as propriedades abaixo.

    (a) Comutativa: $z_1 z_2 = z_2 z_1, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

    (b) Associativa: $(z_1 z_2)z_3 = z_1(z_2 z_3), \forall z_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2, 3$.

    (c) Distributiva: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3, \forall z_j \in \mathbb{C}, j = 1, 2, 3$.

    (d) Elemento neutro: $1 = 1 + 0i$ satisfaz, $1z = z, \forall z \in \mathbb{C}$.

    (e) Elemento inverso: $\forall z \neq 0$ existe $z^{-1} \in \mathbb{C}$ tal que $z.z^{-1} = 1$.
    Resposta: Para $z = x + iy$, defina $z^{-1} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$. Notação: $z^{-1} = \frac{1}{z}$.

    (f) Interpretação geométrica (vamos melhorá-la logo) Identificando $z = a + ib \neq 0$ com o vetor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $z \equiv (a, b)$, o inverso $z^{-1} = \frac{a-bi}{a^2+ib^2}$ é identificado com um vetor, $\frac{1}{a^2+b^2}(a, -b)$, paralelo à reta de direção $(a, -b)$, a reflexão de (a, b) em relação ao eixo x. Represente graficamente a direção dos inversos dos números complexos em 10(b).

    (g) $i^{-1} = -i$.

12. **Conjugação** Dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1$, o conjugado de z é $\overline{z} = a - ib$.

    (a) Propriedades:

    (i) $\overline{\overline{z}} = z$. (ii) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

    (iii) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$. (iv) $z + \overline{z} = 2Re(z)$.

    (v) $z - \overline{z} = 2Im(z)$.

    (b) Geometricamente $\overline{z}$ é a reflexão de z em relação ao eixo x. Determine os conjugados dos números complexos em 10 (b). Note que $\overline{i} = -i = i^{-1}$.

13. **Módulo** Para $z \in \mathbb{C}$, o módulo de z é definido por $|z| = \sqrt{|a|^2 + |b|^2}$.

(a) Propriedades.

(i) $|z| = 0$ se, e somente se, $z = 0$. (ii) $|z| = |\overline{z}|$.

(iii) $|z|^2 = z\overline{z}$. (iv) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

Sugestão para (iv): Compute $|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{z_1 z_2} = ...$

(v) $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, se $z \neq 0$. (vi) $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, se $z_2 \neq 0$.

Sugestão para (vi): $|zz^{-1}| = |1| = 1$ logo, $|z||z^{-1} = 1$ e $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$. Prossiga.

(b) Geometricamente, o módulo de $z = a + ib$, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, é a distância de $z \equiv (a, b)$ à origem. Assim, números complexos com mesmo módulo pertencem a um mesmo círculo centrado na origem. Para os números em 10(b), represente graficamente estes círculos.

(c) O número $z = a+ib$ têm a direção de (a, b) e $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z} \equiv \frac{1}{a^2+b^2}(a, -b)$ a de $(a, -b)$, o reflexo de (a, b) em relação ao eixo x. Seus módulos são inversamentes proporcionais, $|z||\frac{1}{z}| = 1$. Quão mais próximo z da origem mais distante o inverso e vice-versa. Basicamente, $\frac{1}{z}$ permuta $inside - out$ mantendo características geométricas fundamentais (ângulos) o que é basilar em teoria dos fractais. Para os exemplos em 10(b) desenhe os ângulos que os inversos têm com o eixo x e os círculos de raios iguais ao módulo dos inversos.

(d) A multiplicação. Dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, $\omega_1 = \frac{z}{|z|}$ é identificado com o versor (vetor de comprimento 1) $\frac{(a,b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Representamos ω_1 como um ponto em S^1, o círculo trigonométrico, de raio 1 e centrado na origem. Logo, para algum ângulo α têm-se: $\omega_1 = (cos\alpha, sen\alpha)$. Se $w \neq 0$ é também complexo temos $\omega_2 = \frac{w}{|w|} = (cos\beta, sen\beta)$. Pela definição da multiplicação temos o produto abaixo, que simplificamos via trigonometria,

$$\omega_1\omega_2 \equiv (cos\alpha\, cos\beta - sen\alpha\, sen\beta \ , \ cos\alpha\, sen\beta + sen\alpha\, cos\beta\,)$$

$$(*) \quad \omega_1\omega_2 \equiv (cos(\alpha + \beta) \ , \ sen(\alpha + \beta)) \quad .$$

Assim, $\frac{z}{|z|}\frac{w}{|w|} = \omega_1\omega_2 \equiv (cos(\alpha + \beta) \ , \ sen(\alpha + \beta))$ e,como $zw = |z||w|\frac{z}{|z|}\frac{w}{|w|}$, concluímos que

$$zw \equiv |z||w|(cos(\alpha + \beta) \ , \ sen(\alpha + \beta)) \ .$$

Portanto, o produto de z e w, é o número zw cujo módulo é o produto dos módulos de z e w e, cujo ângulo formado com o eixo x é a soma dos ângulos que z e w formam com o mesmo eixo. Interprete geometricamente os produtos entre os números em 10(b).

(e) **Fórmula de Moivre** Pela fórmula (*), dado $\omega \in \mathbb{C}$, $|\omega| = 1$, temos,

$$\omega = cos\theta + isen\theta \qquad \Rightarrow \qquad \omega^n = cos\, n\theta + isen\, n\theta \ .$$

14. **Desigualdade Triangular** Prove: $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

15. **Um Teorema sobre Raízes de Polinômios** Todo polinômio de grau ímpar com coeficientes reais têm ao menos uma raíz real.
Sugestão: Mostre que, neste caso, se z é raíz complexa então $\overline{z}$ também é raíz.