Curso: MAT 221- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Período: Segundo Semestre de 2008

SÉRIE BINOMIAL (NEWTON)

O que segue são as soluções dos exercícios 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, seção 3.5, pg. 71, e 14, 18, 19 e 20, seção 8.4, pp. 145-148, Guidorizzi, L. H., 'Um Curso de Cálculo', vol 4, 5ª ed., Ed. LTC.

1. **Objetivo** Provaremos ao longo destas notas o resultado abaixo, em $\mathbb{R}$.

2. **Teorema do Binômio** Dado $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$, consideremos a função $f(x) = (1+x)^\alpha, x \geq -1$, e a **série binomial**, $1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!} x^n$. É válida a **fórmula do binômio**,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n ,$$

$$\binom{\alpha}{0} = 1 , \quad \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!},$$

   (a) Para todo $x \in (-1,1)$. Ainda, o raio de convergência da série binomial é 1.

   (b) Se $\alpha > 0$, para todo $x \in [-1,1]$.

   (c) Se $-1 < \alpha < 0$, para todo $x \in (-1,1]$. Se $x = -1$ a série diverge.

   (d) Se $\alpha \leq -1$ a série diverge em $x = -1$ e em $x = 1$.

   Isto é, o **domínio de convergência** (conjunto dos pontos em que uma série de funções converge) da série binomial é $[-1,1]$ se $\alpha > 0$, $(-1,1]$ se $-1 < \alpha < 0$ e, $(-1,1)$ se $\alpha \leq -1$.

3. **Lema 1** Seja $\alpha \in \mathbb{R} - \mathbb{N}$. Consideremos a equação diferencial linear de 1ª ordem

$$(*) \qquad y' = \frac{\alpha}{1+x} y, \; x > -1 \quad .$$

   (a) A função $y = (1+x)^\alpha$, $x > -1$, satisfaz (*).

   (b) Se $y = g(x)$, $-1 < x < 1$, $g(0) = 1$, é solução de (*) em $(-1,1)$ então,

$$g(x) = (1+x)^\alpha , x \in (-1,+1) \quad .$$

   Prova

   (a) Para $x > -1$ está bem definida a função $y = (1+x)^\alpha = e^{\alpha ln(1+x)}$ e

$$y'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \alpha \frac{(1+x)^\alpha}{(1+x)} = \frac{\alpha}{1+x} y \; .$$

   (b) Se g satisfaz (*) então, $\frac{d}{dx}\left[\frac{g(x)}{(1+x)^\alpha}\right] = \frac{g'(1+x)^\alpha - \alpha g(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}} =$

   $= \frac{1}{(1+x)^{2\alpha}}\left[\frac{\alpha g}{1+x}(1+x)^\alpha - \alpha g(1+x)^{\alpha-1}\right] = 0 \Rightarrow \frac{g(x)}{(1+x)^\alpha} = c \in \mathbb{R} \Rightarrow c = g(0) = 1$ ■

4. **Teorema 1 (Do Binômio)** A **série binomial** $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!}x^n, \alpha\in\mathbb{R}-\mathbb{N}$, satisfaz:

   (a) Tem raio de convergência $R=1$.

   (b) É solução de $(*)\ y' = \frac{\alpha}{1+x}y$, em $(-1,+1)$ e com $g(0)=1$, a função
   $$g(x)=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!}x^n\ , -1<x<+1\ .$$

   (c) A **identidade binomial**, pondo $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n\,!}$, $n\geq 1$, $\binom{\alpha}{0}=1$,
   $$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\ =1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!}x^n\ , -1<x<+1\ .$$

   Prova

   (a) Temos,
   $$\frac{|x|^{n+1}}{|x|^n}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)!}\ \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}\right|=|x|\,|\frac{\alpha-n}{n+1}|.$$
   Assim, como $\lim_{n\to+\infty}|\frac{\alpha-n}{n+1}|=1$, pelo teste da razão a série binomial converge se $|x|<1$.

   (b) É claro que $g(0)=1$ e ainda, a série de potências $g=g(x)$ é derivável em $(-1,+1)$ e
   $$g'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....(\alpha-n+1)}{n!}nx^{n-1}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....(\alpha-(n-1))}{(n-1)!}x^{n-1}=$$
   $$=\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....(\alpha-m)}{m!}x^m.$$
   O m-ésimo coeficiente, $m\geq 1$, na série de potências para $(1+x)g'$ no ponto $x_0=0$ é
   $$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....(\alpha-m)}{m!}\ +\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)....(\alpha-m+1)}{(m-1)!}=$$
   $$\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-m+1)}{(m-1)!}\left(\frac{\alpha-m}{m}+1\right)=\alpha\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-m+1)}{m!}\ ,$$
   que é igual ao coeficiente do monômio x^m, $m\geq 1$, na série de potências para $\alpha g(x)$. Os termos independentes de $(1+x)g'$ e $\alpha g(x)$ são, $g'(0)=\alpha$ e $\alpha g(0)=\alpha 1=\alpha$. Logo, g satisfaz a equação (*).

   (c) Pelos itens (b), do lema 1, e (b), acima, temos $g(x)=(1+x)^\alpha$, $\forall\, x\in(-1,+1)$ ■

5. **Lema 2** Para $\alpha\in\mathbb{R}$, não natural, a série abaixo converge se $\alpha>0$ e diverge se $\alpha<0$,
   $$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!}\right|\ .$$

   Prova Aplicando o critério de Raabe temos, $\lim_{n\to+\infty}n\left(1-|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\right) = \lim_{n\to+\infty}n\left(1-|\frac{\alpha-n}{n+1}|\right)$. Logo, para $n>>$, $\lim_{n\to+\infty}n\left(1-\frac{n-\alpha}{n+1}\right)=\lim_{n\to+\infty}n\frac{\alpha+1}{n+1}=\alpha+1$. Donde, segue a tese ■

6. **Teorema 2 (Do Binômio)** Seja $\alpha > 0$, não natural. Então,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!} x^n , \ \forall\, x \in [-1,+1].$$

Prova Pelo teste M de Weierstrass e lema 2 a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{0} x^n$, de funções contínuas, converge uniformemente em $[-1,+1]$ a uma função $f = f(x)$ contínua em $[-1,+1]$ que, pelo teorema 1, em $(-1,+1)$ é igual a $(1+x)^\alpha$, também contínua em $[-1,+1]$. Logo, $(1+x)^\alpha = f(x)\,, \forall\, x \in [-1,+1]$ ■

7. **Lema 3** Seja (a_n), $n \geq 0$, uma sequência de termos estritamente positivos tal que

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L\,,\ L \neq 0 \quad .$$

(a) Se $L > 0$ temos,

(i) Existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n^p$ é convergente.

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

(b) Se $L < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$.

Prova

(a) (i) Pelas regras operatórias para limites temos $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 0\,L = 0$. Logo, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Assim, fixado $p \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left[1 - \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^p\right] = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\left[1 + \frac{a_{n+1}}{a_n} + ... + \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{p-1}\right] = L\,p\ .$$

Sendo $L > 0$ podemos escolher $p \in \mathbb{N}$ tal que $L\,p > 1$. Para tal valor de p temos, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left[1 - \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^p\right] > 1$. Logo, pelo critério de Raabe, a série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n^p$ converge.

(ii) O termo geral da série obtida em (a), a_n^p, tende a zero e então $a_n \to 0$.

(b) Se $L < 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \Rightarrow 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} < 0$ e, portanto, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ ■

8. **Lema 4** Para $\alpha \in \mathbb{R}$, não natural. Consideremos $(a_n), n \geq 1$, a sequência dada por,

$$a_n = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!}\right| .$$

(a) Se $-1 < \alpha$ então $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ e ainda, $(a_n)_{n\geq n_0}, n_0 > \alpha$, decresce.

(b) Se $\alpha < -1$, α inteiro ou não, então $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \neq 0$.

Prova Se $n > \alpha$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)......(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{(n+1)\,!} \frac{n!}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}\right| = \frac{|\alpha-n|}{n+1} = \frac{n-\alpha}{n+1}$. Logo, $\lim\limits_{n\to+\infty} n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} n(1 - \frac{n-\alpha}{n+1}) = \alpha + 1$. Pelo lema 3, se $\alpha + 1 > 0$ então $\lim a_n = 0$ e, se $\alpha + 1 < 0$, $\lim a_n \neq 0$ ■

9. **Teorema 3 (Do Binômio)** Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, com $-1 < \alpha < 0$. Então,

$$(1+x)^\alpha = 1 \ + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!} x^n \ , \ \ \forall\, x \in \ ]-1,+1].$$

Ainda mais, a série binomial diverge em $x = -1$.

Prova Mantendo a notação do lema 4, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!}$ é alternada pois: $\alpha < 0$, $\alpha(\alpha-1) > 0$, ... $\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)......,(\alpha-n+1)}{n!} = (-1)^n \left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!}\right| = (-1)^n a_n$; e reescrevemo-la $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$. Pelo mesmo lema, $(a_n)_{n\geq n_0} \searrow 0$ e pelo critério de Leibnitz, $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ é convergente. De passagem, em $x=-1$, pelo lema 2 a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge.

Então, é bem definida $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1 \ + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!} x^n$, $f(1) \in \mathbb{R}$.

A estimativa para o limite de uma série alternada (vide adendo ao critério de Leibitz): dada $b = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n b_n$, $(b_n) \searrow 0$, então $|b - \sum_{n=1}^{p}(-1)^n b_n| \leq b_{p+1}$ $\forall p \in \mathbb{N}$; é válida supondo (b_n) decrescente a partir de $n = n_0$, desprezando os termos iniciais $b_1, ..., b_{n_0-1}$. Pois, neste caso, $|b - \sum_{n=1}^{p}(-1)^n b_n| \ = \ |\,[\, b - \sum_{n=1}^{n_0-1}(-1)^n b_n\,] \ - \ \sum_{n_0}^{p}(-1)^n b_n\,| \ \leq \ b_{p+1}$.

Assim, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n\,!} x^n \ = \ \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n x^n$ é, fixado $x \in [0,1]$, uma série alternada, e $(a_n x^n)$ decresce se $n \geq n_0 > \alpha$, $\forall\, x \in [0,1]$. Consequentemente, utilizando a estimativa comentada, para cada $x \in [0,1]$, temos

$$\left| f(x) - \left[1 + \sum_{n=1}^{p} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n\,!} x^n\right]\right| \leq \left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-p)}{(p+1)\,!} x^{p+1}\right| \leq$$

$$\leq \ \left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-p)}{(p+1)\,!}\right| \longrightarrow 0 \ , se\ p \to +\infty \ .$$

Assim, f é limite uniforme de funções contínuas e portanto contínua e, como $(1+x)^\alpha$ é contínua em $[0,1]$ e $(1+x)^\alpha = f(x)$ em $[0,1)$ segue que $f = (1+x)^\alpha$ em $[0,1]$ ■.

10. **Adendo** Se $\alpha \leq -1$, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!} x^n$ diverge se $x = \pm 1$.

Prova Se $\alpha < -1$, pelo lema 4, $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!}\right| \neq 0$ e, em $x = \pm 1$, a série diverge. Se $\alpha = -1$, $\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2).....(\alpha-n+1)}{n!} = (-1)^n \frac{n!}{n!} = (-1)^n$ e $\sum_{1}^{+\infty}(-1)^n(\pm 1)^n$ diverge ■