SÉRIES DE FOURIER

1. Uma **série trigonométrica** e sua sequência das somas parciais $(S_N)_{\mathbb{N}}$ são dadas por

$$(1) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}\,,\ n\in\mathbb{Z},\ c_n\in\mathbb{C}\,, x\in\mathbb{R} \quad ; \qquad S_N=\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}\ .$$

Tal série converge em $x\in\mathbb{R}$ se $(S_N(x))_{\mathbb{N}}$ converge e, o **valor da série em** x é,

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \lim_{N\to+\infty} S_N(x) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}.$$

A série trigonométrica pode também ser apresentada na forma,

$$(2) \qquad \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n cos\,nx + b_n sen\,nx).$$

Escrevendo, para $n>0$,

$$e^{inx}=cos\,nx+isen\,nx \qquad , \quad e^{-inx}=cos\,nx-isen\,nx \quad ,$$

temos,

$$c_n e^{inx}+c_{-n}e^{-inx}=(\ c_n+c_{-n})cos\,nx\ +\ (ic_n-ic_{-n})sen\,nx=\ a_n cos\,nx+b_n sen\,nx$$

se

$$a_n=c_n+c_{-n} \quad , \quad b_n=i(c_n-c_{-n})\ .$$

Inversamente, para $n>0$,

$$c_0=\frac{a_0}{2}\,, \quad c_n=\frac{a_n-ib_n}{2}\,, \quad c_{-n}=\frac{a_n+ib_n}{2}\ .$$

a notação em $a_{n's}$ e $b_{n's}$ é preferida na expansão de funções periódicas a valores reais ou, funções pares, quando a série é de cossenos, ou ímpares, quando a série é de senos.

Admitamos inicialmente $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ tal que a série abaixo convirja uniformemente,

$$(*) \quad f(x)=\sum_{-\infty}^{+\infty} c_m e^{imx}.$$

Como as exponenciais são 2π-periódicas (doravante escreveremos, apenas, periódicas) e contínuas, f também o é. Assim, é lícito multiplicar (*) por e^{-inx} e integrarmos termo a termo, comutando o símbolo de somatório com o de integral, obtendo

$$(**) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx=\sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x}dx.$$

Como é fácil ver temos

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = \begin{cases} 2\pi\,, n = 0 \\ 0\,, n \neq 0. \end{cases}$$

Logo, por (**),

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \ .$$

Chamamos c_n de **n-ésimo coeficiente de Fourier de** f e indicamos $c_n = c_n[f]$.

Observação: $|c_n| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$.

Sendo os coeficientes bem definidos se $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ é periódica e integrável, a **série de Fourier de** f é a série trigonométrica com **coeficientes de Fourier de** f dados pela **família** $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Notamos, não supondo qualquer modo de convergência,

$$f \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Notação: $\mathcal{R}[a, b]$ é o conjunto das funções $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ Riemann integráveis.

Se $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$ é 2π-periódica e real, a **série de Fourier de** f é uma série trigonométrica como em (2), com **coeficientes de Fourier de** f dados pelas sequências $(a_n)_{n\geq 0}$ e $(b_n)_{\mathbb{N}}$,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad , \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos\, nx\, dx \ , \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen\, nx\, dx.$$

Notamos, sem supormos qualquer convergência,

$$f(x) \sim \ \frac{a_0}{2} \ + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n cos\, nx + b_n sen\, nx), a_n, b_n \in \mathbb{R} \ .$$

As questões mais importantes em séries de Fourier são:

(a) A série de Fourier converge em algum modo ? Simplesmente ? Uniformemente ? Em média ?, etc.

(b) A série de Fourier, se convergir, converge a f ?

(c) O que ocorre se f é contínua ?

(d) Duas funções com mesmos coeficientes de Fourier são iguais ?

Eis parte das respostas. Se f é Riemann integrável, sua série de Fourier converge em média quadrática a f. A série de Fourier de f, contínua, pode divergir em 'vários' pontos [1]. Duas funções integráveis com iguais coeficientes de Fourier são iguais, exceto num conjunto de conteúdo nulo (medida nula). A melhor classe de funções para analisar funções periódicas e Riemann integráveis é a de funções de variação limitada, $BV[-\pi, \pi]$. A teoria apropriada ao estudo geral das séries de Fourier é a da Integração de Lebesgue.

Nesta introdução omitiremos a prova da Fórmula de Parsevall. Quanto ao teorema de Dirichlet-Jordan, veremos versões mais simples, proposições 1 e 2 e teorema 4, de Dini.

2. **Teorema 1: A Melhor aproximação em média quadrática** de $f \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$, periódica, no espaço vetorial gerado pelas funções e^{inx}, $-N \leq n \leq N$, é a N-ésima soma parcial

$$S_N = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}, \quad c_n = c_n[f],$$

da série de Fourier de f. Isto é, se $g = \sum_{n=-N}^{N} d_n e^{inx}$, $d_n \in \mathbb{C}$, d_n qualquer, temos

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{n=N}^{N} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - g(x)|^2 dx.$$

Prova Seja $d_n = c_n + \epsilon_n$. Então,

$$d(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum_{-N}^{N} d_n e^{inx}|^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \frac{1}{2\pi} 2Re \sum_{-N}^{N} \overline{d_n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{-N}^{N}\sum_{-N}^{N} d_n \overline{d_m} e^{i(n-m)x} dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \; - \; 2Re \sum_{-N}^{N} \overline{d_n} c_n \; + \; \sum_{-N}^{N} |d_n|^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \; - (\; 2\sum_{-N}^{N} |c_n|^2 \; + 2Re \sum_{-N}^{N} c_n \overline{\epsilon_n} \;) \; +$$

$$+ \; (\sum_{-N}^{N} |c_n|^2 + 2Re \sum_{-N}^{N} c_n \overline{\epsilon_n} + \sum_{-N}^{N} |\epsilon_n|^2 \;) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \; \sum_{-N}^{N} |c_n|^2 + \; \sum_{-N}^{N} |\epsilon_n|^2 \; = d(f;S_N) + \sum_{-N}^{N} |\epsilon_n|^2 \quad \blacksquare$$

3. **Desigualdade de Bessel** Com mesmas hipóteses, se $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ então,

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \; .$$

Prova Pelo teorema, $d(f;S_N) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{-N}^{N} |c_n|^2 \geq 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$. Logo, tomando o limite para N tendendo a $+\infty$, segue a tese $\blacksquare$

Observação Em termos dos coeficientes da série trigonométrica de senos e cossenos a desigualdade de Bessel pode ser reescrita como,

$$\frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\; |a_n|^2 + |b_n|^2 \;) \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \; .$$

4. **Lema de Riemann-Lebesgue** Se $f \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$ então, $\lim\limits_{|n|\to+\infty} |c_n| = 0$.

   Prova Consequência imediata da desigualdade de Bessel ■

   Abaixo relacionamos diferenciabilidade com decrescimento dos coeficientes de Fourier e convergência uniforme da série de Fourier, cujo limite será mostrado no teorema de Dini.

5. **Proposição 1** Seja $f \in C^k(\mathbb{R})$ e 2π-periódica.

   (a) Existe $M > 0$ tal que $|c_n| \le \frac{M}{n^k}, n \neq 0$.

   (b) Se $k \ge 2$ a série de Fourier de f converge uniformemente.

   Prova Seja $c_n = c_n[f], n \neq 0$. Efetuando integração por partes k vezes, descartando parcelas nulas graças a periodicidade de f, f',.., $f^{(k)}$ e e^{-inx} temos,

$$2\pi c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = -(\frac{1}{-in})\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-inx}dx = ... = (\frac{1}{in})^k \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x)e^{-inx}dx \ .$$

   Logo, para $n \neq 0$,

$$|c_n e^{inx}| = |c_n| \ \le \ \frac{M}{n^k} \ \ , \ M = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(k)}(x)|dx \ .$$

   (b) Pelo teste M de Weierstrass e $\sum \frac{1}{n^2} < \infty$, $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ converge uniformemente ■

6. **Definição** Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $\Gamma = \{x_0 = a < x_1 < .... < x_{n-1} < x_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$, a variação de f segundo a partição Γ é,

$$V_\Gamma = V_\Gamma[f;a,b] = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \ .$$

   A variação de f sobre $[a,b]$ é,

$$V[f] = sup\, V_\Gamma \ ,$$

   onde o supremo é computado sobre todas as partições de $[a,b]$.

7. O conjunto das **funções de variação limitada** é **BV[a,b]** $= \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\, , V[f] < \infty\}$.

   Sabe-se que $V[f] < \infty \Leftrightarrow$ o gráfico de f têm comprimento finito. Logo, para $f(x) = sen\frac{1}{x}$, $0 < x \le 1$, $f(0) = 0$, temos $V[f] = +\infty$. Mas, existem f contínuas com $V[f] = +\infty$ [3].

   Ainda, $V[f] < \infty \Leftrightarrow f$ é diferença de duas funções monótonas limitadas. Logo, havendo descontinuidades, elas são removíveis ou de 1ª espécie; isto é, existem os limites laterais.

   Assim, escolheremos uma subclasse das funções da variação limitada para esta introdução.

8. **Definição** Dado I, um intervalo, $f : I \to \mathbb{R}$ é **monótona crescente**, ou **crescente**, se $\forall\, x_1, x_2 \in I$, $x_2 \ge x_1 \Rightarrow f(x_2) \le f(x_1)$ e, se $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$, f é **estritamente crescente**. Analogamente, temos **monótona decrescente** e **estritamente decrescente**. Ainda, f é **monótona** se é crescente ou decrescente.

9. **Definição** Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, f é **monótona por partes** se existe partição de $[a,b]$, $\Gamma = \{x_0 = a < x_1 < .... < x_n = b\}$, tal que $f_{|(x_{i-1},x_i)}$ é monótona, $i = 1,2,....,n$. Se $f_{|(x_{i-1},x_i)}$ é também contínua, $i = 1,2,.....,n$, f é **monótona contínua por partes**. Definimos analogamente se $I = [a,b)$ ou $I = (a,b]$ ou $I = (a,b)$, é limitado.

10. **Obs** Não é difícil ver que se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é monótona por partes e limitada, f é de variação limitada e existem os limites laterais, $f(x_i^-) = \lim\limits_{x \to x_i^-} f(x)$ e $f(x_i^+) = \lim\limits_{x \to x_i^+} f(x)$.

11. **Definição** Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, T-periódica, f é monótona contínua por partes se $f_{|[0,T]}$ o é.

12. Dada $f : X \to \mathbb{C}$, $X \subset \mathbb{R}$, e $x \in X$ notamos $f(x^\pm) = \lim\limits_{t \to x^\pm} f(t)$, se existir o limite.

13. **Teorema 2 (Dirichlet-Jordan)** Seja $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ monótona contínua por partes.

    (a) Para todo $x \in \mathbb{R}$ e $S[f]$ a série de Fourier de f temos,

    $$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n cos\, nx + b_n sen\, nx) = \frac{1}{2}[\ f(x^+) + f(x^-)\ ]\ .$$

    (b) $S[f]$ converge uniformemente a f em todo intervalo fechado em que f é contínua.

    Prova Para (a) vide Apostol, p. 388. Para (b) vide Wheeden, p. 238.

14. **Lema 1** Para $f \in \mathcal{R}[a,b]$ temos,

    $$\int_a^b |f(x)|dx \leq \left((b-a) \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}\ .$$

    Prova Se a integral do lado direito da equação acima é nula o resultado é óbvio. Senão, pela desigualdade $|AB| \leq \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$ com $A = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}}$ e $B = \frac{1}{\sqrt{b-a}}$ temos,

    $$\frac{|f(x)|}{\sqrt{b-a}\left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}}\ \leq\ \frac{1}{2}\left(\frac{|f(x)|^2}{\int_a^b |f(t)|^2 dt}\ +\ \frac{1}{b-a} \right),$$

    que integrando sobre $[a,b]$ conduz a,

    $$\frac{\int_a^b |f(x)|dx}{\left((b-a)\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2}(1+1) = 1 \ \blacksquare$$

    O lema 1 é um caso particular da célebre desigualdade abaixo, com demonstração análoga.

15. **Desigualdade de Cauchy-Schwarz** Para $f, g \in \mathcal{R}[a,b]$ temos,

    $$\int_a^b |f(x)g(x)|dx\ \leq\ \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\ .$$

    Prova Trivial, se uma das integrais à direita é nula. Senão, basta seguir os passos da prova do lema 2, utilizando $|AB| \leq \frac{1}{2}(A^2 + B^2)$, com $A = \frac{|f(x)|}{\left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}}$ e $B = \frac{|g(x)|}{\left(\int_a^b |g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}}$ $\blacksquare$

16. **Teorema 3** Seja $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$, 2π periódica, $f \sim \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ e $S_N(x) = \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx}$.

(a) $S_N(x)$ converge a f em média quadrática:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_N(x)|^2 \; dx = 0.$$

(b) **Fórmula de Parsevall**

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \; .$$

(c) As integrais de S_N convergem uniformemente a integral de f, em $[-\pi, x]$, $\forall x$. Ainda,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{x} |f(t) - S_N(t)| dt \le \left[\; \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{x} |f(t) - S_N(t)|^2 dt \; \right]^{\frac{1}{2}} \; .$$

Prova Para (a) e (b) vide [2] pp 74-77.

(c) Pelo Lema 1 temos, $\int_{-\pi}^{x} |f(t) - S_N(t)| dt \le \left[\; (x + \pi) \int_{-\pi}^{x} |f(t) - S_N(t)|^2 dt \; \right]^{\frac{1}{2}}$ que, dividindo por 2π, utilizando $(x + \pi) \le 2\pi$ e item (a), resulta na tese ■

Observação Em termos dos coeficientes (a_n) e (b_n) a fórmula de Parsevall é:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \; .$$

Melhoremos o resultado, na proposição 1, para a convergência uniforme da série de Fourier.

17. **Proposição 2** A série de Fourier de $f \in C^1(\mathbb{R})$, 2π-periódica, converge uniformemente.
Prova Como na proposição 1, integrando por partes a expressão para $c_n = c_n[f]$ temos,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{in} d_n \; , \quad d_n = d_n[f'] \, , n \neq 0 \; .$$

Pela desigualdade de Schwarz para $a = (a_i)$, $b = (b_i) \in \mathbb{C}^m$ temos, para somas finitas,

$$\sum_{i=1}^{m} |a_i| \, |b_i| \le (\sum_{i=1}^{m} |a_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{m} |b_i|^2)^{\frac{1}{2}},$$

que é estensível a somas infinitas. Assim, pela desigualdade de Bessel para f' e $n \in \mathbb{Z} - \{0\}$,

$$\sum |c_n| = \sum \frac{1}{|n|} |d_n| \le \left(\sum \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum |d_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Finalmente, pelo teste M de Weierstrass, segue a proposição ■

18. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ satisfaz a **condição de Lipschitz em** x se $\exists M > 0$ e $\delta > 0$ tais que,

$$|f(x + t) - f(x)| \le M|t| \;\; , \;\; \forall \, t \, , \; |t| \le \delta \; .$$

19. **Obs** Existindo $f'(x)$, f satisfaz a condição de Lipschitz em x mas, se houver um 'salto' em x (descontinuidade de 1ª espécie), não. A função $\sqrt{x}$ não satisfaz a condição em $x = 0$.

20. **Teorema 4 (Dini)** Seja $f \in \mathcal{R}[-\pi, \pi]$, 2π-periódica, satisfazendo a condição de Lipschitz em $x \in [-\pi, \pi]$. Então, a série de Fourier de f, em x, converge a $f(x)$.

Prova Fixando x, sejam δ e M como na condição de Lipschitz e,

$$g(t) = \begin{cases} \frac{f(x-t)-f(x)}{sen\frac{t}{2}}, & 0 < |t| \leq \pi\,. \\ 0\,,\ t = 0\,. \end{cases}$$

Temos: (1) $(sen\frac{t}{2})^{-1}$ é contínua em $\delta \leq |t| \leq \pi$ e, g é aí integrável; (2) se $0 < |t| \leq \delta$, $|g(t)| \leq \frac{M|t|}{|sen\frac{t}{2}|} = 2M\frac{\frac{|t|}{2}}{sen\frac{|t|}{2}}$ e, pelo primeiro limite fundamental, g é integrável em $[-\delta, \delta]$. Logo, g é integrável.

Ainda, é fácil ver que para $D_N(t) = \sum\limits_{-N}^{N} e^{int}$, e $S_N(f;x) = \sum\limits_{-N}^{N} c_n e^{inx}$ (vide L5.16),

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)dt = 1\,, \\ D_N(t) = \frac{sen(N+\frac{1}{2})t}{sen\frac{t}{2}}\,, t \notin 2\pi\mathbb{Z}\,, \\ S_N(f;x) \ = \ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(s)D_N(x-s)ds \ = \ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{sen(N+\frac{1}{2})t}{sen\frac{t}{2}}dt \end{cases}$$

Assim, escrevendo $f(x) = f(x).1$ e trocando 1 pela média de D_N em $[-\pi, \pi]$ temos,

$$S_N(f;x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\frac{sen(N+\frac{1}{2})t}{sen\frac{t}{2}}dt \ - \ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{sen(N+\frac{1}{2})t}{sen\frac{t}{2}}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(t)sen(N+\frac{1}{2})t\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\,g(t)cos\frac{t}{2}\,]sen\,Nt\,dt \ + \ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\,g(t)sen\frac{t}{2}\,]cos\,Nt\,dt\,.$$

Pelo Lema de Riemann-Lebesgue os dois últimos termos tendem a zero ■