Curso: MAT 221- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2008

SÉRIES E SOMAS EM $\mathbb{R}$ E EM $\mathbb{C}$

1. Denotamos a série associada à sequência (x_n), ou simplesmente série, e o limite, ou valor da série, se existir, por: $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ ou $\sum^{+\infty} x_n$. Por $\sum_{n=p}^{+\infty} x_n$ indicamos a série associada à sequência $(x_p, x_{p+1}, x_{p+2}, ...)$. O limite de uma série depende da ordem dos elementos em (x_n) e tais notações refletem tal aspecto. Já a soma, abaixo definida, da sequência (x_n) independe da ordem e a notação $\sum_{\mathbb{N}} x_n$ é apropriada. A notação $\sum x_n$ seria adequada para a soma de (x_n) mas é assaz utilizada para séries e assim, a adotamos só para séries de termos positivos, quando as definições de soma e séries são evidentemente equivalentes, ou para somas indexadas em conjuntos que não $\mathbb{N}$ e o contexto permitir.

2. **Definição** A série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$, em $\mathbb{K}$, é **comutativamente convergente** se existe $x \in \mathbb{K}$ tal que para toda bijeção $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_{\varphi(n)} = x$. A função φ é uma **ordenação** da série.

3. **Teorema 1 (Convergência e Comutatividade)** Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ uma série em $\mathbb{R}^+$. Temos,
$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \;=\; sup\{\sum_{n\in F} x_n : F\ finito\} \;= \alpha \;\in\; [0, +\infty] \,.$$
Se $\alpha < \infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é comutativamente convergente; se $\alpha = +\infty$, comutativamente divergente.
Prova Como o supremo independe da ordenação dada na série, provada a convergência em $\mathbb{R}$, ou a divergência a $+\infty$, ambas são comutativas.
Caso $\alpha = +\infty$. Seja (s_n) a sequência de somas parciais de $\sum^{+\infty} x_n$ e $M > 0$, arbitrário. Por hipótese, existe $F \subset \mathbb{N}$, F finito, tal que $\sum_{n\in F} x_n > M$. Para $n > n_0 = max(F)$ temos, $s_n = x_1 + ... + x_{n_0} + ...x_n \geq \sum_{n\in F} x_n > M$. Logo, $\sum^{+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.
Caso $\alpha < \infty$. Por definição, $\forall \epsilon > 0$ existe $F_\epsilon \subset \mathbb{N}$, F_ϵ finito, tal que $\alpha - \epsilon < \sum_{F_\epsilon} x_n \leq \alpha$. Portanto, se $N \in \mathbb{N}$ é tal que $F_\epsilon \subset \{1, 2, ..., N\}$, para $n \geq N$ temos $\alpha - \epsilon \leq \sum_{F_\epsilon} x_n \leq s_n \leq \alpha$, s_n a n-ésima soma parcial da série. Logo, $\alpha = \lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ ∎
Somabilidade : (a) Uma **sequência** (x_n) é **somável,** com **soma** $x \in \mathbb{K}$, se para todo ϵ positivo existe $F_\epsilon \subset \mathbb{N}$, F_ϵ finito, tal que:
$$\left|\sum_{n\in F} x_n - x\right| < \epsilon,\ \forall\ F \supset F_\epsilon\ ,\ F \subset \mathbb{N}\ e\ F\ finito\ .$$
(b) **Uma família** em $\mathbb{K}$ é uma função $x : I \to \mathbb{K}$, I um conjunto de índices, que notamos $(x_i)_I$, $x_i = x(i)$, $\forall i$. Trocando $\mathbb{N}$ por I, em (a), temos a definição de **família somável**.

Corolário 1 Se a série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ em $[0, +\infty)$ é convergente, a sequência (x_n) é somável e,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{\mathbb{N}} x_n = \sum x_n \ .$$

Prova Segue imediatamente do teorema 1 e da definição acima ■

4. **Proposição 1** Se $(x_n) \subset \mathbb{K}$ é somável, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ converge comutativamente e $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{\mathbb{N}} x_n$.
Prova Dado $\epsilon > 0$ seja $F_\epsilon \subset \mathbb{N}$ como na definição de somabilidade, $x = \sum_{\mathbb{N}} x_n$ e (s_n) a sequência das somas parciais da série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$. Escolhendo $N \in \mathbb{N}$ tal que $F_\epsilon \subset \{1, 2, ..., N\}$ temos, para $n \geq N$, $F_n = \{1, ..., n\} \supset F_\epsilon$ e $|s_n - x| = |\sum_{F_n} x_n - x| < \epsilon$. Logo, $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = x$ e, como a soma da sequência (x_n) independe, é óbvio, da ordem adotada, segue a tese ■

5. **Proposição 2** As sequências somáveis em $\mathbb{K}$ formam um espaço vetorial com as operações, $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$ e $\lambda(x_n) = (\lambda x_n)$. Ainda mais, se $\sum_{\mathbb{N}} x_n = x$ e $\sum_{\mathbb{N}} y_n = y$ então,

   (a) $\sum_{\mathbb{N}} (x_n + y_n) = \sum_{\mathbb{N}} x_n + \sum_{\mathbb{N}} y_n$.

   (b) $\sum_{\mathbb{N}} \lambda x_n = \lambda \sum_{\mathbb{N}} x_n$.

   Prova Exercício (é trivial).

   Definição Dada $\sum^{+\infty} a_n$ em $\mathbb{R}$, p_n **, a parte positiva de** a_n, é dada por $p_n = a_n$ se $a_n \geq 0$ e $p_n = 0$ se $a_n \leq 0$. A **parte negativa** de a_n, é $q_n = -a_n$ se $a_n \leq 0$ e, $q_n = 0$ se $a_n \geq 0$.

   Temos, $a_n = p_n - q_n$, $|a_n| = p_n + q_n$, $p_n \geq 0$ e $q_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
   Mantendo a notação desta definição temos os lemas abaixo.

6. **Lema 1** Para toda série $\sum^{+\infty} a_n$ em $\mathbb{R}$ temos, $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum p_n + \sum q_n$.

   Prova Basta tomar o limite, para $m \to +\infty$, da expressão $\sum_{n=1}^{m} |a_n| = \sum_{n=1}^{m} p_n + \sum_{n=1}^{m} q_n$ ■

7. **Lema 2** A série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, em $\mathbb{R}$, converge absolutamente se, e só se, (p_n) e (q_n) são somáveis. Neste caso, (a_n) é somável, $\sum^{+\infty} a_n$ é comutativamente convergente e

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum_{\mathbb{N}} |a_n| = \sum_{\mathbb{N}} p_n + \sum_{\mathbb{N}} q_n \ ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{\mathbb{N}} p_n - \sum_{\mathbb{N}} q_n \ = \sum_{\mathbb{N}} a_n.$$

   Prova Segue do Corolário 1, do Lema 1 e da igualdade $a_n = p_n - q_n$ ■

8. **Teorema 2** Em $\mathbb{K}$, se $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n| < \infty$ então (a_n) é somável; isto é, $\sum_{\mathbb{N}} a_n < \infty$.

   Prova Resta o caso complexo. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} |z_n| < \infty$, como $|Re(z_n)| \leq |z_n|$ e $|Im(z_n)| \leq |z_n|$, segue que $\sum_{n=1}^{+\infty} Re(z_n)$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} Im(z_n)$ convergem absolutamente. Logo, $(Re\, z_n)$ e $(Im\, z_n)$ são somáveis e portanto, $(z_n) = (Re\, z_n) + i(Im\, z_n)$ também é somável ■

9. **Teorema 3** Dada a sequência (x_n) em $\mathbb{K}$, são equivalentes :

   (a) A sequência (x_n) é somável e $\sum_{\mathbb{N}} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$.

   (b) A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é absolutamente convergente.

   (c) A série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é comutativamente convergente.

   Prova No teorema 2 e na proposição 1, vimos $(b) \Rightarrow (a) \Rightarrow (c)$. Mostremos $(c) \Rightarrow (b)$. Obviamente, podemos supor que a série é de números reais. Façamos a prova por absurdo. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| = +\infty$ então temos $+\infty = \sum^{+\infty} p_n + \sum^{+\infty} q_n$ e ao menos uma destas séries diverge. Se $\sum^{+\infty} p_n = +\infty$ e $\sum^{+\infty} q_n = x \geq 0 \in \mathbb{R}$. A série $\sum^{+\infty} x_n$ é tal que, se $s_n = x_1 + ... + x_n$ então

   $$s_n = \sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{n} q_i \;\geq\; \sum_{i=1}^{n} p_i - x,$$

   e, como $\sum_{+\infty} p_i = +\infty$, segue que $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$, contra a hipótese de convergência.

   Se $\sum^{+\infty} p_n = \sum^{+\infty} q_n = +\infty$, reordenemos: na etapa 1, os primeiros termos, x_n, positivos com soma > 1; na etapa 2, os primeiros negativos cuja soma com os anteriores é < 0, na etapa 3, subtraidos de $\mathbb{N}$ os já escolhidos, coletamos os próximos positivos cuja soma com os anteriores é > 1. Por indução, o reordenamento é tal que (s_n), sequência das somas parciais, admite subsequência $(s_{n_k}), s_{n_k} > 1, \forall k$, e uma outra de termos negativos $\lightning$ Fim!

   A parte: $(c) \Rightarrow (b)$, acima, é uma forma fraca do **Teorema de Riemann** : se $\sum^{+\infty} a_n$, em $\mathbb{R}$, converge condicionalmente então, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ há uma ordenação de $\sum^{+\infty} a_n$ convergente a x.

10. **Definição** Seja $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente e, $\sum^{+\infty} a_n$ e $\sum^{+\infty} b_n$ relacionadas por:

    $$b_1 = a_1 + a_2 + ... + a_{\varphi(1)} \;, ..., b_{n+1} = a_{\varphi(n)+1} + a_{\varphi(n)+2} + ... + a_{\varphi(n+1)} \;,\; n = 1, 2, ... \;.$$

    A série $\sum^{+\infty} b_n$ é obtida de $\sum^{+\infty} a_n$ por **associação** e a série $\sum^{+\infty} a_n$ de $\sum^{+\infty} b_n$ por **dissociação**.

11. **Associatividade em Séries** Se $\sum^{+\infty} a_n = a$ e $\sum^{+\infty} b_n$ é dela obtida por associação, $\sum^{+\infty} b_n = a$.
    Prova Mantendo a notação acima, sejam $s_n = a_1 + ... + a_n$ e $t_n = b_1 + ... + b_n$. Por definição, $t_n = s_{\varphi(n)}$ e assim, $\lim t_n = \lim s_{\varphi(n)}$ ■

12. **Proposição** Seja $\sum^{+\infty} a_n$ uma série em $\mathbb{K}$ e absolutamente convergente. Seja $\mathbb{N} = \bigcup F_i$, F_i finito, $\forall i \in \mathbb{N}$, e $F_i \cap F_j = \emptyset$, se $i \neq j$, uma partição de $\mathbb{N}$ por conjuntos finitos. Temos,

    $$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{i=1}^{+\infty} u_i \quad ; \quad se \quad u_i = \sum_{n \in F_i} a_n \,, \forall\, i \in I \;.$$

    Prova Segue do Teorema 3 e da associatividade acima citada ■

A associatividade para somas se dá mesmo particionando $\mathbb{N}$ em infinitos subconjuntos infinitos. Por exemplo, listando todos os primos: $I = \{2,3,5,7,.....\}$, em ordem crescente, e definindo F_2: os naturais múltiplos de 2; F_3: os múltiplos de 3 mas não de 2; F_5: os múltiplos de 5 mas não de 2 ou 3, ... temos, $\mathbb{N} = \bigcup_I F_p$ e $F_p \cap F_q = \emptyset$ se $p \neq q$.

13. **Associatividade em Somas** Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos convergente. Suponhamos $\mathbb{N} = \bigcup_I J_i$, uma partição de $\mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{N}$ um conjunto de índices e $J_i \neq \emptyset$, $\forall i$. Então, $(a_n)_{n\in J_i}$ é somável, $\forall i \in I$, e ainda, $(\sum\limits_{n\in J_i} a_n)_I$ é também somável e

$$\sum a_n = \sum_{i\in I}\sum_{n\in J_i} a_n.$$

Prova Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um único $i \in I$ com $n \in J_i$ e indicamos $a_n = a_n^i$.

Dado $F \subset \mathbb{N}$, F finito, existem $\{i_1,...,i_k\}$ tais que $F \subset \{J_{i_1},...,J_{i_k}\}$. Consequentemente, $\sum\limits_{n\in F} a_n \leq \sum\limits_{J_{i_1}} a_n^{i_1} + ... + \sum\limits_{J_{i_k}} a_n^{i_k} \leq \sum\limits_{i\in I}\sum\limits_{J_i} a_n^i$ e portanto, pela definição de supremo,

$$\sum a_n = sup\{\sum_{n\in F} a_n : F finito\} \leq \sum_{i\in I}\sum_{n\in J_i} a_n^i .$$

Por outro lado, dados $\{i_1,....,i_k\}$ em I e $F_{i_r} \subset J_{i_r}$, F_{i_r} finito, $1 \leq r \leq k$, é claro que

$$\sum_{n\in F_{i_1}} a_n^{i_1} + ... + \sum_{n\in F_{i_k}} a_n^{i_k} \leq \sum_{\mathbb{N}} a_n .$$

Fixando $F_{i_2},...,F_{i_k}$ e tomando o supremo sobre os conjuntos finitos F_{i_1} em J_{i_1} temos $\sum\limits_{J_{i_1}} a_n^{i_1} + \sum\limits_{F_{i_2}} a_n^{i_2} + ... + \sum\limits_{F_{i_k}} a_n^{i_k} \leq \sum a_n$. Como $F_{i_2} \subset J_{i_2}$ é qualquer conjunto finito em J_{i_2}, fixando $F_{i_3},....F_{i_k}$ temos $\sum\limits_{J_{i_1}} a_n^{i_1} + \sum\limits_{J_{i_2}} a_n^{i_2} + \sum\limits_{F_{i_3}} a_n^{i_3} + ... + \sum\limits_{F_{i_k}} a_n^{i_k} \leq \sum a_n$ e, por indução,

$$\sum_{J_{i_1}} a_n^{i_1} + \sum_{J_{i_2}} a_n^{i_2} + ... + \sum_{J_{i_k}} a_n^{i_k} \leq \sum_{\mathbb{N}} a_n \quad .$$

Finalmente, como $\{i_1, i_2, ...i_k\}$ é qualquer subconjunto finito de I,

$$\sum_{i\in I}\sum_{n\in J_i} a_n^i \leq \sum a_n \quad \blacksquare$$

14. **Associatividade, como soma, para séries absolutamente convergentes** Seja $\sum\limits^{+\infty} a_n$, em $\mathbb{K}$, $\sum |a_n| < \infty$. Se $\mathbb{N} = \bigcup_I J_i$, com união disjunta, $I \subset \mathbb{N}$ um conjunto de índices, temos,

$$\sum^{+\infty} a_n = \sum_{\mathbb{N}} a_n = \sum_{I}\sum_{n\in J_i} a_n.$$

Prova Em $\mathbb{R}$ segue da decomposição $\sum\limits_{\mathbb{N}} a_n = \sum p_n - \sum q_n$, e da associatividade acima. Em $\mathbb{C}$, segue da decomposição $\sum\limits_{\mathbb{N}} a_n = \sum\limits_{\mathbb{N}} Re(a_n) + i\sum\limits_{\mathbb{N}} Im(a_n)$ e do caso anterior $\blacksquare$

15. **Lema 3** Se (x_n) é somável e (I_n) é uma sequência crescente de subconjuntos de $\mathbb{N}$ tal que $\cup I_n = \mathbb{N}$ (sequência exaustiva) então, $(x_k)_{k\in I_n}$ e é somável e $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k\in I_n} x_k = \sum\limits_{\mathbb{N}} x_n$.

Prova É uma consequência imediata da definição de somabilidade. Verifique.

As definições e resultados dependendo só da enumerabilidade de $\mathbb{N}$ estendem-se a subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$ ou a $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, também enumeráveis. Uma família em $\mathbb{K}$, com índices em I, é uma função $x : I \to \mathbb{K}$, denotada por (x_i) ou $(x_i)_I$. Uma sequência é uma família indexada em $\mathbb{N}$. O próximo resultado é imediato do similar obtido para séries.

16. **Teorema 4** Sejam $\sum^{+\infty} x_n$ e $\sum^{+\infty} y_m$ séries em $\mathbb{K}$. São equivalentes:

   (a) A família $(x_n y_m)_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ é somável.

   (b) $\sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} |x_n y_m| < \infty$ (isto é, a família $(x_n y_m)$ é absolutamente somável).

   (c) Se $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ é bijetora, a série $\sum_{i=1}^{+\infty} z_i$, com $z_i = x_n y_m$, $(n,m) = \varphi(i)$, é convergente.

17. **Definição** Dadas as séries $\sum^{+\infty} x_n$ e $\sum^{+\infty} y_m$ seu **produto de Cauchy** é a série

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{p=0}^{n} x_p\, y_{n-p}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i+j=n} x_i y_j = (x_0y_0) + (x_0y_1 + x_1y_0)\ldots \quad .$$

18. **Teorema (Produto de Séries)** Sejam $\sum^{\infty} x_n = x$ e $\sum^{\infty} y_m = y$ absolutamente convergentes.

   (A) **Comutatividade** Para toda ordenação (bijeção) $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ temos,

$$\sum_{(n,m)=\varphi(i),\, i=1}^{+\infty} x_n y_m = \sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_n y_m \quad .$$

   (B) Se $(I_k)\,, I_k \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$, é uma sequência crescente e $\bigcup I_k = \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ (uma **exaustão**),

$$\lim_{k\to+\infty} \sum_{I_k} x_n y_m = \sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_n y_m \ .$$

   (C)

$$\Big(\sum^{+\infty} x_n\Big)\Big(\sum^{+\infty} y_m\Big) = \sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_n y_m$$

   (D) **Associatividade** Se $\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \bigcup_{i\in I} J_i$, $I \subset \mathbb{N}$, uma partição de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ então,

$$\sum_{i\in I}\ \sum_{(n,m)\in J_i} x_n y_m = \sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_n y_m.$$

   (E)

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{m=1}^{+\infty} x_n y_m = \sum_{m=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_m = \sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_n y_m$$

   (F) O **produto de Cauchy** das séries dadas é uma série absolutamente convergente e,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{p=0}^{n} x_p\, y_{n-p}\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{i+j=n} x_i y_j = \sum_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_n y_m.$$

Prova

(A) Consequência imediata do teorema 4.

(B) Seja $\alpha = \sum\limits_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} x_n y_m$. Dado $\epsilon > 0$ existe F_ϵ finito, em $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, tal que $|\sum\limits_{F} x_n y_m - \alpha| < \epsilon$ para $F \supset F_\epsilon$. Logo, se $I_N \supset F_\epsilon$ e $k \geq N$ então $|\sum\limits_{I_k} x_n y_m - \alpha| < \epsilon$.

(C) Sejam (s_n) e (t_m) as sequências das somas parciais de $\sum\limits^{+\infty} x_n$ e $\sum\limits^{+\infty} y_m$. Então, $(*)$ $s_k t_k = (x_1 + ... + x_k)(y_1 + ... + y_k) = \sum\limits_{i,j=1}^{k} x_i y_j$. Definindo $I_k = \{(i,j) : 1 \leq i,j \leq k\}$ e tomando o limite em (*), por (B) segue a tese.

(D) Segue da propriedade similar para séries simples absolutamente convergentes.

(E) Segue da associatividade vista em (D). Em um caso temos $\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \bigcup\{n\}\times\mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$, e, no outro, $\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \bigcup \mathbb{N}\times\{m\}$, $m \in \mathbb{N}$.

(F) Segue da associatividade simples, para uma partição constituída por subconjuntos finitos. A família (J_k), $J_k = \{(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : i + j = k\}$ é partição de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ ∎

Obs: O produto de Cauchy surge na multiplicação de séries de potências.

APLICAÇÕES

A Função Exponencial Complexa,

$$exp(z) = \sum_{0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \ , z \in \mathbb{C} \ ,$$

é bem definida, sendo a série uniformemente absolutamente convergente sobre subconjuntos compactos do plano. Ainda mais,

$$(*) \quad exp(z + w) = exp(z)exp(w), \ \forall \ z, w \in \mathbb{C} \ .$$

Propriedades

(a) $\exp(z) \neq 0 \, , \forall \, z \in \mathbb{C}$, $\exp(0) = 1$, $\exp(z)^{-1} = \exp(-z)$.

(b) $\exp'(z) = \exp(z) \, , \forall z \in \mathbb{C}$ e, então, a função exp é infinitamente derivável em $\mathbb{C}$.

(c) A restrição de $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a $\mathbb{R}$ é a função exponencial, real, $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$. Notação: $\exp(z) = e^z \, , z \in \mathbb{C}$.

(d) $e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta \, , \forall \theta \in \mathbb{R}$, $\quad e^{i\frac{\pi}{2}} = i$,

$$cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} .... (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + ... \ ; \quad sen\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + ... + \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)} .... \ .$$

(e) A função $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é $2\pi i$ periódica.

(f) Para todo $w \in \mathbb{C}^*$ existe z (único módulo $T = 2\pi i$) tal que $e^z = w$.

Prova de (*), (b) e (d). As demais verificações são deixadas ao leitor.

(*) O produto de Cauchy das séries absolutamente convergentes $exp(z)$ e $exp(w)$ é,

$$e^z e^w \;=\; (\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!})(\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{w^m}{m!}) \;=\; \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{n+m=p} \frac{1}{n!\,m!} z^n w^m =$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p\,!} \sum_{n=0}^{n=p} \frac{p\,!}{n!\,(p-n)!} z^n w^{p-n} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p\,!} \sum_{n=0}^{n=p} \binom{p}{n} z^n w^{p-n} \;=\; \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^p}{p\,!} = e^{z+w} \;.$$

(b) Neste cálculo os números são complexos, incluindo h. Temos,

$$\frac{e^{z+h}-e^z}{h} = e^z \frac{e^h - 1}{h} = e^z \frac{1}{h} \left(\sum_0^{+\infty} \frac{h^n}{n!} - 1 \right) = e^z (1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + ...) \;.$$

Logo, se $|h| \le 1$, $|\varphi(h) = \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + ...| \;\le\; \frac{|h|}{2!} + \frac{|h|^2}{3!} + ...| \le |h|[\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...] \le e|h|$.
Portanto, $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$ e $\exp'(z) = \exp(z), \forall z \in \mathbb{C}$.

(d) As séries de Taylor das funções coseno e seno convergem e são as séries obtidas. ■