CÁLCULO II -
Bacharelado Química - Diurno
2^o SEMESTRE de 2008
Professor Oswaldo Rio Branco

REGRAS DA CADEIA

1. **Primeira** Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são deriváveis $\Rightarrow \exists\ (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$.
   Idéia: Dadas três quantidades A, B e C, se A depende de B e B depende de C, a taxa de variação de A em relação a B é $\frac{\Delta A}{\Delta B}$ e, a taxa de variação de B em relação a C é $\frac{\Delta B}{\Delta C}$.
   Logo, a taxa de variação de A em relação a C é,
   $$\frac{\Delta A}{\Delta C} = \frac{\Delta A}{\Delta B}\frac{\Delta B}{\Delta C}\ .$$
   Isto é, a taxa de variação de A em relação a C é o produto das duas outras dadas.

2. **Segunda** (Uma interpretação um pouco diferente daquela em aula) Consideremos a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, por $P_0 = (x_0, y_0)$ no instante t_0 e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
   A variação de $z = f(x, y)$, $\Delta z = \Delta f$, é aproximadamente a variação Δw, obtida ao passarmos de (x_0, y_0) ao ponto (x, y), na equação $w = w(x, y)$ do plano π, tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)$. Notando que $w_0 = w(x_0, y_0) = z_0$ temos,
   $$\pi\ : w = w_0 + a(x - x_0) + b(y - y_0), \quad z_0 = w_0 = f(x_0, y_0) \quad a = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\ ,\ b = \frac{\partial f}{\partial y}(P_0),$$
   isto é,
   $$(*) \qquad f(x, y) - f(x_0, y_0) = \Delta f = \Delta z \quad \approx \quad \Delta w = w - w_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)\,.$$
   Pondo $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ e $(f \circ \gamma)(t) = f(x(t), y(t))$ em (*) e dividindo por $t - t_0$:
   $$\frac{(f \circ \gamma)(t) - (f \circ \gamma)(t_0)}{t - t_0} \quad \approx \quad a\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} + b\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0},$$
   $$\frac{\Delta\,(f \circ \gamma)}{\Delta\,t} \quad \approx \quad a\frac{\Delta\,x}{\Delta\,t} + b\frac{\Delta\,y}{\Delta\,t}.$$
   Computando o limite, para $t \to t_0$, obtem-se as derivadas:
   $$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} \qquad ou, \qquad (f \circ \gamma)'(t_0) = ax'(t_0) + by'(t_0).$$
   Sendo implícito que estamos restringindo f a uma curva parametrizada por t,
   $$(**) \qquad \frac{\Delta\,f}{\Delta\,t} \quad \approx \quad a\frac{\Delta\,x}{\Delta\,t} + b\frac{\Delta\,y}{\Delta\,t}\ .$$
   Atenção: (**) propicia uma interpretação via taxas de variação :
   $$\frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\Delta z}{\Delta x}\frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta t}\ .$$
   Por último, a expressão mais utilizada,
   $$\frac{d}{dt}\Big\{f(x(t), y(t))\Big\} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}\ .$$