Curso: MAT 221- CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira
Período: Segundo Semestre de 2008

A FUNÇÃO EXPONENCIAL REAL

1. **A Função Logaritmo**, $ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, é dada por $ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$. Propriedades:
   (a) $ln(1) = \int_1^1 \frac{1}{t}\, dt = 0$.
   (b) Se $0 < x < 1$, $\int_1^x ln(t)\, dt = -\int_x^1 ln(t)\, dt < 0$ e, $ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.
   (c) Se $x_2 > x_1$, $ln(x_2) > ln(x_1)$.
   (d) Pelo teorema fundamental do cálculo ln é derivável e $ln'(x) = \frac{1}{x}$.
   (e) É infinitamente derivável e $\frac{d^m ln}{dx^m}(x) = \frac{(-1)^{m+1}(m-1)!}{x^m}$, $m \geq 1$.

2. **Proposição** Para x e y positivos tem-se $ln(xy) = ln(x) + ln(y)$.
   Prova: Temos,
   $$ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^x \frac{dt}{t} + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} = ln(x) + \int_x^{xy} \frac{dt}{t} \ .$$
   Na última integral, a mudança de variável, de t para s, $t = sx$, $1 \leq s \leq y$, $dt = xds$, acarreta
   $$\int_x^{xy} \frac{dt}{t} = \int_1^y \frac{xds}{sx} = ln(y) \quad \blacksquare$$

3. **Corolário 1** Seja $x > 0$. Para $r \in \mathbb{Q}$ tem-se $ln(x^r) = r ln(x)$.
   Prova: Pelo proposição o resultado é óbvio se $r \in \mathbb{N}$ e, neste caso, $x^n x^{-n} = 1$ e então, $0 = ln(1) = ln(x^n x^{-n}) = ln(x^n) + ln(x^{-n})$ e portanto, $ln(x^{-n}) = -ln(x^n) = -n\, ln(x)$. Se $r = \frac{p}{q}$, p, $q \in \mathbb{Z}^*$, temos $p\, ln\, x = ln\, x^p = ln\, (x^{\frac{p}{q}})^q = q\, ln\, x^{\frac{p}{q}}$. Finalmente, $ln\, x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} ln\,(x)$ $\blacksquare$

4. **Corolário 2** A função $ln : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ é inversível e a inversa é contínua.
   Prova Sobre a imagem $ln(\ .\ )$ é sobrejetora e, por 1(c), injetora. A imagem de um intervalo por uma função contínua é um intervalo e assim $ln\,(0, \infty)$, o qual não é, por 1(c), da forma $[a, b]$, $[a, b)$ ou $(a, b]$ e sim, (a, b).
   É trivial que $(a, b) = (-\infty, +\infty)$ pois, se $n \in \mathbb{N}$, temos $\lim\limits_{n\to+\infty} ln\, 2^n = \lim\limits_{n\to+\infty} n\, ln\, 2 = +\infty$. Analogamente, $\lim\limits_{n\to+\infty} ln\, 2^{-n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -n\, ln\, 2 = -\infty$ e assim, $\lim\limits_{x\to 0^+} ln\, x = -\infty$.
   Afirmação: $ln^{-1} : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ é contínua. Pois, dado $y_0 \in \mathbb{R}$ e $J = [a, b] \subset (0, \infty)$, $ln^{-1}(y_o) \in (a, b)$, temos que $y_0 \in I = (ln\, a, \ln\, b)$ e $ln^{-1}(I) \subset (a, b)$ $\blacksquare$

5. **Definição** Denotamos por e o único número real tal que $ln\, e = 1$

6. **Definição** A função exponencial $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ é a inversa da função logaritmo.

7. **Teorema** A função exponencial (real) é uma bijeção crescente de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$ satisfazendo,

   (a) É infinitamente diferenciável e $\exp'(x) = \exp(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$.

   (b) $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

   (c) Se $r \in \mathbb{Q}$ então, $\exp(r) = e^r$.

   Prova:

   (a) Pelo teorema da função inversa exp é derivável e, pela regra da cadeia,
   $$1 = \frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(ln \circ \exp)(x) = ln'[\exp(x)]\exp'(x) = \frac{1}{\exp(x)}\exp'(x).$$

   (b) Temos, $ln[\exp(x+y)] = x+y$ e $ln[\exp(x)\exp(y)] = ln[\exp(x)] + ln[\exp(y)] = x+y$.

   (c) Pelo corolário 1 e definição de e tem-se $ln\, e^r = rln(e) = r$ e, é óbvio, $ln \exp(r) = r$ ∎

8. **Notação** $\exp(x) = e^x, \forall x \in \mathbb{R}$.

9. **Definição** Para $a \in \mathbb{R}, a > 0$, e $x \in \mathbb{R}$, pomos $a^x = e^{xln\, a}$.

10. **Teorema** As definições de e em 5, por sequência e série coincidem e $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.
    Prova Sendo $x > 1$, $\exists!\, n \in \mathbb{N}^*$ tal que $n \le x < n+1$. Logo, $1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \le 1 + \frac{1}{n}$ e,
    $$n\,ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) < x\,ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \le (n+1)\,ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
    Pela definição acima e calculando a exponencial, que é crescente, dos três termos, obtemos
    $$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \le \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$
    Como
    $$\lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \to +\infty}\frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = e$$
    e,
    $$\lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \to +\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\left(1 + \frac{1}{n}\right) = e,$$
    pelo teorema do confronto segue a tese ∎

11. **Lema** $\lim\limits_{n \to +\infty}\frac{R^n}{n!} = 0$, $\forall R \in \mathbb{R}$.
    Prova: Seja $N > 2|R|$ e $n > N$. Então, $\frac{R^n}{n!} = \frac{R^N}{N!}\frac{R^{n-N}}{(N+1)(N+2)....(N+(n-N))} \le \frac{R^N}{N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}$ ∎

12. **Teorema** $e^x = 1 + 1 + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$, $\forall x \in \mathbb{R}$, com convergência uniforme sobre compactos.
    Prova: Pela fórmula de Taylor para $f = \exp$, $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, existe $\bar{x}$ entre 0 e x tal que
    $$e^x = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}x^{n+1} \quad , \forall n \in \mathbb{N}.$$
    Se $x \in [-R, R]$, temos $\bar{x} \in [-R, R]$, com $f^{(j)}(x) = e^x$, $f^{(j)}(0) = 1$, $f^{(n+1)}(\bar{x}) = e^{\bar{x}}$ e
    $$\left|\frac{f^{(n+1)}(\bar{x})}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le e^{\bar{x}}\frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \le e^R\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}.$$
    Para $S_n(x) = 1 + 1 + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$ temos $|e^x - S_n(x)| \le e^R\frac{R^{n+1}}{(n+1)!}, \forall |x| \le R$, e $S_n(x)$ converge uniformemente a $\exp(x)$ sobre $[-R, R]$ para n tendendo ao infinito ∎