APOIO 2 - CÁLCULO I -
Licenciatura Física - Diurno
1º SEMESTRE de 2008
Professor Oswaldo Rio Branco

1 - **Regra da Cadeia** (idéia da demonstração)

Supondo $z = f(y)$ e $y = g(x)$ funções diferenciáveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, determinemos a derivada da função composta $z = (f \circ g)(x)$. Interpretando derivadas como limite de taxas de variação temos

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x} \ ,$$

sendo que se Δx tende a zero então $\Delta y = g(x + \Delta x) - g(x)$ também tende a zero (pois g é contínua, já que derivável) e assim,

$$\begin{cases} \frac{\Delta z}{\Delta x} \approx (f \circ g)' \\ \frac{\Delta z}{\Delta y} \approx f' \\ \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx g' \ . \end{cases}$$

Isto é, a taxa de variação da composta é o produto das taxas de variação e, analogamente, a derivada da composta é o produto das derivadas.

Identifiquemos os pontos em que calculamos as derivadas. Sendo $x = p$ e $y = g(p)$ temos,

$$(f \circ g)'(p) \approx \frac{\Delta z}{\Delta x}(p) = \frac{(f \circ g)(p + \Delta x) - (f \circ g)(p)}{\Delta x} = \frac{f(g(p + \Delta x)) - f(g(p))}{g(p + \Delta x) - g(p)} \, \frac{g(p + \Delta x) - g(p)}{\Delta x} \ ,$$

$$\frac{g(p + \Delta x) - g(p)}{\Delta x} \ \approx g'(p)$$

e

$$\frac{f(g(p + \Delta x)) - f(g(p))}{g(p + \Delta x) - g(p)} \approx f'(g(p)) \ ;$$

sendo que esta última aproximação segue de $\frac{f(y) - f(g(p))}{y - g(p)} \approx f'(g(p))$ se $y \approx g(p)$, o que efetivamente ocorre pois como já vimos, $y = g(p + \Delta x)$ tende a $g(p)$ quando $\Delta x \to 0$.

Passando ao limite (para $\Delta x \to 0$) as aproximações acima, concluímos a identidade:

$$(f \circ g)'(p) = f'(g(p))g'(p) \ .$$

Atenção O cômputo é válido desde que $\Delta y = g(p + \Delta x) - g(p) \neq 0$, o que é verdade (para valores pequenos, não nulos, de $|\Delta x|$) se admitirmos $g'(p) \neq 0$. Temos então a regra da cadeia provada nos pontos em que g' é não nula. A demonstração completa é um pouco mais elaborada (vide livro texto).

2 - **Fórmula de Hieron**
Dado o triângulo $\triangle ABC$ com $|AB| = c$, $|AC| = b$ e $|BC| = a$, a área deste é dada por,

$$\Sigma = \Sigma(\triangle ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ ,$$

onde s é o semi-perímetro: $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Demonstração : Sendo h a altura relativa ao lado AC e $\theta = \angle ABC$ o ângulo em B temos (faça uma figura),

$$(1) \qquad \Sigma = \frac{|BC|h}{2} = \frac{a \times csen\theta}{2}.$$

Aplicando a lei dos cossenos temos,

$$(2) \qquad b^2 = a^2 + c^2 - 2accos\theta\ .$$

Elevando (1) ao quadrado obtemos

$$4\Sigma^2 = a^2c^2sen^2\theta\ ,$$

e de (2) temos,

$$4a^2c^2cos^2\theta = (2accos\theta)^2 = (a^2 + c^2 - b^2)^2\ .$$

Combinando estas duas últimas equações chegamos às identidades :
$16\Sigma^2 = 4a^2c^2sen^2\theta = 4a^2c^2(1 - cos^2\theta) = 4a^2c^2 - 4a^2c^2cos^2\theta =$
$= 4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 =$
$= 4a^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 + 2a^2c^2 - 2b^2c^2) =$
$= 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4\ ;$
ainda mais, não é difícil perceber que devido as simetrias das identidades acima (ou por verificação direta) temos,
$4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 = 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$.

Por outro lado, temos que
$16s(s-a)(s-b)(s-c) = (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) =$
$= [(a+b+c)(b+c-a)]\ [(a+c-b)(a+b-c)] =$
$= (ab + ac - a^2 + b^2 + bc - ba + cb + c^2 - ca)\ (a^2 + ab - ac + ca + cb - c^2 - ba - b^2 + bc) =$
$= (2bc - a^2 + b^2 + c^2)\ (a^2 - b^2 - c^2 + 2bc) =$
$= [2bc + (b^2 + c^2 - a^2)]\ [2bc - (b^2 + c^2 - a^2)] =$
$= 4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2$.

Assim, concluímos que $16\Sigma^2 = 16s(s-a)(s-b)(s-c)$, donde segue a tese $\blacksquare$

3 - **Elementos para esboço de gráficos e determinação de máximos e mínimos**

I - Se $f : I = (a,b) \to \mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável e $J = (c,d) \subset (a,b)$, então temos,
(i) se $f' > 0$ sobre J então f é estritamente crescente sobre J,
(ii) se $f' < 0$ sobre J então f é estritamente decrescente sobre J,
(iii) se $f'' > 0$ sobre J então f tem concavidade voltada para cima sobre J,
(iv) se $f'' < 0$ sobre $J = (c,d)$ então f tem concavidade voltada para baixo sobre J.

Prova de (i) e (ii) :
se $f' > 0$ sobre J então, se $x, y \in J$, $x < y$, pelo TVM temos que $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x) > 0$, para algum c entre x e y, e portanto, $f(y) > f(x)$. Analogamente se $f' < 0$ sobre J.
Interpretação de (iii) e (iv) :
Suponhamos que a variável é temporal. Se $f'' > 0$ sobre J, as retas tangentes à curva descrita por uma partícula que se move ao longo do gráfico de f, restrita a J, são tais que suas inclinações (coef. angulares) aumentam com o decorrer do tempo. Logo, a concavidade é voltada para cima. A interpretação é análoga se $f'' < 0$.

II - (i) Se um ponto é de máximo ou mínimo então a derivada no ponto é nula.
(ii) Um ponto de inflexão é definido como um ponto onde muda a concavidade. Assim, em um ponto de inflexão a derivada segunda é nula.
Prova de (i): supondo $f'(p) > 0$, f' contínua, temos $f' > 0$ em um pequeno sub-intervalo J contendo p e, f crescente em J. Absurdo! pois p é de máximo ou mínimo. Analogamente, $f'(p) < 0$ é também falso. Concluímos que $f'(p) = 0$.
Prova de (ii): supondo f'' contínua, a concavidade 'antes' do ponto p voltada para baixo e 'após' voltada para baixo, temos $f'' \leq 0$ antes de p e $f'' \geq 0$ depois de p ; segue que $f''(p) = 0$.

III - Seja $f : I = [a,b] \to \mathbb{R}$, derivável em (a,b) e contínua em $[a,b]$. Seja p um ponto de máximo ou de mínimo de f. Então, ou p é um dos extremos do intervalo I ou $f'(p) = 0$.

IV - Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a reta $r : y = mx + n$ é dita uma assíntota para f, em $+\infty$, se $lim[f(x) - (mx+n)] = 0$, quando $x \to +\infty$. Analogamente para assíntotas em $-\infty$ e mesmo em um ponto $p \in \mathbb{R}$, f não derivável em p ; podendo p pertencer ou não ao domínio de f.

4 - **Regras de L'Hospital** Uma indeterminação ocorre quando no cômputo do limite de um quociente encontramos uma expressão do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. O caso trivial abaixo é ilustrativo. Sejam f e g deriváveis em p, tais que $f(p) = g(p) = 0$ e $g'(p) \neq 0$. Então,

$$lim_{x\to p}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(p)}{g'(p)} \ .$$

Prova: temos que $lim\frac{f(x)}{g(x)} = lim\frac{f(x)-f(p)}{g(x)-g(p)} = lim\frac{\frac{f(x)-f(p)}{(x-p)}}{\frac{g(x)-g(p)}{x-p}} = \frac{lim\frac{f(x)-f(p)}{(x-p)}}{lim\frac{g(x)-g(p)}{x-p}} = \frac{f'(p)}{g'(p)}$ ■

Segundo Limite Fundamental

No livro está provado que o limite da sequência $\left((1+\frac{1}{n})^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, quando $n \to +\infty$, é um número real, denominado número de Euler. Devido a este resultado admitimos como intuitivo, por ora, que

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e \ ;$$

isto é, o limite é ainda e quando a variável é contínua.

Em sala mostrei então que, admitido o limite acima, temos $lim_{u\to 0^+}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$.

Mostremos aqui que $lim_{u\to 0^-}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$.
Temos, sendo $u = -v$ e $v = \frac{1}{x}$,

$$\lim_{u\to 0^-}(1+u)^{\frac{1}{u}} = \lim_{v\to 0^+}(1-v)^{-\frac{1}{v}} = \lim_{v\to 0^+}\frac{1}{(1-v)^{\frac{1}{v}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(1-\frac{1}{x})^x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(\frac{x-1}{x})^x} \ ,$$

mudando agora a variável para $y = x-1$, temos

$$\lim_{u\to 0^-}(1+u)^{\frac{1}{u}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{(\frac{y}{y+1})^{y+1}} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y+1}{y}\right)^{y+1} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\left(1+\frac{1}{y}\right) \ ,$$

e assim,

$$\lim_{u\to 0^-}(1+u)^{\frac{1}{u}} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right) = e\times 1 = e \ .$$

Completamos então a prova de

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e \ ,$$

que havia sido utilizada na demonstração do segundo limite fundamental ■

Seção 7.13 - Derivação de Função dada Implicitamente (pp 191 - 192).

6 - Assumindo $y = y(x)$ e derivando a equação da elipse em relação a x temos,

$$\frac{d}{dx}\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\} = \frac{2x}{a^2} \ + \ \frac{2y(x)y'(x)}{b^2} = 0 \ .$$

Logo, $y'(x_o) = -\frac{b^2 x_o}{a^2 y_o}$ e $T : y - y_o = -\frac{b^2 x_o}{a^2 y_o}(x - x_o)$, donde obtemos $a^2 y_o y + b^2 x_o x = b^2 x_o + a^2 y_o = a^2 b^2$, que simplificando resulta :

$$T: \ \frac{y_o}{b^2} y + \frac{x_o}{a^2} x = 1 \quad \blacksquare$$

7 - **Observação Extra** Fazendo a mudança de variáveis: $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(u - v)$ e $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(u + v)$, encontramos a equação $\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} = 1$ que é uma equação em forma padrão de uma hipérbole. Notemos que se P satisfaz a a equação $|PF_1| = \sqrt{2}|PD_1|$, onde $|PF_1|$ é a distância de $P = (x, y)$ a $F_1 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ e $|PD_1|$ é a distância de P à reta $D_1 : y = -x - \sqrt{2}$ então P satisfaz a equação $xy = 1$. F_1 é denominado foco e D_1 reta diretriz.
Analogamente, temos que $|PF_2| = \sqrt{2}|PD_2|$, para o foco $F_2 = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e a reta diretriz $D_2 : y = -x + \sqrt{2}$. A diferença das distâncias de P aos focos é uma constante: $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2\sqrt{2}$. Temos ainda os seguintes elementos da hipérbole: $V_1 = (-1, -1)$ e $V_2 = (1, 1)$ são os vértices, $\sqrt{2}$ é a excentricidade e as assíntotas são as retas $x = 0$ e $y = 0$.

Denotando $y = y(x) = \frac{1}{x}$ e derivando a equação da hipérbole em relação a x temos,

$$\frac{d}{dx}\{xy\} = y(x) \ + \ xy'(x) = \frac{1}{x} \ + \ xy'(x) = 0 \ .$$

Logo, $y'(x_o) = -\frac{1}{x_o^2}$ e $T : y - \frac{1}{x_o} = -\frac{1}{x_o^2}(x - x_o)$; a qual multiplicando por x_o resulta $x_o y - 1 = -\frac{1}{x_o}(x - x_o) = -y_o(x - x_o) = -y_o x + y_o x_o = -y_o x + 1$.
Isto é,

$$x_o y + y_o x = 2 \quad \blacksquare$$

8 - Como $y = f(x)$, temos que $\frac{d}{dx}\{y^3 + 2xy^2 + x\} = \frac{d}{dx}\{4\} = 0$ e então,

$$3y^2(x)y'(x) + 2y^2(x) + 4xy(x)y'(x) + 1 = 0 \ .$$

Da equação dada temos : $y^3(1) + 2y^2(1) + 1 = 4$. Notando que $y = 1$ é raíz do polinômio $p(y) = y^3 + 2y^2 - 3$ e dividindo este por $y - 1$ obtemos
$p(y) = (y-1)(y^2+3y+3) = (y-1)[(y+\frac{3}{2})^2+\frac{3}{4}]$ e assim, 1 é a única raíz de p. Consequentemente temos $y(1) = 1$ e

$$3y'(1) + 2 + 4y'(1) \ + 1 = \ 0 \ .$$

Logo, $y'(1) = -\frac{3}{7}$ e a equação da reta pedida é $T : y - 1 = -\frac{3}{7}(x - 1)$ $\blacksquare$

9 - Supondo $y = y(x)$ e derivando temos $0 = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y(x)^{-\frac{1}{3}}y'(x)$ ou,

$$x^{-\frac{1}{3}} + y(x)^{-\frac{1}{3}}y'(x) = 0 \ ,$$

portanto, no ponto (x_o, y_o) temos

$$y_o = (1 - x_o^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \qquad y'(x_o) = -\frac{x_o^{-\frac{1}{3}}}{y_o^{-\frac{1}{3}}} = -\frac{\sqrt{1 - x_o^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{x_o}} \ .$$

A reta tangente no ponto $P_o = (x_o, y_o)$ é dada por

$$T \ : \ y - (1 - x_o^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{1 - x_o^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{x_o}}(x - x_o) \ ,$$

cujas intersecções com os eixos são

$$A = (0, (1 - x_o^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}) \quad , \quad B = (\sqrt[3]{x_o}, 0) \ .$$

Finalmente, a distância de A a B é $|AB| = \sqrt{(1 - x_o^{\frac{2}{3}}) + x_o^{\frac{2}{3}}} \ = \ 1 \quad \blacksquare$

Seção 7.15 - Velocidade, Aceleração e Taxa de Variação (pp 201- 203)

5 - A velocidade (coeficiente angular da reta tangente) diminui com o passar do tempo. Logo, a aceleração, $f''(t)$, é negativa.

11 - Temos $y(t) = 3x^2(t) - 2x(t)$ e assim, derivando esta equação em relação a t, $y'(t) = 6x(t)x'(t) - 2x'(t)$. Se $y'(t_o) = 3x'(t_o)$ então $3x'(t_o) = 6x(t_o)x'(t_o) - 2x'(t_o)$ e portanto, dividindo por $x'(t_o)$, temos $3 = 6x(t_o) - 2$, o que implica $x(t_o) = \frac{5}{6}$.

16 - Consideremos o sistema de coordenadas cartesianas xy tal que Oy corresponde à parede de sustentação da escada, a origem O sendo o pé da parede, Oy apontado para cima e Ox paralelo ao chão, apontado na direção do movimento da escada. Seja $x(t)$ a distância do pé da escada da parede e $y(t)$ a altura da escada. Consideremos que $x(0) = 0$ e $y(0) = 8$ temos então que,
$(*)\quad x^2(t) + y^2(t) = 8^2 = 64$; $x'(t) = 2, \forall t$; $x(\frac{3}{2}) = 3$,
assim, de $x^2(\frac{3}{2}) + y^2(\frac{3}{2}) = 64$ concluímos que $y(\frac{3}{2}) = \sqrt{55}$ e,
derivando $(*)$, temos $2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) = 0$ e portanto
$3 \times 2 + y(\frac{3}{2})y'(\frac{3}{2}) = 0$,
logo,$6 + \sqrt{55}y'(\frac{3}{2}) = 0$ e, finalmente, $y'(\frac{3}{2}) = -\frac{6}{\sqrt{55}}$.

17 - Pela lei dos cossenos temos : $(*)\quad 5^2 = 3^2 + x^2 - 2 \times 3 \times x \times cos\theta = 9 + x^2 - 6xcos\theta$;
sendo x uma função de θ e este uma função do tempo t.
Temos então $x = x(\theta(t))$ e ainda, pelos dados fornecidos, $x(\frac{\pi}{2}) = 4$ e $\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}, \forall t$.

Escrevendo $(*)$ como $x^2(\theta(t)) - 6x(\theta(t))cos\theta(t) = 16$ e derivando-a, com $x' = \frac{dx}{d\theta}$, obtemos,

$$2x(\theta(t))x'(\theta(t))\frac{d\theta}{dt} \ - \ 6x'(\theta(t))\frac{d\theta}{dt}cos(\theta(t)) \ + \ 6x(\theta(t))sen\theta(t)\frac{d\theta}{dt} = 0 \ .$$

Sendo t_o o instante em que $\theta(t_o) = \frac{\pi}{2}$ temos que

$$2x(\frac{\pi}{2})x'(\frac{\pi}{2})\frac{1}{2} \ - \ 6x'(\frac{\pi}{2})\frac{1}{2}cos\frac{\pi}{2} \ + \ 6x(\frac{\pi}{2})\frac{1}{2}sen\frac{\pi}{2} = 0 \ ,$$

e portanto, fazendo as substituições necessárias,

$$4x'(\frac{\pi}{2}) + 12 = 0 \ .$$

Consequentemente temos $x'(\frac{\pi}{2}) = \frac{dx}{d\theta}(\frac{\pi}{2}) = -3$ e portanto,

$$\frac{dx}{dt}(t_o) = \frac{dx}{d\theta}(\frac{\pi}{2})\frac{d\theta}{dt} = -\frac{3}{2} \quad \blacksquare$$

18 - O volume de líquido dentro do cone 'invertido' e até a altura h relativa ao vértice do cone é $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$. Sendo r o raio da circunferência formada pela intersecção do cone com o plano paralelo ao seu topo e à distância h do vértice temos, por semelhança de triângulos,

$$\frac{r}{h} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \ .$$

Assim, $r = \frac{2h}{3}$ e sendo a altura uma função do tempo temos $r(t) = \frac{2h(t)}{3}$ e

$$V(t) = \frac{4\pi h^3(t)}{27} \ .$$

É dado que $V'(t) = \frac{1}{10}$ e portanto, derivando a expressão encontrada para V obtemos a equação

$$\frac{4\pi \times 3h^2(t)h'(t)}{27} = \frac{1}{10} \ ,$$

e assim, no instante t_o tal que $h(t_o) = 5$ temos

$$\frac{4\pi \times 5^2 \times h'(t_o)}{9} = \frac{1}{10} \ ,$$

logo,

$$h'(t_o) = \frac{9}{\pi} 10^{-3} \quad \blacksquare$$

19 - Sendo P fixo, para o cômputo das velocidades pedidas (velocidade de P) podemos supô-lo, no instante inicial, na origem do sistema e o eixo Ox orientado no sentido do movimento . Após a roda, cujo raio é 1, girar θ rad, as coordenadas de seu centro são dadas por $(\theta, 1)$ e as coordenadas (x, y) de P por

$$\theta - x = sen\theta, \quad y = 1 - cos\theta \ .$$

Introduzindo a variável tempo temos $x(t) = \theta(t) - sen\theta(t)$ e $y(t) = 1 - cos\theta(t)$.
Derivando e utilizando que $\theta'(t) = 1$ obtemos :
$x' = \theta'(t) - cos\theta(t)\theta'(t) = 1 - cos\theta$ e $y'(t) = sen\theta(t)\theta'(t) = sen\theta$ $\blacksquare$

21 - Pela figura temos $P = (x(t), 0)$, $Q(t) = (0, y(t))$, $R(t) = (0, h)$, $|PR| = \sqrt{x(t)^2 + h^2}$ e $|QR| = |h - y(t)|$. Suponhamos $y(t) < h$. Por hipotese $|PR| + |QR| = e$ e então,

$$\sqrt{x(t)^2 + h^2} + (h - y(t)) = e \ .$$

Logo,

$$\left(\sqrt{x(t)^2 + h^2}\right)^2 = \big[y(t) + (e - h)\big]^2$$

e portanto, $x(t)^2 + h^2 = y(t)^2 + 2(e - h)y(t) + (e - h)^2$; que derivando resulta $2x(t)x'(t) = 2y(t)y'(t) + 2(e - h)y'(t)$; donde,

$$xx' = [y + (e - h)]y' = \sqrt{x^2 + h^2}y' \ .$$

A expressão pedida é $(*)$ $xx' = \sqrt{x^2 + h^2}y'$, onde x' e y' são as velocidades.

Extra Continuemos o exercício anterior. Sendo óbvio que y é uma função de x, determinemo-la utilizando a notação de Leibnitz. Reescrevendo $(*)$ como

$$x\frac{dx}{dt} = \sqrt{x^2+h^2}\frac{dy}{dt} \ ,$$

temos $\frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$. Pela regra da cadeia e consequente fórmula para a derivada da função inversa sabemos que $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$. Assim, temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2+h^2}} = x(x^2+h^2)^{-\frac{1}{2}} \ .$$

A determinação de uma função $y = y(x)$ tal que $(**) \quad y'(x) = x(x^2+h^2)^{-\frac{1}{2}}$ pode ser feita diretamente pois $y(x) = (x^2+h^2)^{\frac{1}{2}}$ é uma tal função (verifique) e a solução geral de $(**)$ é :

$$y(x) = (x^2+h^2)^{\frac{1}{2}} + C \ , C \in \mathbb{R}, \quad .$$

Uma possível interpretação do problema é o de uma corda de comprimento e, com extremidades P e Q, passando por uma polia em R a altura h do solo, sendo a corda movida ao longo do solo (eixo x) para movimentar um objeto preso à extremidade Q.
Com tal interpretação temos as condições de existência :
(i) quando o peso está no solo, $P = (0,0)$ temos $x = \sqrt{(e-h)^2-h^2}$, e
(ii) quando o peso está na posição R temos $x = \sqrt{e^2-h^2}$.
O domínio de $y = y(x)$ é dado por $\sqrt{(e-h)^2-h^2} \leq x \leq \sqrt{e^2-h^2}$ e portanto, para esta interpretação, devemos ter $e-h \geq h$, isto é, $e \geq 2h$.
Determinação da constante C: por (ii) devemos ter $y(\sqrt{e^2-h^2}) = h$, logo,
$h = y(x) = ((e^2-h^2)+h^2)^{\frac{1}{2}} + C = e + C$ e assim, $h = e + C$ e

$$y(x) = \sqrt{x^2+h^2} + (h-e) \ .$$

Observe que se $x = \sqrt{(e-h)^2-h^2}$ então $y(x) = 0$.
Abandonando a interpretação física, estendemos a solução apresentada a uma geométrica:

$$y(x) = \sqrt{x^2+h^2} \ + \ (h-e) \ , \ \forall x \in I = \big[-\sqrt{e^2-h^2}, +\sqrt{e^2-h^2} \ \big] \ .$$

Determinação das funções x **e** y: devido à expressão $y = y(x)$ utilizamos $x(\theta) = htg\theta$ para $x = x(\theta)$. Substituindo esta na fórmula para y encontramos
$y(\theta) = \sqrt{h^2tg^2(\theta)+h^2} + (h-e) = \sqrt{h^2(1+tg^2\theta)} + (h-e) = h[|sec\theta| + (h-e)]$.
Portanto temos, notando que $\frac{d}{d\theta}\{|sec\theta|\} = |sec\theta|tg\theta$,

$$\frac{dx}{d\theta} = hsec^2\theta \quad , \quad \frac{dy}{d\theta} = h|sec\theta|tg\theta \ .$$

Tais funções satisfazem a equação acima encontrada: $x\frac{dx}{d\theta} = \sqrt{x^2+h^2}\frac{dy}{d\theta}$; pois,
$x\frac{dx}{d\theta} = h^2tg\theta sec^2\theta$ e $\sqrt{x^2+h^2}\frac{dy}{d\theta} = (\sqrt{h^2tg^2\theta+h^2})h|sec\theta|tg\theta = h^2tg\theta sec^2\theta$.
Finalize explicitando o domínio comum de $x = x(\theta)$ e $y = y(\theta)$ ■

Seção 7.17 - Exercícios do Capítulo (variados) - pp 208-214

17 - Para T_1 e T_2, retas tangentes aos gráficos de $y_1(x) = ax^2$ e $y_2(x) = -x^2 + 1$, respectivamente, se interceptarem ortogonalmente em $P = (p, q)$ é necessário que
(i) $q = y_1(p) = y_2(p)$, isto é, $ap^2 = -p^2 + 1$, e
(ii) $m_{T_1} m_{T_2} = -1$, onde m_{T_i} é o coeficiente angular de T_i.
Da condição (ii) temos $2ap \times (-2p) = -1$ e portanto $4ap^2 = 1$. Substituindo em (i) temos $\frac{1}{4} = -p^2 + 1$ e então : $p^2 = \frac{3}{4}$ e $a = \frac{1}{3}$ ■