GABARITO P1 - CÁLCULO I

Licenciatura Física - Diurno

1º SEMESTRE de 2008

Professor Oswaldo Rio Branco

1 - Calcule os limites abaixo:

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2+4x+3}$.

(b) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{2}}{x-2}$.

Resolução:

(a) Temos, $x^3+1 = x^3-(-1)^3 = (x+1)(x^2-x+1)$ e $x^2+4x+3 = (x+1)(x+3)$. Logo, $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2-x+1}{x+3} = \frac{3}{2}$.

(b) Temos, $x-2 = (\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2}) = (\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})$. Simplificando chegamos a $\lim\limits_{x\to 2} \frac{1}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt[4]{2}}{8}$.

(2) Determine L para que a função abaixo seja contínua no ponto p específicado.

(a) $f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{\sqrt{x+5}-\sqrt{10}}$, $x \neq 5$; L se $x = p = 5$.

(b) $f(x) = \frac{x^3-1}{x^4+3x-4}$, $x \neq 1$; L se $x = p = 1$.

Resolução:

(a) Multiplicando numerado e denominador pelo conjugado do denominador temos, $\lim\limits_{x\to 5} \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x+5}+\sqrt{10})}{x-5} = \lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x+5}+\sqrt{10}}{\sqrt{x}+\sqrt{5}} = \sqrt{2}$.

(b) Fatorando obtemos, $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+4} = \frac{3}{7}$.

(3) Calcule as derivadas das funções abaixo:

(a) $f(x) = x^2\, cosx\, (1+lnx)$.

(b) $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$, $x \neq 0$.

(c) $f(x) = \frac{x^3}{x+\sqrt{x}}$, $x \neq 0$.

(d) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$, $x \neq -1$.

Resolução:

(a) $f'(x) = 2x\cos x\,(1+lnx) - x^2 senx\,(1+lnx) + x\, \cos x$.

(b) $f'(x) = \frac{e^x(1-e^x)\ +\ e^x(1+e^x)}{(1-e^x)^2} = \frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$.

(c) $f'(x) = \frac{3x^2(x+\sqrt{x})-x^3(1+\frac{1}{2\sqrt{x}})}{(x+\sqrt{x})^2} = \frac{x^2\sqrt{x}}{2}\,\frac{4\sqrt{x}+5}{(x+\sqrt{x})^2}$.

(d) $f'(x) = \frac{1}{3}(\frac{x-1}{x+1})^{-\frac{2}{3}}\frac{2}{(x+1)^2}$.

(4) **ATENÇÃO** Determine os intervalos de crescimento e decrescimento e esboce o gráfico (calcule os limites necessários) de $f(x) = \frac{x^2-x+1}{2(x-1)}$, $x \neq 1$.

Resolução:

O limite do numerador, $x \to 1$, é 1; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$. A reta vertical $x = 1$ (esbocem) é uma assíntota ao gráfico de f.

Pondo x^2 e $2x$ em evidência no numerador e denominador: $f(x) = \frac{x}{2}\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$ e torna-se claro que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Notemos, $f(x) = \frac{x(x-1)+1}{2(x-1)} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1}$. Assim, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x) - \frac{x}{2}] = 0$; logo, o gráfico de f aproxima-se (em $\pm\infty$) da reta $y = \frac{x}{2}$ que é dita uma **assíntota oblíqua** (esbocem-na).

Para $x > 1$, $f(x) > \frac{x}{2}$; gráfico de f acima da reta $y = \frac{x}{2}$ e, inversamente, para $x < 1$.

Sinal da derivada: $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}[1 - \frac{1}{(x-1)^2}]$; logo, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow |x-1| > 1$.

Então, $f' > 0$ em $(-\infty, 0)$, $f' < 0$ em $(0, 1)$, $f' < 0$ em $(1, 2)$ e $f' > 0$ em $(2, +\infty)$.

Esbocem em $(1, 2] \cup [2, +\infty)$: 2 é ponto de mínimo, $f(2) = \frac{3}{2}$; assíntota vertical em $x = 1$; $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$; o gráfico de f acima da reta $y = \frac{x}{2}$ e, em $+\infty$, proximo à reta .

Esbocem em $(-\infty, 0] \cup [0, 1)$: 0 é ponto de máximo, $f(0) = -\frac{1}{2}$; assíntota vertical em $x = 1$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$; o gráfico de f abaixo da reta $y = \frac{x}{2}$ e, em $-\infty$, próximo à reta.

(5) Dadas $y = ax^2$ e $y = -x^2 + 1$. Determine a tal que os gráficos se interceptem ortogonalmente (retas tangentes em $P_o = (x_o, y_o)$ perpendiculares).

Resolução:

Para T_1 e T_2, retas tangentes aos gráficos de $y_1(x) = ax^2$ e $y_2(x) = -x^2 + 1$, respectivamente, se interceptarem ortogonalmente em $P = (p, q)$ é necessário:

(i) $q = y_1(p) = y_2(p)$; i.e, $ap^2 = -p^2 + 1$, e

(ii) $m_{T_1} m_{T_2} = -1$, onde m_{T_i} é o coeficiente angular de T_i.

Por (ii), $2ap\,(-2p) = -1$ e, $4ap^2 = 1$. Pondo em (i): $\frac{1}{4} = -p^2 + 1$, $p^2 = \frac{3}{4}$ e $a = \frac{1}{3}$.