GABARITO I - CÁLCULO - FAU

SEMESTRE 1 de 2008

Professor Oswaldo Rio Branco

1. Dados os vetores $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ e $\vec{c} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$,

   (a) Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{a}, \vec{b}$ e $\vec{c}$.

   (b) Calcule a área do paralelogramos determinado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

   Resolução.

   (a) Sendo V o volume procurado temos,

$$V = | \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} | = | -19 | = 19$$

   (b) A área é: $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$. Sendo,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} | = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 5\vec{k} = - < 2, 2, 5 >,$$

   temos $A = | < 2, 2, 5 > | = \sqrt{4 + 4 + 25} = \sqrt{33}$.

2. Determine a equação do plano π_1 que é perpendicular ao plano $\pi_2 : x + y - z = 1$, e que passa pela reta obtida pela intersecção dos planos $\pi_3 : y - z = 1$ e $\pi_4 : x + 2z = -1$.

   Resolução.

   Sendo $r = \pi_3 \cap \pi_4$ a reta intersecção um vetor diretor, $\vec{v_r}$, é dado por:

$$\vec{v_r} = \vec{n_{\pi_3}} \times \vec{n_{\pi_4}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k} =< 2, -1, -1 > .$$

   Para determinar um ponto P em r, supomos $z = 0$ nas equações de π_3 e π_4: $P = (-1, 1, 0)$. O vetor $\vec{n_{\pi_1}}$, normal ao plano π_1, é ortogonal a $\vec{n_{\pi_2}}$ ($\pi_1 \perp \pi_2$) e a $\vec{v_r}$ ($r \subset \pi_1$). Logo,

$$\vec{n_{\pi_1}} = \vec{n_{\pi_2}} \times \vec{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - \vec{j} - 3\vec{k} = - < 2, 1, 3 > .$$

   Finalmente, $\pi_1 : 2(x + 1) + 1(y - 1) + 3(z - 0) = 0$ ou, $\pi_1 : 2x + y + 3z + 1 = 0$.

3. Determine as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $P = (1, 2, 0)$, é paralela ao plano $\pi_1 : 2x - y = 3$ e é perpendicular à reta

$$s : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + t \\ z = t \ , t \in \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

Resolução (equações de r):

Das hipóteses, $\vec{v_r} \perp \vec{n_{\pi_1}}$ (pois $r // \pi_1$) e $\vec{v_r} \perp \vec{v_s}$. Logo,

$$\vec{v_r} = \vec{n_{\pi_1}} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k} = - < 1, 2, -3 > .$$

A equação vetorial é $r : (x, y, z) = (1, 2, 0) + \lambda(\ 1,\ 2, -3), \lambda \in \mathbb{R}$ e, as paramétricas são:

$$r : \begin{cases} x = \ \ 1 + \lambda \\ y = \ \ 2 + 2\lambda \\ z = -3\lambda \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \ . \end{cases}$$

4. Simplifique as seguintes equações por operações apropriadas e trace um esboço dos gráficos:

   (a) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0.$

   (b) $7x^2 - 12xy + 16y^2 = 76.$

Resolução: (a) Simplificando e completando quadrados temos $0 = 9(x^2 - 2x) - 4(y^2 + 4y) + 29 = 9[(x-1)^2 - 1] - 4[(y+2)^2 - 4] + 29$; logo, $9(x-1)^2 - 4(y+2)^2 = -36$ ou,

$$\frac{(y+2)^2}{3^2} - \frac{(x-1)^2}{2^2} = 1 \ .$$

Esta é a equação da hipérbole centrada em $(1, -2)$ e eixos paralelos aos usuais e, orientado-os como usual, cada ramo da hipérbole tem por eixo de simetria o eixo y. Isto é, a hipérbole 'abre-se' na direção do eixo y.

(b) (rotação) Temos, $\cot 2\theta = \frac{A-C}{B} = \frac{3}{4}$ e $cos^2\theta = \frac{1}{2}(\ 1 + \frac{cotg 2\theta}{\sqrt{1+cotg^2 2\theta}}) = \frac{4}{5}$, $sen^2\theta = \frac{1}{5}$, $tg^2\theta = \frac{1}{4}$, $tg\theta = \frac{1}{2}$, $sen\theta = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $cos\theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ e ainda,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} .$$

Substituindo e efetuando as contas obtemos: $\frac{u^2}{(\sqrt{19})^2} + \frac{v^2}{2^2} = 1$ que é a equação de uma elipse, obtida girando-se o eixo x pelo ângulo $\theta = \arctan 2$, que é fácil esboçar no plano xy. O eixo maior está contido no eixo u que corresponde ao eixo x pela forma que escolhemos as equações de rotação. O comprimento dos semi-eixos são $\sqrt{19}$ e 2.