MAT 221 - CÁLCULO IV -

2^o SEMESTRE de 2008

Professor Oswaldo Rio Branco

RESOLUÇÃO DE $P(\frac{d}{dt})x = R(t)e^{\gamma t}$, R um polinômio real e $\gamma \in \mathbb{C}$

Lema Consideremos a edo com coeficientes $a_n' s$ não todos nulos e $P = P(t)$ um polinômio,

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ ..... \ + \ a_1 x' + a_0 x \ = \ P(t) \ = \ b_n t^n \ + \ .... \ + \ b_1 t \ + b_0 \ .$$

(a) Se $a_0 \neq 0$, existe solução polinomial Q, grau(Q) = grau(P).

(b) Se $k = max\{i : a_j = 0\,, j \leq i\}$, há solução polinomial $Q = t^{k+1}P_1$, grau(P_1) = grau(P).

Prova

(a) Resolvamos o par de equações

$$Q(t) = c_n t^n + c_{n-1}t^{n-1} + ... + c_2 t^2 + c_1 t + c_0,$$

$$(*) \quad a_0 Q \ + \ a_1 Q' \ + \ a_2 Q'' \ + \ ...... \ + a_j Q^{(j)} \ + \ ..... \ + \ a_{n-1}Q^{(n-1)} \ + \ a_n Q^{(n)} = P,$$

identificando o coeficiente de t^{n-i} nas parcelas $a_j Q^{(j)}$, $j \leq i$, nas demais ele é zero.

Fixada a parcela $a_j Q^{(j)}$, $j \leq i$, um fator do coeficiente surge do trivial cômputo,

$$c_{n-i+j}\frac{d^j}{dt^j}\{\, t^{n-i+j}\} = c_{n-i+j}(n-i+j)(n-i+j-1).....(n-i+1)t^{n-i},$$

e o coeficiente é então $a_j c_{n-i+j}\frac{(n-i+j)!}{(n-i)!}$.

O coeficiente de t^{n-i} em (*) satisfaz, a soma em ordem decrescente em $j = i, i-1, ..., 0$,

$$(i) \qquad a_i c_m \frac{n!}{(n-i)!} \ + \ ...... \ + \ a_j c_{n-i+j}\frac{(n-i+j)!}{(n-i)!} \ + \ ..... \ + \ a_0 c_{n-i} = b_{n-i} \ \ , \ i = 0\, 1,\, 2\, ...\, n \ .$$

Pelas expressões (i) acima obtemos a equação matricial obviamente resolúvel,

$$\begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ a_1 n & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ a_2\frac{n!}{(n-2)!} & a_1\frac{(n-1)!}{(n-2)!} & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_i\frac{n!}{(n-i)!} & a_{i-1}\frac{(n-1)!}{(n-i)!} & . & a_j\frac{(n-i+j)!}{(n-i)!} & . & . & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & a_0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & a_0 & 0 \\ a_n n! & . & . & . & . & . & . & . & a_2 2! & a_1 & a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ c_{n-2} \\ . \\ . \\ . \\ c_{n-i} \\ . \\ c_2 \\ c_1 \\ c_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_n \\ b_{n-1} \\ b_{n-2} \\ . \\ . \\ . \\ b_{n-i} \\ . \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}.$$

(b) A equação é $a_n x^{(n)} + ... + a_{k+1} x^{(k+1)} = P$. Por (a) $a_n y^{(n-k-1)} + ... + a_{k+1} y = P$, $k+1 \leq n$, têm solução $y(t) = Q(t)$, grau(Q) = grau(P). Integrando $y = y(t)$ $k+1$-vezes, e escolhendo zero para termo independente, obtemos a solução desejada $\blacksquare$

FÓRMULA PARA $P(\frac{d}{dt})\{\, Q(t)e^{\gamma t}\,\}$:

1.

$$P(\frac{d}{dt})\,\{\, Q(t)e^{\gamma t}\,\} \;=\; \left[\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!} Q^{(n)} \;+\; .... \;+\; \frac{p''(\gamma)}{2!} Q'' \;+\; p'(\gamma) Q' \;+\; p(\gamma) Q \;\right] e^{\gamma t} \;.$$

Demonstração Escrevendo

$$P(\frac{d}{dt}) = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + ... + a_2 \frac{d^2}{dt^2} + a_1 \frac{d}{dt} + a_0 I$$

computemos $P(\frac{d}{dt})\{\, Q(t)e^{\gamma t}\,\}$ identificando o coeficiente de $Q^{(i)}$, i fixo. Expandindo $P(\frac{d}{dt})\{\, Qe^{\gamma t}\}$, a i-ésima derivada $Q^{(i)}$ surge só nas parcelas com coeficiente a_k, $k \geq i$. Ainda mais, $\frac{d^m}{dt^m}(e^{\gamma t}) = \gamma^m e^{\gamma t}$ e portanto, para cada $k \geq i$,

$$\frac{d^k}{dt^k}\{\, Q(t)e^{\gamma t}\,\} \;=\; \sum_{p=0}^{p=k} \binom{k}{p} Q^{(p)} \frac{d^{k-p}}{dt^{k-p}}\{e^{\gamma t}\} \;=\; \sum_{p=0}^{p=k} \binom{k}{p} Q^{(p)} \gamma^{k-p} e^{\gamma t} \,.$$

Assim, contabilizando as contribuições ao coeficiente de $Q^{(i)}$ obtemos o somatório,

$$\sum_{k=i}^{n} a_k \binom{k}{i} \gamma^{k-i} e^{\gamma t} \;.$$

Consideremos agora o polinômio característico

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n \;+\; a_{n-1}\lambda^{n-1} \;+\; a_{n-2}\lambda^{n-2} \;+\; .... \;+\; a_2\lambda^2 + a_1\lambda \;+\; a_0 \;,$$

e computando a sua derivada $p^{(i)}$, os monômios $\lambda^m\,, m < i$ desaparecem e obtemos,

$$p^{(i)}(\lambda) \;=\; \sum_{k=i}^{n} a_k\, k(k-1).....(k-i+1)\,\lambda^{k-i} = \sum_{k=i}^{n} a_k \frac{k\,!}{(k-i)!}\lambda^{k-i} =$$

$$= i\,! \sum_{k=i}^{n} a_k \frac{k\,!}{i\,!(k-i)!}\lambda^{k-i} = i\,! \sum_{k=i}^{n} a_k \binom{k}{i}\lambda^{k-i}.$$

Portanto, o coeficiente de $Q^{(i)}$ é

$$\frac{p^{(i)}(\gamma)}{i!} e^{\gamma t}.$$

Consequentemente,

$$P(\frac{d}{dt})\{\, Q(t)e^{\gamma t}\,\} = \sum_{i=0}^{n} \frac{p^{(i)}(\gamma)}{i!} Q^{(i)}(y) e^{\gamma t} =$$

$$= [\; \frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!} Q^{(n)} \;+\; .... \;+\; \frac{p''(\gamma)}{2!} Q'' \;+\; p'(\gamma) Q' \;+\; p(\gamma) Q \;]\, e^{\gamma t} \quad \blacksquare$$

A EDO $P(\frac{d}{dt}) = R(t)e^{\gamma t}$, P e R Polinômios Reais e $\gamma \in \mathbb{C}$.

2. Dada $P(\frac{d}{dt})x = R(t)e^{\gamma t}$, existe solução particular $Q(t)e^{\gamma t}$, Q um polinômio, tal que

$$(*) \quad \frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)} \; + \; .... \; + \; \frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' \; + \; p'(\gamma)Q' \; + \; p(\gamma)Q = R.$$

   (a) Se $\gamma \in \mathbb{R}$, podemos supor Q real e então, $x_p = Q(t)e^{\gamma t}$ é real.

   (b) Se $\gamma \notin \mathbb{R}$ então $Q(t)$ têm coeficientes complexos e $z_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}$ é solução complexa. Escrevendo $\gamma = \alpha + \beta i$, $x_p = Re\{\, z_p \,\}$ e $y_p = Im\{\, z_p \,\}$ satisfazem

$$P(\frac{d}{dt})x_p = R(t)e^{\alpha t}cos\beta t \quad , \quad P(\frac{d}{dt})y_p = R(t)e^{\alpha t}sen\beta t \; .$$

   (c) Se $p(\gamma) \neq 0$ então, grau(Q) = grau(R).

   (d) Se γ é raíz de multiplicidade k podemos supor $Q(t) = t^k R_1(t)$, grau(R_1) = grau(R).

Demonstração

Por (13) , procurando determinar uma solução $x_p(t) = Q(t)e^{\gamma t}$ encontramos,

$$P(\frac{d}{dt})\left\{\, Q(t)e^{\gamma t} \,\right\} \; = \left[\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)} \; + \; ...... \; + \; \frac{p''(\gamma)}{2!}Q'' \; + p'(\gamma)Q' \; + p(\gamma)Q \;\right] e^{\gamma t} \; = R(t)e^{\gamma t} \; ,$$

donde, obtemos (*).

Por (9), existe um polinômio Q resolvendo (*).

É óbvio que se $p(\gamma) \neq 0$, grau(Q) = grau(R) e, se γ é raíz de multiplicidade k então,

$$\frac{p^{(n)}(\gamma)}{n!}Q^{(n)} \; + \; .... \; + \; \frac{p^{(k)}(\gamma)}{2!}Q^{(k)} \; = R(t),$$

que tem, por (9), uma solução polinômial $y = Q^{(k)}$, grau(y) = grau(R). Integrando $y(t)$ k vezes, e escolhendo termos independentes nulos, obtemos uma solução particular ■