

CÔNICAS (PROPRIEDADES DE REFLEXÃO)

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Professor do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo

<http://www.ime.usp.br/~oliveira> oliveira@ime.usp.br

Prefácio.....	3
Introdução.....	7

Capítulo 1 - Cônicas no Plano, Propriedades de Reflexão

1.1 Definições.....	15
1.2 Parábolas - O Princípio de Reflexão por Heron - Propriedade de Reflexão e Desenho.....	17
1.3 Elipses - Propriedade de Reflexão e Desenho.....	24
1.4 Hipérboles - Propriedade de Reflexão e Desenho.....	31
1.5 Coordenadas Polares de uma Cônica.....	48
1.6 Construções Geométricas - π no Antigo Egito - Meneacmus e a Duplicação do Cubo.....	51
1.7 (Opcional) A Propriedade de Reflexão Caracteriza as Parábolas.....	61
1.8 (Opcional) Propriedade de Reflexão das Parábolas - Prova Elementar	63
1.9 (Opcional) Propriedade de Reflexão das Elipses - Prova Analítica.....	67
1.10 (Opcional) Propriedade de Reflexão das Hipérboles - Prova Analítica.....	70
1.11 Hipérbole X Circunferência.....	73

Capítulo 2 - Cônicas no Espaço

2.1 Definição de Apolônio - Seções de um Cone.....	75
2.2 Propriedade Focal de Elipses, Hipérboles e Parábolas.....	78
2.3 Caracterização Geométrica (Teorema de Dandelin).	81

Capítulo 3 - Quádricas no Plano

3.1 Rotação de Eixos e Classificação	
- A “Identificação” entre Quádricas e Cônicas.....	84
3.2 Caracterização Algébrica e Discriminante - Translações	
- Composição de Rotações.....	90
3.3 Refinamento: O Indicador de Degenerescência.....	97
3.4 Aplicação: Intersecções entre Cone e Plano.....	108
3.5 Apêndice - Invariância do Indicador de Degenerescência.....	114
Referências.....	118

Prefácio

O objetivo inicial destas notas foi o de apresentar como uma digna aplicação das equações diferenciais a dedução das três Leis de Kepler para o Movimento dos Planetas. Constatado que, em geral, os alunos não foram familiarizados com as cônicas resolvemos desenvolver esta primeira parte sobre cônicas. Dada uma próxima oportunidade desenvolveremos a segunda e última parte, então com equações diferenciais e as Leis de Kepler.

Como fonte de inspiração inicial, encontramos boa parte do material já coberto no livro *Cálculo Com Geometria Analítica*, vol. 2, George F. Simmons, McGraw Hill, 1987, traduzido por nosso saudoso colega Seiji Hariki. A partir deste texto foi organizado e sintetizado, ora expandindo e/ou mudando o enfoque, material exposto em quatro capítulos do citado livro, com apoio de outros livros, tendo sido acrescentadas várias demonstrações não usualmente cobertas, algumas não encontradas na literatura, e alguns tópicos. Apoiamo-nos também em material escrito pelos professores Paulo Boulos e Célia C. Góis.

Quanto às cônicas no plano o enfoque é fortemente geométrico e voltado às aplicações. Sendo tal tópico inter-disciplinar redigimo-lo tal que possa ser ministrado em qualquer curso, de forma independente e tendo por pré-requisito o nível médio completo. Em duas seções (opcionais) utilizamos derivadas. Para aqueles que o básico é suficiente, sugerimos as seções 1.1 a 1.4 e a classificação das quádricas em 3.1. Ler “A Duplicação do Cubo” é bastante recomendável.

Diferentemente dos livros consultados optamos por uma abordagem sintética, porém com muitas demonstrações, voltada às propriedades de reflexão devido às suas importantes aplicações para profissionais de engenharia, física, acústica, arquitetura, ótica, astronomia, etc. Tais demonstrações constituem excelente oportunidade para os estudantes virem a se interessar pelo raciocínio matemático e à geometria em particular.

Para as propriedades de reflexão, apresentamos demonstrações tanto geométricas como analíticas, deixando ao leitor a escolha de sua preferência e a oportunidade de se familiarizar com ambas. Quanto à parábola apresentamos três provas: uma geométrica, uma elementar (ao alcance de estudantes de segundo grau) e outra, via derivadas. A necessidade da prova elementar deve-se a uma matéria publicada no caderno “FOVEST”, Folha de São Paulo, 20/11/07, intitulada “Por que os faróis são parabólicos?”. A prova publicada no jornal é uma tautologia, o que nos leva a pensar em uma demonstração correta e acessível a alunos de segundo grau, pois tal era o objetivo do autor da matéria. Finalmente, provamos ser a parábola a única figura, no plano, com tal propriedade. Ressaltamos ainda o belo e simples Argumento de Heron para provar o Princípio da Reflexão e sua aplicação para uma igualmente bela e simples demonstração do Princípio da Reflexão para elipses.

Em Cônicas no Espaço salientamos a simplicidade das demonstrações graças à combinação da definição de Apolônio para o cone (a qual, alguns, mesmo em textos básicos apresentam alterada) e a definição adotada para o ângulo de inclinação do plano secante. Seguem então trivialmente as propriedades focais das cônicas, o Teorema de Dandelin e a identificação do papel do ângulo crítico $\beta_0 = \alpha$, com α o ângulo do vértice do cone, em que a natureza da cônica, intersecção do plano com o cone, muda segundo β , o ângulo de inclinação do plano em relação ao eixo do cone, seja maior ou menor que α . Tal singulari-

dade emergirá na caracterização das quádricas e na análise da relação energia-excentricidade vista na parte II, Leis de Kepler.

O estudo em Quádricas é razoavelmente profundo e a seção 3.4 propicia um complemento ao exposto sobre cônicas. Destacamos, além dos invariantes discriminante (Δ) e polinômio característico, a prova de que “presente” o termo misto, xy , a quádrica não é uma circunferência, a motivação da busca por uma rotação de eixos para simplificar um tal equação e a discussão sobre a “identificação” entre quádricas e cônicas e, como opcional, a composição de rotações. Na seção 3.3 apresentamos o invariante e indicador de degenerescência δ e provamos que o par Δ, δ distingue as quádricas completamente. Na seção 3.4 aplicamos tal resultado provando que fixado um cone circular reto em \mathbb{R}^3 , a intersecção deste com os planos não contendo seu vértice originam exatamente as quatro seções cônicas não degeneradas.

Nestas notas são quatro as cônicas no plano: circunferências, elipses, parábolas e hipérbolas. Não identificamos seções cônicas com quádricas, nem circunferências são elipses.

A parte II adaptamos de apêndices ao longo do livro Cálculo com Geometria Analítica, G. Simmons, reorganizando e sintetizando a dedução das Leis de Kepler, com simplificações e demonstrações, em particular a de uma específica, e simples, equação diferencial não coberta em cursos introdutórios, e o cálculo da energia total (E) na dedução da relação energia-excentricidade. Mostramos que um corpo celeste do nosso sistema solar descreve uma órbita elíptica em torno do Sol, com este um dos focos da elipse, o que é equivalente a energia do corpo, E , ser negativa. Mostramos também que um corpo que atravessa o nosso sistema solar descreve uma órbita hiperbólica (com energia $E > 0$) e portanto tal corpo vem para nunca mais voltar.

Acrescentamos o cálculo da velocidade de um planeta, a relação entre apogeu e perigeu para um satélite em órbita da Terra e a entre afélio, periélio e excentricidade para um planeta.

Para a dedução das Leis de Kepler é suficiente ler do início a coordenadas polares, sem se deter nas propriedades de reflexão, e passar à seção 4, onde faz-se uso de equações diferenciais.

Conclusão. Ao final destas notas teremos provado, entre outros variados resultados, que as condições seguintes são, respectivamente e contextualmente, equivalentes:

(i) A figura (ou órbita) é uma elipse, parábola, ou hipérbole

(ii) $0 < e < 1$, $e = 1$, ou $e > 1$,

onde e é a excentricidade da cônica.

(iii) $\beta_0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ $\beta = \beta_0$, ou $0 < \beta < \beta_0$.

(iv) $\Delta < 0$, $\Delta = 0$, ou $\Delta > 0$.

com a quádrlica não degenerada e não uma circunferência.

(v) $E < 0$, $E = 0$, ou $E > 0$.

Introdução

A atual definição de cônicas consta de um tratado grego portentoso do período helenístico (iniciado em 323 a.C. com a morte de Alexandre Magno e findo próximo ao início da era cristã) de Apolônio de Perga (262-190 a.C. aproximadamente), intitulado “As Cônicas”, considerado ele pelos antigos, apesar da anterioridade de “Os Elementos” de Euclides de Alexandria, o “grande geômetra”, e considerado modernamente “pai” da Astronomia matemática. Utilizemos nestas notas a definição de cone dada por Apolônio:

“Se fizermos uma reta, de comprimento indefinido e passando sempre por um ponto fixo, mover-se ao longo da circunferência de um círculo que não está num mesmo plano com o ponto dado de modo a passar sucessivamente por cada um dos pontos dessa circunferência, a reta móvel descreverá a superfície de um cone duplo”.

Acrescentemos: vértice é o ponto fixo, eixo é a reta que une o vértice ao centro da circunferência e geratriz é qualquer reta determinada pelo vértice e por um ponto da circunferência.

Um cone é reto se o eixo é perpendicular ao plano da circunferência. Como em um tal cone o ângulo que as geratrizes formam com o eixo é sempre igual, ele é dito ângulo do vértice.

Para contextualizar “As Cônicas” é mister um pouco de história e útil recordar Lobachevsky (século XIX), criador das geometrias não euclidianas, que defendendo-se dos incrédulos, escreveu:

“Não há ramo da matemática, por abstrato que seja, que não possa um dia vir a ser aplicado aos fenômenos do mundo real”.

Certamente, ele, entre outros motivos, deve ter nesta e noutras ocasiões pensado em “As cônicas”, obra que aguardou por quase dois mil anos para exibir seu esplendor nos céus. Assim, a teoria das cônicas já estava pronta quando da descoberta de Kepler, em 1609, o que lembra a precocidade das geometrias não-euclidianas em relação à teoria da relatividade.

O período 510-404 a.C. inicia-se, em Atenas, com a ascensão de Clístenes, um aristocrata, que derrubando um tirano estabeleceu uma reforma política profunda e é considerado o pai da democracia ateniense. Cinquenta anos depois, sob a liderança de Péricles (período 461-429 a.C.), Atenas viveu o apogeu de sua democracia e a “Idade Áurea” em ciências, artes e política. Assim, o século V a.C. é dito o século de Péricles que finda com a derrota de Atenas para Esparta em 404 a.C. Emblematicamente, em 470 a.C. nascia Sócrates, em Atenas, dividindo a história da filosofia (em períodos pré-socrático e pós-socrático), condenado à morte em 399 a.C. por um tribunal ateniense. São do mesmo século: Ésquilo, Sófocles e Eurípides (tragédia), Aristófanes (comédia), Fídias (escultura), Heródoto e Tucídides (história), Protágoras, Demócrito de Abdera, Anaxágoras de Clazomene, Zenon de Elea, Hípias de Elis, Hipócrates de Chios, Hipasus e Arquitas de Tarento (filosofia ou/e matemática), Hipócrates de Cós (medicina), Píndaro (poesia), etc. Sendo a segunda metade do século V a.C. a “Idade Heroica da Matemática”, pela profundidade do pensamento matemático e que nos legou seis problemas: incomensurabilidade, paradoxos do movimento, infinitésimos e, os três problemas clássicos, duplicação do cubo, quadratura do círculo e triseção do ângulo, alguns insolúveis por quase 2.300 anos.

Tucídides em “Guerra do Peloponeso” relata uma peste à época, que talvez dizimara um quarto da população de Atenas, incluindo o general Péricles. Segundo a tradição, uma delegação fora ao oráculo de Apolo, na ilha Delos, consultar como debela-la sendo a resposta o pedido de duplicação do altar, que era cúbico. Esta é a origem do problema da duplicação do cubo ou “problema deliano”.

O problema era geométrico, tratava-se de determinar o número

$$\sqrt[3]{2},$$

sendo já à época estabelecido que a solução deveria ser construída com régua e compasso, ou seja, deveria ser exata, diferindo da matemática de outros povos. Como exemplo, apresentamos neste texto um excelente cálculo egípcio para π , de 1.650 a.C.

Talvez tenha sido Hipócrates de Chios o primeiro a concluir que se uma curva satisfazendo as relações de proporção

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a},$$

pudesse ser construída (uma parábola em linguagem atual) então o problema deliano teria solução, porém coube a Meneacmus (século IV a.C.), aluno de Aristóteles (384-322 a.C.) e como seu mestre, preceptor de Alexandre, em seus esforços para resolve-lo descobrir a parábola e, concomitantemente, a elipse e a hipérbole.

Meneacmus não se restringiu às circunferências e retas (ou régua e compasso), distinguiu os cones retos em três tipos: agudo, reto e obtuso, com o nome conforme o ângulo do vértice, e provou que em cada caso a interseção com um plano perpendicular a uma das geratrizes resulta, respectivamente, na elipse, parábola e hipérbole (consulte Figura 1, abaixo).

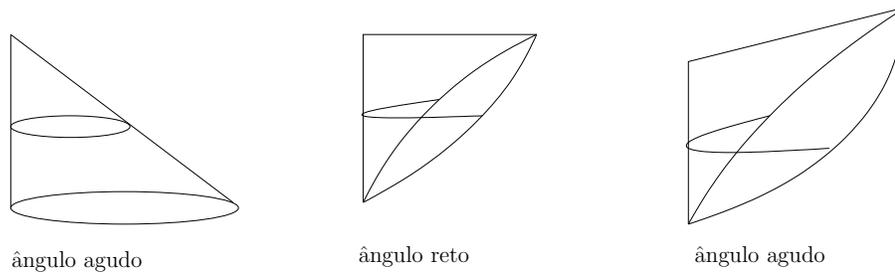


Figura 1: Elipse - Parábola - Hipérbole

Após a morte de Alexandre, na disputa pela divisão do império entre seus generais destacou-se Ptolomeu que passou a governar o Egito. Ptolomeu I Sóter (Salvador), como passou a ser chamado, iniciou a construção do Farol de Alexandria (uma das sete maravilhas do mundo antigo, que seria completada por seu filho Ptolomeu II), a dinastia ptolemaica (que se estenderia até Cleópatra) e foi um dos responsáveis pela primeira “Idade Áurea da Ciência”, antes do século XVII de nossa era. Entre outros fatores para tal exuberância destacam-se Alexandre que contribuiu financeiramente para as ciências, o ambiente propício que a dinastia (16 monarcas) criou e a fusão da ciência de caldeus, egípcios e gregos. Muitas contribuições da ciência helenística ecoam até hoje.

Ptolomeu I criou em Alexandria um instituto, o Museu, com jardim zoológico e horto florestal, insuperável em seu tempo, e atraiu sábios de destaque, entre eles Euclides, dito de Alexandria, talvez sem sê-lo, e fundou a Biblioteca de Alexandria, com sábios à direção. Arquimedes (287-212 a.C.), o maior matemático da antiguidade, no mínimo manteve contatos com o Museu. Assim, graças aos três, o século III a.C. é considerado a “Idade Áurea da Matemática”.

Eis uma pequena lista desses sábios, e suas contribuições: Posidônio da Síria, dividiu a Terra em cinco zonas climáticas (ainda aceitas) e explicou a influência da Lua nas marés ; Herófilo de Cal-

cedônia, uma descrição detalhada do cérebro, significado da pulsação e seu uso no diagnóstico e que as artérias levam o sangue do coração ao corpo todo; Erasítrato, “pai da fisiologia”, descobriu as válvulas do coração e distinguiu nervos motores e sensitivos; Hiparco de Nicéia, astrônomo, “pai da trigonometria”, inventor do astrolábio e do globo terrestre; Eratóstenes de Cirene, poeta, filólogo, bibliotecário de Alexandria, geógrafo, autor do melhor mapa à época, com a superfície da Terra dividida em graus de latitude e longitude, calculou a circunferência da Terra com erro inferior a 300 km, tem um crivo com seu nome, e Apolônio de Rodes (nascido em Alexandria), poeta, filólogo, autor do poema épico “Os Argonautas”, bibliotecário de Alexandria e tutor do príncipe Ptolomeu III.

O mais famoso, hoje, dos primeiros astrônomos à época é Aristarco de Samos (310-230 a.C.), que descobriu que a aparente imobilidade das estrelas “fixas” deve-se à distância e é autor da primeira teoria heliocêntrica, só reconhecida no século XVII, quase um século após Copérnico publicar em 1543 a sua teoria heliocêntrica, não reconhecida pela Igreja, à princípio. O último astrônomo helenístico, Ptolomeu de Alexandria (100-170 d.C.), é autor de “O Almagesto” ou “A Grande Composição”, obra baseada na teoria geocêntrica, que perdurou até o século XVIII.

Por três séculos, Alexandria, no Delta do Nilo, maior e mais famosa das metrópoles helenísticas, foi o melhor centro científico, mormente em matemática, medicina e astronomia, abrigando de 500.000 a, talvez, um milhão de pessoas. Não houve cidade da antiguidade que a superou em esplendor, nem Roma.

No período 47-48 a.C. temos o bloqueio de Cesar à Alexandria, o conseqüente incêndio da Biblioteca, símbolo da era helênica, e a ascensão de Cleópatra ao trono do Egito. Em 30 a.C, com a tomada de Alexandria, por Otávio, e suicídio de Cleópatra, a era helênica termina.

Apolônio, após Meneacmus, provara que com um cone reto, variando a inclinação do plano secante obtem-se as mesmas três cônicas e, ainda, a circunferência. E ainda, que o cone não precisa ser reto, definindo-o com duas folhas, o que é fundamental para os geômetras não mais se referirem a duas hipérbolas mas a dois ramos de uma única hipérbole.

Assim, Apolônio definiu cônicas como interseções de um plano, não contendo o vértice, com o cone. Ele então provou que há quatro possibilidades: circunferência, elipse, parábola e hipérbole.

Tais estudos se deram sem atenção à praticidade mas, quase dois mil anos depois, mostraram-se importantes em muitos ramos científicos e, às vezes, decisivos e impactantes.

Na primeira metade do século XVI Tartaglia (1499?-1557), estudando a trajetória de uma bala de canhão, percebeu que o alcance do tiro é função do ângulo de elevação do cano do canhão, chegando próximo de mostrar uma aplicação das cônicas.

Em fins do século XVI e início do XVII, Galileu (1564-1640) estudou artilharia, pois os canhões tornaram-se mais potentes, com tiros alcançando quilômetros, e em 1604 concluiu que a trajetória da bala é uma parábola. Em 1638 publica “Diálogo Sobre As duas Novas Ciências”, e expõe uma teoria sobre tais trajetórias bem mais detalhada que outras.

As cônicas foram impactantes em Astronomia, quando em 1609 Johannes Kepler publicou sua fantástica descoberta de que a órbita de Marte é uma elipse, conjecturando que o mesmo ocorria com todo planeta. Cerca de sessenta anos depois Isaac Newton provou que a órbita planetária elíptica é causa e consequência de sua Lei de Atração Universal e, em 1687, publicou a Teoria da Gravitação Universal, explicando o sistema solar.

Atualmente, seu estudo é importante em explorações espaciais e pesquisas do comportamento de partículas atômicas: satélites artificiais movem-se ao redor da Terra em órbitas elípticas e trajetórias de partículas alfa movendo-se no campo elétrico de um núcleo atômico são hiperbólicas. E ainda, na construção de teatros, conchas acústicas, abóbadas, faróis e antenas parabólicas, refletores, telescópios, fornos solares, iluminação, radares, etc.

Quanto às reflexões, restam de Euclides cinco obras entre elas “Óptica”, um dos primeiros trabalhos sobre Perspectiva. À época a Óptica dividia-se em: Óptica (Perspectiva), Catóptrica (geometria dos raios refletidos) e Dióptrica (geometria dos raios refratados).

A Lei de Reflexão da Luz já era conhecida, mas Heron de Alexandria, helenístico tardio, do século I d.C., lembrado hoje pela fórmula da área de um triângulo em função dos lados, em “Catóptrica”, provou de forma simples e geométrica que a igualdade dos ângulos de incidência e reflexão segue do princípio aristotélico: “a natureza nada faz do modo mais difícil”. Apresentamos e comento a prova na seção 1.2 e aplico-a, para elipses, na seção 1.3.

Não estudamos a circunferência não por não ser possível analisá-la unificada às demais. Nas seções 1 e 2, por não satisfazer uma relação foco-diretriz-excentricidade e as construções geométricas requeridas não lhe serem possíveis. Na seção 3 o discriminante não a distingue da elipse (existem circunferências e elipses com igual discriminante) e, na seção 4, a relação energia-excentricidade não contempla o caso de uma órbita circular (e uma órbita planetária circular é considerada improvável). A fórmula para cônicas em coordenadas polares também não as contempla. As outras três cônicas, ao contrário, tem aqui análise unificada e, portanto, apresentarão propriedades, tais como reflexão, análogas.

Poder-se-ia argumentar que o discriminante não distingue elipses. Não é o caso pois (veremos) uma quádrlica, com equação com termo

misto, não é circunferência, como curva. Ora, este é o caso não trivial. No trivial, sem termo misto, o discriminante não é necessário, é de fato inconveniente. Assim, se há termo misto, temos apenas três curvas não degeneradas (e distinguíveis pelo discriminante): parábolas, elipses e hipérbolas.

A razão única para não analisarmos a circunferência é que, na antiguidade como na atualidade, estamos interessados nas “novas” curvas, não construtíveis com régua e compasso, que apresentam belas e várias relações geométricas e permitem resolver problemas até então sem solução e, principalmente, são fundamentais na atualidade.

Muitos então declaram a circunferência uma cônica degenerada. Nestas notas não são.

Por fim, recomendamos fortemente aos estudantes assistir ao filme *Ágora* (uma produção épica espanhola, vide *Imdb International Movie Data Base*) e consultar também vídeos sobre a vida da matemática, astrônoma e filósofa Hypátia que viveu no século IV d.C. em Alexandria e que se devotou ao estudo das cônicas e do movimento planetário.

É também recomendável assistir ao filme “Sócrates”, dirigido por Roberto Rossellini (que também dirigiu “Descartes” e “Pascal”, ambos também recomendáveis). Em “Sócrates” um dos personagens é Hípias de Élis, o sofista, criador da curva “quadratriz” que torna possível, com régua e compasso, trisecionar um ângulo e também realizar a quadratura do círculo (vide G. F. Simmons, *Cálculo com Geometria Analítica*, Vol 2, pp. 220-221 e 241). Porém, como se sabe, a trisecção do ângulo e a quadratura do círculo não são construtíveis com régua e compasso. Esclarecer a aparente contradição ajuda a entender o significado do termo sofista.

Vide também no livro acima citado, como utilizar, a “cissóide de Diocles” (pp. 209 e 240) para duplicar um cubo, a “conchóide” de Nicomedes (pp. 210 e 240) para trisectar um ângulo e a espiral de Arquimedes (pp. 217 e 242) para realizar a quadratura do círculo.

Capítulo 1

Cônicas no plano e propriedades de reflexão

1.1 Definições

Adotamos o ponto de vista segundo o qual as cônicas são quatro: circunferências, parábolas, elipses e hipérbolas. Porém, como mencionado na introdução, não estudaremos as circunferências.

Consideremos um plano e dois de seus pontos, F e F' , com $F \neq F'$, chamados focos. Seja P um ponto arbitrário no plano.

Definições. Seja d_1 a distância de P a F e d_2 a distância de P a F' .

- *Elipse é o conjunto dos pontos do plano cuja soma das distâncias, d_1 e d_2 , aos focos é constante.*
- *Hipérbole é o conjunto dos pontos do plano cujo valor absoluto da diferença $|d_1 - d_2|$ é constante.*
- *Parábola é o conjunto dos pontos do plano cujas distâncias a um ponto fixo F (o foco) e a uma reta fixa (diretriz) D , com $F \notin D$, são iguais (vide Figura 2).*

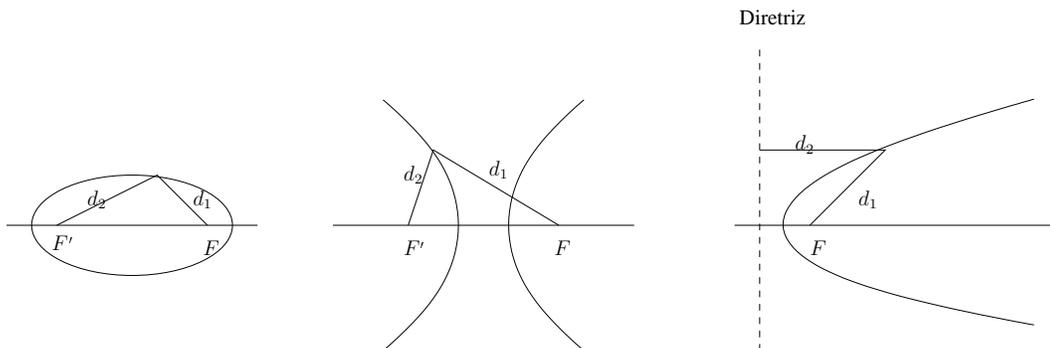


Figura 1.1: Elipse-Hipérbole-Parábola

O termo foco é utilizado devido às propriedades de reflexão das cônicas e suas aplicações.

Definiremos a excentricidade e , onde $e \in (0, +\infty)$, de uma cônica e provaremos que

$$\begin{cases} 0 < e < 1 & \text{para elipses,} \\ e = 1 & \text{para parábolas e} \\ e > 1 & \text{para hipérbolés.} \end{cases}$$

A circunferência é vista como uma elipse degenerada, na qual os focos coincidem e dizemos que sua excentricidade é zero.

Cônicas no plano são também chamadas, simplesmente, cônicas, quando o contexto é claro.

Veremos que a interseção entre uma reta e uma cônica têm no máximo dois pontos.

Dizemos que uma reta que intersecta uma cônica em dois pontos é uma reta secante.

Notação. Os símbolos \sphericalangle e \triangle designam, respectivamente, ângulos e triângulos. Dados três pontos A , B e C , no plano, o símbolo

$$\sphericalangle ABC$$

denota o ângulo em B formado pelos segmentos \overline{BA} e \overline{BC} .

1.2 Parábolas

Definição. Fixado um plano, consideremos a parábola C , com foco F e diretriz D , onde $F \notin D$. O eixo da parábola (ou eixo de simetria) é a reta por F e perpendicular à diretriz D . O vértice V , da parábola, é o ponto de C equidistante de F e D .

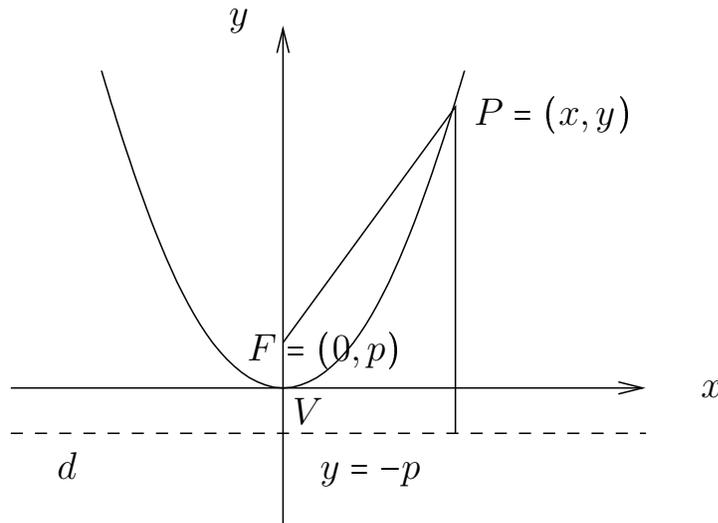


Figura 1.2: Parábola

Introduzimos um sistema cartesiano de coordenadas satisfazendo as condições abaixo.

- O eixo y corresponde ao eixo de simetria.
- A origem corresponde ao vértice.
- O eixo x corresponde à reta pela origem, paralela a D .
- Orientemos o eixo y tal que $F = (0, p)$, com $p > 0$. Por conseguinte, a diretriz D tem por equação

$$y = -p.$$

Seja $P = (x, y)$ um ponto arbitrário da parábola. Então temos

$$\sqrt{(x - 0)^2 + (y - p)^2} = y + p$$

e elevando a equação acima ao quadrado e simplificando obtemos

$$x^2 = 4py.$$

Estas duas equações são equivalentes. Adotamos a segunda como forma padrão para a equação de uma parábola. Pela segunda equação, a intersecção entre uma reta e uma parábola têm no máximo dois pontos.

Trocando-se a posição da parábola em relação aos eixos coordenados, sua equação muda. Três outras posições simples, com as correspondentes equações são:

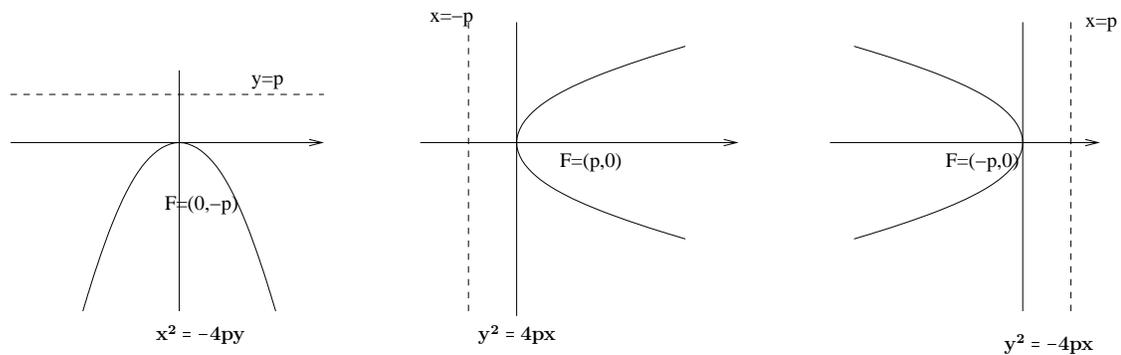


Figura 1.3: posições e equações- parábolas

Observação. A constante $p > 0$ é a distância do vértice ao foco e, também, do vértice à diretriz.

O Princípio da Reflexão Por Heron de Alexandria

O Princípio da Reflexão se aplica a raios de luz, ondas eletromagnéticas, sonoras e de calor, etc. Em sua formulação atual deriva do *Princípio da Menor Ação*, de Hamilton. Mas Heron de Alexandria já o provava a partir do *Princípio do Menor Esforço*, enunciado por

Aristóteles, segundo o qual a natureza nada faz do modo mais difícil. O argumento de Heron, belo e simples, é também útil à avaliação da “menor trajetória”, e o aplicaremos às elipses .

Princípio da Reflexão (Heron). Dada uma superfície refletora os ângulos de incidência e reflexão são iguais.

Consideremos um espelho MM' (Figura 1.4), uma fonte de luz no ponto S e um ponto E do mesmo lado que S , segundo MM' . Mostremos que o caminho SPE , em que os ângulos SPM e EPM' são iguais, é o mais curto, tal que o raio reflita no espelho e atinja E .

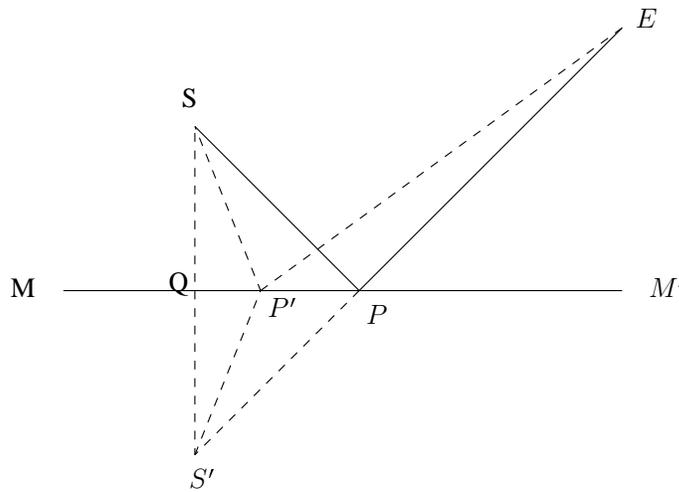


Figura 1.4: Heron e o princípio da reflexão

Consideremos um outro caminho $SP'E$ e tracemos o segmento SQS' , $Q \in MM'$, perpendicular a MM' , com

$$|SQ| = |QS'|.$$

Por semelhança de triângulos, os caminhos SPE e $SP'E$ são, respectivamente, de comprimentos iguais aos caminhos $S'PE$ e $S'P'E$; porém, $S'PE$ é uma reta, pois

$$\angle M'PE \cong \angle MPS,$$

e portanto é o mais curto♣

Propriedade de Reflexão das Parábolas - Prova Geométrica

Seja C uma parábola com foco F , diretriz D e vértice V .

Se $P \in C$, segue que uma reta por P e não secante à parábola é então ou tangente (à parábola) ou paralela ao eixo (da parábola).

A reta por V , perpendicular ao eixo, é tangente à parábola pois tal reta é não secante já que intersecta C em um único ponto: o vértice.

Dado um ponto P indicamos sua projeção sobre a diretriz por Q .

Teorema 1.1 *Seja P um ponto de uma parábola. A reta bissetriz T do ângulo formado pelos raios focais \overrightarrow{PQ} e \overrightarrow{PF} é tangente à parábola.*

Prova.

- ◇ Caso $P = V$. Está acima demonstrado pois o ângulo determinado por \overrightarrow{VQ} e \overrightarrow{VF} é π radianos e assim, a bissetriz do ângulo $\angle QVF$ é perpendicular ao eixo.
- ◇ Caso $P \neq V$. Então, Q , P e F são não alinhados e $\angle QPF$ é maior que zero e menor que π . Portanto T forma com a reta \overleftrightarrow{QP} um ângulo maior que zero e menor que $\frac{\pi}{2}$, donde (vide Figura 1.5)

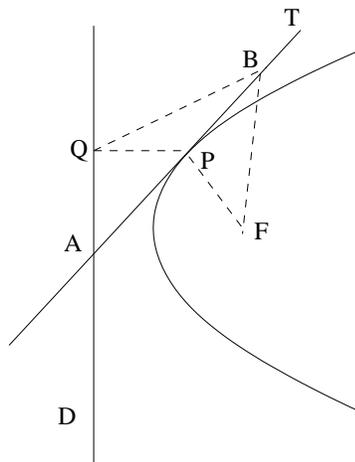


Figura 1.5: Tangente à parábola

$$\left\{ \begin{array}{l} T \text{ não é paralela a } \overleftrightarrow{QP} \text{ e, então, não é paralela ao eixo,} \\ \text{e} \\ T \text{ não é paralela à reta diretriz.} \end{array} \right.$$

Logo, T é não paralela e não perpendicular seja ao eixo ou à diretriz.

Para provarmos que T é tangente à parábola resta mostrarmos que T intersecta a parábola unicamente em P . Consideremos o ponto

$$A \in T \cap D \text{ (vide Figura 1.5).}$$

Por definição de T segue a congruência $\angle FPA \cong \angle QPA$ e, por definição de parábola, $|PQ| = |PF|$. Logo, dado $B \in T$ temos, por geometria elementar, a congruência $\triangle QPB \cong \triangle FPB$ e portanto

$$|BQ| = |BF|.$$

Se $B = A$ é óbvio que BQ não é perpendicular a D . Se $B \neq P$, e $B \neq A$, é fácil ver que BQ não é perpendicular a D , caso contrário B e P teriam o mesmo ponto, Q , como projeção perpendicular sobre D e, como ambos pertencem a T , teríamos que T seria perpendicular à D e esta possibilidade é então descartada pois T não é paralela ao eixo. Logo, vale $|BQ| - |BD| > 0$ e ainda

$$|BF| - |BD| = |BQ| - |BD| > 0.$$

Assim, $B \notin C$ e a reta T intersecta a parábola apenas em P ♣

Corolário 1.1 *Se θ é o ângulo de inclinação da tangente em relação ao eixo então*

$$\theta \cong \angle QPA.$$

Propriedade de Reflexão das Parábolas. Dada uma superfície de revolução, parabólica e internamente espelhada, um raio de luz saído do foco e com ângulo de incidência α é então refletido por um ponto P da superfície, com igual ângulo de reflexão. Mas, já vimos, o ângulo entre o eixo e a tangente em P é também α . Isto mostra que o raio é emitido paralelamente ao eixo (vide Figura 1.6).

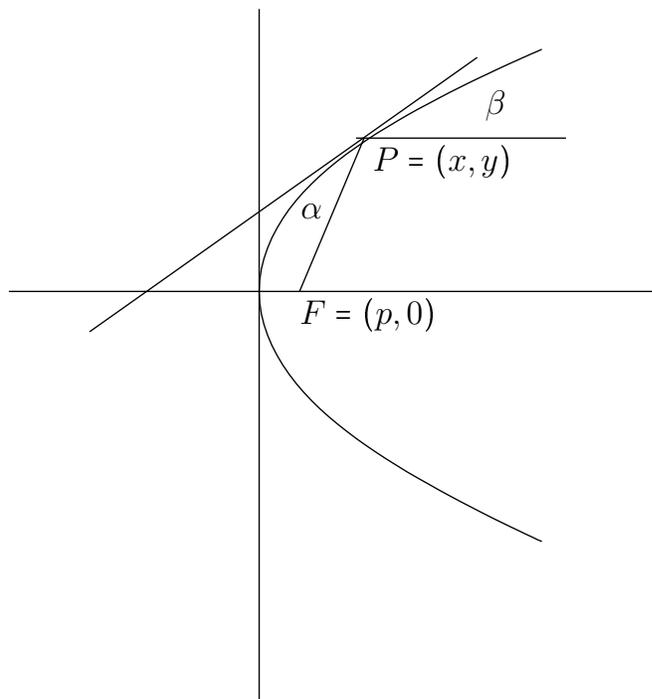


Figura 1.6: Propriedade de Reflexão-Parábolas

Aplicações. Espelhos de faróis são ilustrativos. Girando uma parábola ao redor de seu eixo, temos uma superfície que pintada internamente com tinta prata, refletirá raios de luz oriundos de uma fonte no foco, paralelamente ao eixo. Utilizamos tal princípio para antenas parabólicas, conchas acústicas, iluminação, telescópios refletores, fornos solares, antenas de radar e de radiotelescópios; em alguns desses casos os raios de luz (ou ondas eletromagnéticas) chegam paralelamente ao eixo, são então refletidos e convergem no foco-receptor.

Desenhando Uma Parábola. Uma parábola com foco F e reta diretriz d , dados e marcados numa folha de papel, pode ser construída da forma descrita a seguir (vide Figura 1.7).

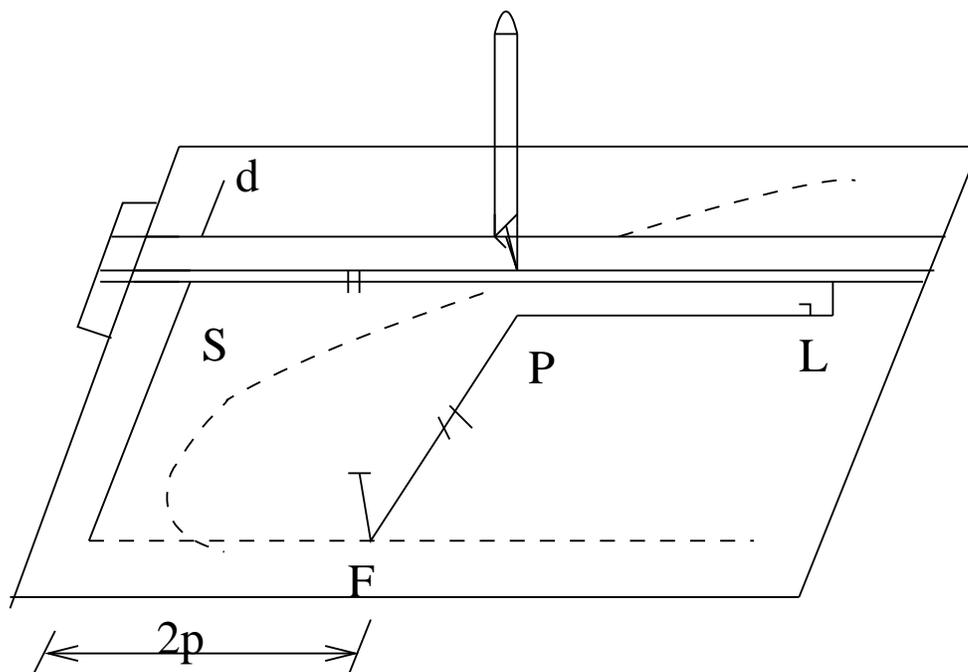


Figura 1.7: Desenhando uma Parábola

Numa prancha de desenho, fixe uma régua no papel com seu lado ao longo de d e coloque o cateto menor de um esquadro contra a aresta da régua. No vértice oposto fixe uma extremidade de um fio de comprimento igual ao cateto maior do esquadro, e fixe a outra extremidade em F . Se a ponta de um lápis em P mantém o fio esticado, vide figura, então a ponta desenha parte de uma parábola quando o esquadro desliza ao longo da régua (verifique).

1.3 Elipses

Definição. Em um plano, dados os pontos F e F' , com $F \neq F'$, e $a > 0$ tal que $2a > |FF'|$, o lugar geométrico dos pontos P tais que a soma de suas distâncias a F e F' é $2a$ é chamado uma elipse. Isto é,

$$|PF| + |PF'| = 2a.$$

Os pontos F e F' são os focos da elipse.

Para desenhar uma elipse, fixemos um papel a uma prancha de desenho, por meio de tachinhas, em F e F' . Amarrando as extremidades de um fio a elas e mantendo-o teso com a ponta de um lápis, movemos o lápis em um sentido, até uma volta completa.

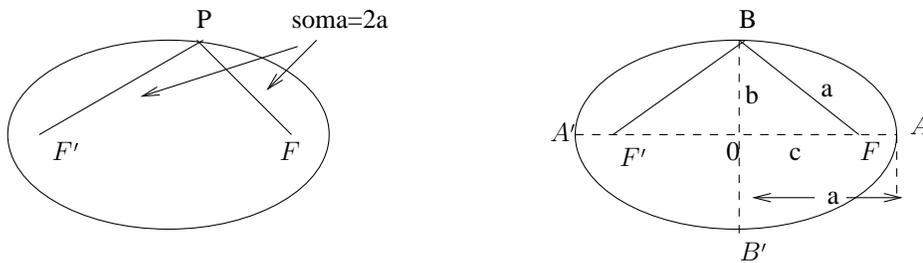


Figura 1.8: Desenho de uma Elipse

A curva é simétrica em relação à reta contendo os focos e também em relação à reta mediatriz do segmento FF' . O segmento AA' é o eixo maior e BB' o eixo menor. O ponto O , interseção desses, é o centro. Os pontos A e A' , extremidades do eixo maior, são os vértices.

É fácil provar que $|OA| = a$ pois, por definição, $|AF'| + |AF| = 2a$ e é fácil ver que $|AF'| = |AF| + 2|OF|$. Conseqüentemente temos que $2|AF| + 2|OF| = 2a$, donde concluí-se que $|OA| = a$. Denotamos o comprimento do eixo menor por $2b$ e a distância entre os focos por $2c$. É trivial ver que $|BF| = a$, pois $|BF| + |BF'| = 2a$ e $|BF| = |BF'|$. Encontramos então a equação

$$(E1) \quad a^2 = b^2 + c^2.$$

Como $|AA'| = |OA'| + |OA|$ e $|OA| = a$, temos $|AA'| = 2a$, e o eixo maior mede $2a$. Os números a e b chamam-se semi-eixo maior e semi-eixo menor, respectivamente (Figura 1.8).

Pela equação (E1) temos $b < a$. Se b é muito pequeno em relação a a , a elipse é alongada e fina e, por (E1), o valor c é aproximadamente a e os focos estão próximos às extremidades do semi-eixo maior. Se o valor b é próximo de a , a elipse aproxima-se de uma circunferência e, por (E1), o valor c é pequeno e os focos estão próximos ao centro. A razão c/a chama-se excentricidade da elipse e é denotada por e . Assim,

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad \text{e } 0 < e < 1.$$

Para as elipses “quase circulares” temos $e \approx 0$. Para as alongadas, $e \approx 1$. Por vezes, a circunferência é dita uma elipse degenerada ($e = 0$).

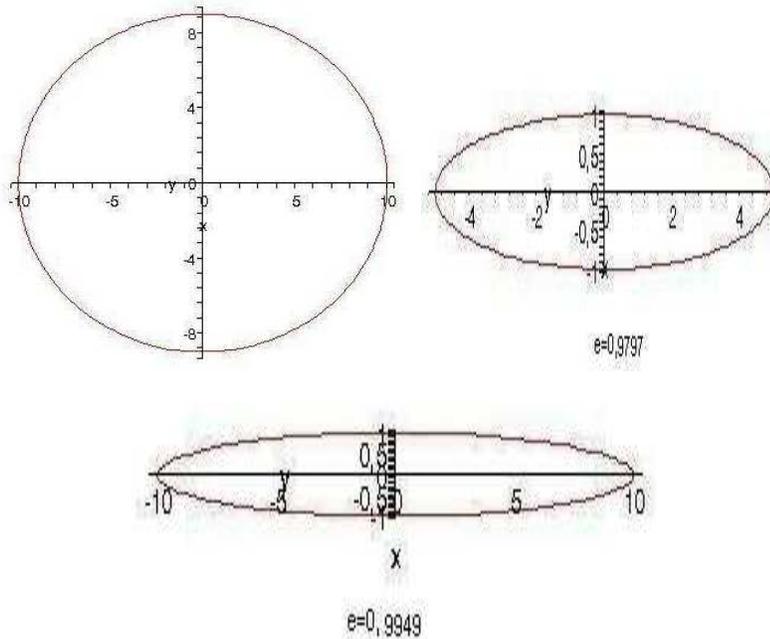


Figura 1.9: Excentricidades - Elipses

Para determinarmos uma equação simples para a elipse, tomemos o eixo x ao longo do eixo maior e o eixo y como a mediatriz desse segmento. Então os focos são (vide Figura 1.10 abaixo)

$$F' = (-c, 0) \text{ e } F = (c, 0).$$

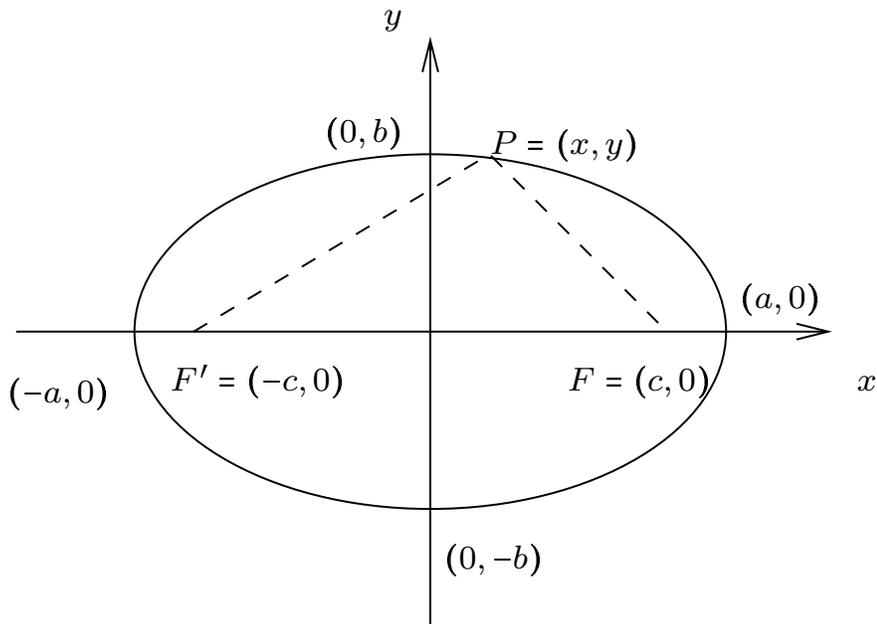


Figura 1.10: Focos e Vértices - Elipse

Pela definição de elipse, obtemos a equação

$$(E2) \quad \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

que é a equação da curva.

Isolando o segundo radical e efetuando o quadrado obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

e assim,

$$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4cx.$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Desta forma chegamos às equações

$$(E3) \quad |PF| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a - \frac{c}{a}x \quad \text{e}$$

$$(E4) \quad |PF'| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = a + \frac{c}{a}x,$$

onde (E4) é obtida de (E3), pois $|PF'| = 2a - |PF|$.

O quadrado dessas equações é

$$x^2 \mp 2cx + c^2 + y^2 = a^2 \mp 2cx + \frac{c^2}{a^2}x^2$$

e simplificando temos

$$\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right)x^2 + y^2 = a^2 - c^2.$$

Donde então segue

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

Lembrando a relação [(E1), básica] $a^2 = b^2 + c^2$ obtemos, por fim,

$$(E5) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Isto é, acabamos de mostrar que (E2) implica (E5).

Não é difícil mostrar que (E5) implica (E2).

Adotamos (E5) como forma reduzida (padrão) da equação da elipse.

As fórmulas (E3) e (E4) dos raios focais direito e esquerdo PF e PF' podem ser escritas como, respectivamente,

$$\begin{cases} |PF| = a - \frac{c}{a}x = e \left[\frac{a}{e} - x \right] \\ \text{e} \\ |PF'| = a + \frac{c}{a}x = e \left[x - \left(-\frac{a}{e} \right) \right], \end{cases}$$

onde

$$e = \frac{c}{a}$$

é a excentricidade definida anteriormente.

As quantidades entre colchetes na penúltima e na antepenúltima equações são as distâncias $|PD|$ e $|PD'|$ do ponto P às retas

$$x = \frac{a}{e} \text{ e } x = -\frac{a}{e},$$

respectivamente. Vide Figura 11, abaixo.

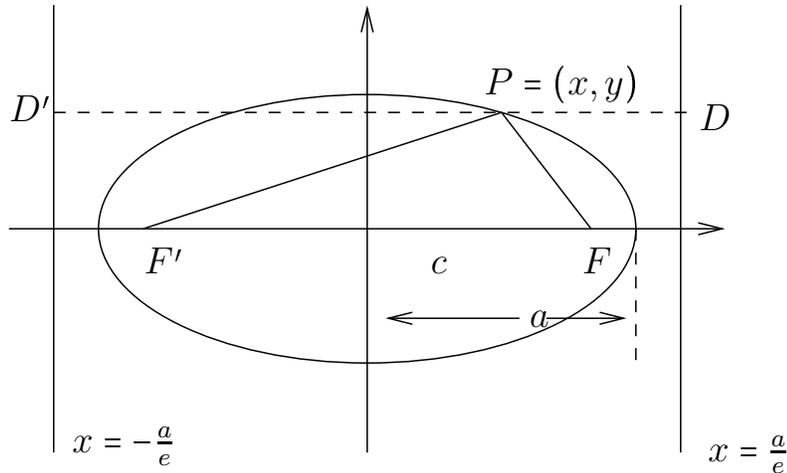


Figura 1.11: Posições - elipse

Logo, tais fórmulas podem ser escritas na forma

$$(E6) \quad \frac{|PF|}{|PD|} = e \quad \text{e} \quad \frac{|PF'|}{|PD'|} = e.$$

As retas

$$x = \frac{a}{e} \text{ e } x = -\frac{a}{e}$$

chamam-se diretrizes da elipse, sendo que basta uma das equações de (E6) para descrever toda a elipse.

Observações.

- Supondo o centro a origem e os focos pertencentes ao eixo y , os papéis de x e y estarão trocados.
- Tendo grau dois a equação de uma elipse, sua intersecção com uma reta têm no máximo dois pontos.

Propriedade de Reflexão das Elipses - Prova Geométrica.

Por um ponto da elipse existe uma única reta intersectando-a apenas neste ponto, chamada tangente no ponto.

Teorema 1.2 *Sejam C uma elipse com focos F e F' , um ponto P em C , e T a reta tangente em P . Então, os raios focais \overrightarrow{PF} e $\overrightarrow{PF'}$ formam ângulos iguais com T (vide Figura 12).*

Prova.

Aplicamos o Argumento de Heron para o Princípio da Reflexão.

Dado $Q \in T$, com $Q \neq P$, temos que Q não pertence ao interior da elipse, senão T seria secante.

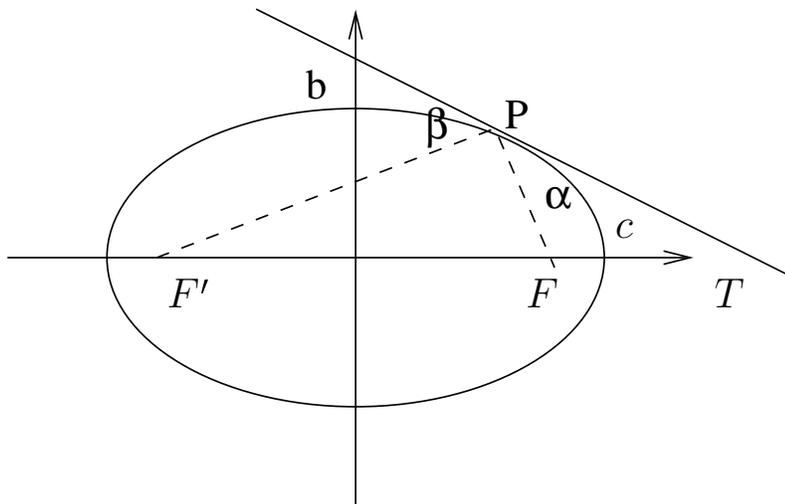


Figura 1.12: Propriedade de Reflexão (por Heron)- Elipse

Seja Q' a intersecção de FQ e C . É óbvio que FQF' (vide Figura) é mais longo que $FQ'F'$, o qual tem mesmo comprimento que FPF' .

Logo, FPF' é o mais curto caminho entre os focos, por T .

Assim, pelo Princípio da Reflexão, os ângulos entre T e os raios focais são iguais ♣

Aplicações.

- (1) Imaginemos uma sala com paredes e teto formando um semi-elipsóide de revolução, focos à altura razoável. Um sussurro emitido num foco é audível no outro, mesmo inaudível noutros pontos, pois as ondas sonoras são refletidas ao outro foco simultaneamente, percorrendo igual distância à velocidade do som. São as “galerias de sussurros”, encontradas, nos EUA, em museus de Ciência e no edifício do Capitólio e, também, em alguns castelos europeus.
- (2) As lanternas odontológicas (figura abaixo) usam refletores elípticos para focar a luz em um ponto específico da arcada dentária do paciente.

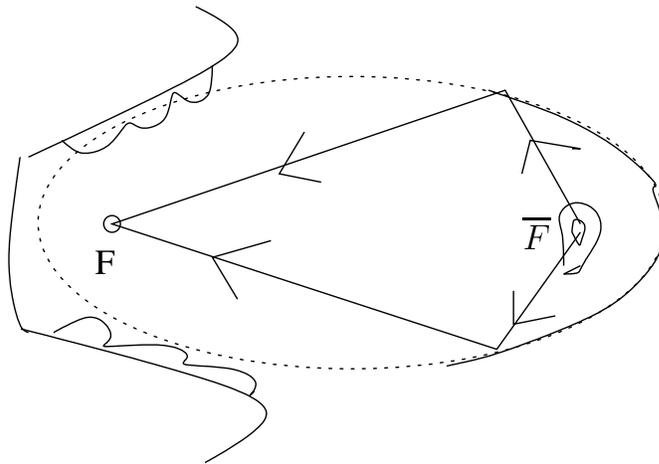


Figura 1.13: Lanterna Odontológica - Refletor Elíptico

- (3) Litotripsia é um tratamento para destruir pedras nos rins, via um refletor elíptico, sem danos ao tecido vizinho, com um emissor de ondas sonoras de alta intensidade num foco e a pedra no outro. Evita-se a cirurgia, com recuperação em poucos dias.

1.4 Hipérboles

Definição. *Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos P cuja diferença de suas distâncias a dois pontos fixos F e F' , os focos, é uma constante. Denotemo-la por $2a$, com $a > 0$. Obviamente, há duas formas de calcularmos a diferença das distâncias. Adotemos uma convenção. O ramo direito é o lugar geométrico dos pontos P tais que*

$$|PF'| - |PF| = 2a$$

e o ramo esquerdo é o dos pontos P tais que

$$|PF| - |PF'| = 2a.$$

A condição que define a hipérbole completa é dada pela equação

$$(H1) \quad |PF'| - |PF| = \pm 2a.$$

Atenção. Pela desigualdade triangular temos que dado um ponto P , que não seja um dos focos, então temos

$$|PF| < |PF'| + |F'F|.$$

Logo, $|PF| - |PF'| < |F'F|$ e, analogamente, $|PF'| - |PF| < |F'F|$.

Assim, encontramos a desigualdade

$$| |PF'| - |PF| | \leq |F'F|, \text{ para todo } P.$$

Logo, tal diferença é sempre menor ou igual à distância entre os focos. Obtemos então a seguinte condição para a existência da hipérbole:

$$2a < |F'F|.$$

Suponhamos o eixo x ao longo do segmento $F'F$ e o eixo y mediatriz desse segmento. Se $|F'F| = 2c$ então temos (vide figura 1.14, a seguir)

$$F' = (-c, 0) \text{ e } F = (c, 0).$$

Então, a equação (H1) torna-se

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

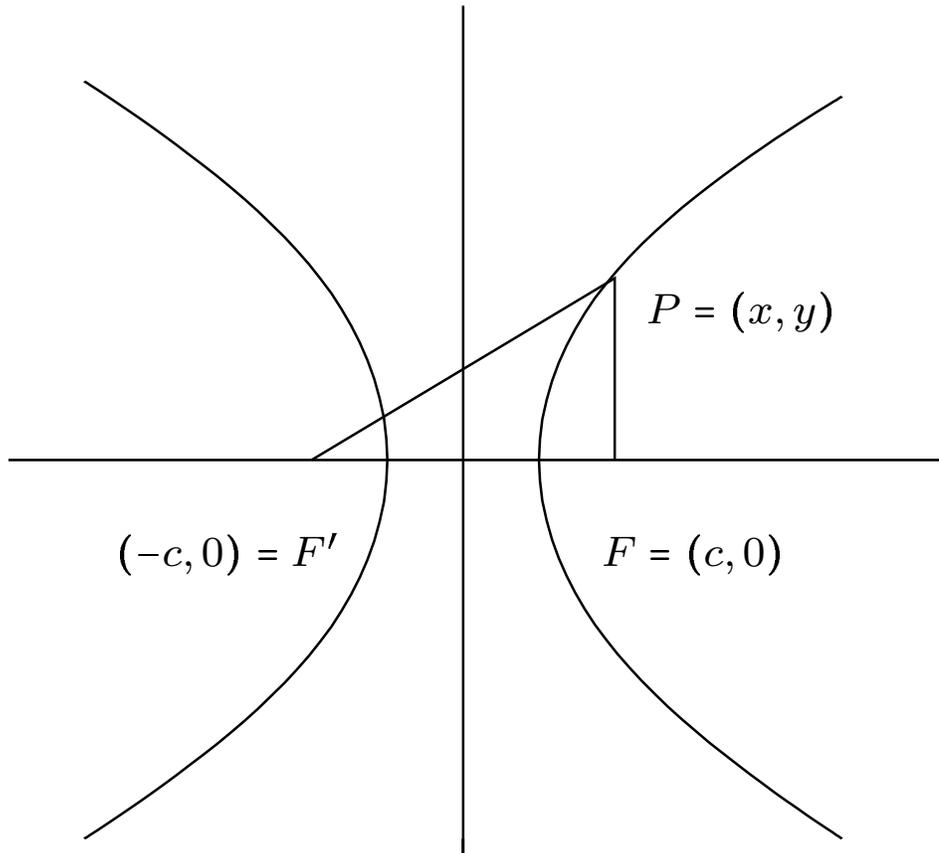


Figura 1.14: Hipérbole-Focos

Passando o segundo radical para o segundo membro e elevando ao quadrado obtemos

$$(x+c)^2 + y^2 = [\pm 2a + |PF|]^2 = 4a^2 \pm 4a|PF| + (x-c)^2 + y^2,$$

donde segue

$$4cx = 4a^2 \pm 4a|PF|.$$

Assim, as fórmulas dos raios focais são dadas pelas equações

$$(H2) \quad |PF| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm \left(\frac{c}{a}x - a \right) \quad \text{e}$$

$$(H3) \quad |PF'| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm \left(\frac{c}{a}x + a \right),$$

onde (H3) é obtida de (H2), visto que $|PF'| = |PF| \pm 2a$. Procurando manter uma notação, salientamos que, assim como em (H1), o sinal positivo corresponde ao ramo direito da curva e o negativo ao esquerdo. O quadrado destas equações fornece uma mesma equação:

$$x^2 \mp 2cx + c^2 + y^2 = \frac{c^2}{a^2}x^2 \mp 2cx + a^2.$$

Chegamos assim à equação

$$\left(\frac{c^2 - a^2}{a^2} \right) x^2 - y^2 = c^2 - a^2$$

ou

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1.$$

Para simplificarmos tal equação, observemos que no triângulo $\triangle PFF'$, com P no ramo direito, temos $|PF'| < |PF| + |FF'|$, pois um lado do triângulo é menor que a soma dos outros dois.

Portanto, temos $|PF'| - |PF| < |FF'|$ ou $2a < 2c$, e assim $a < c$ e $c^2 - a^2$ é um número positivo que denotaremos por b^2 . Escrevamos

$$(H4) \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

Substituindo esta equação na equação anterior obtemos a forma reduzida da equação da hipérbole,

$$(H5) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

A seguir, justificaremos o desenho que segue para a hipérbole apresentada pela equação (H5).

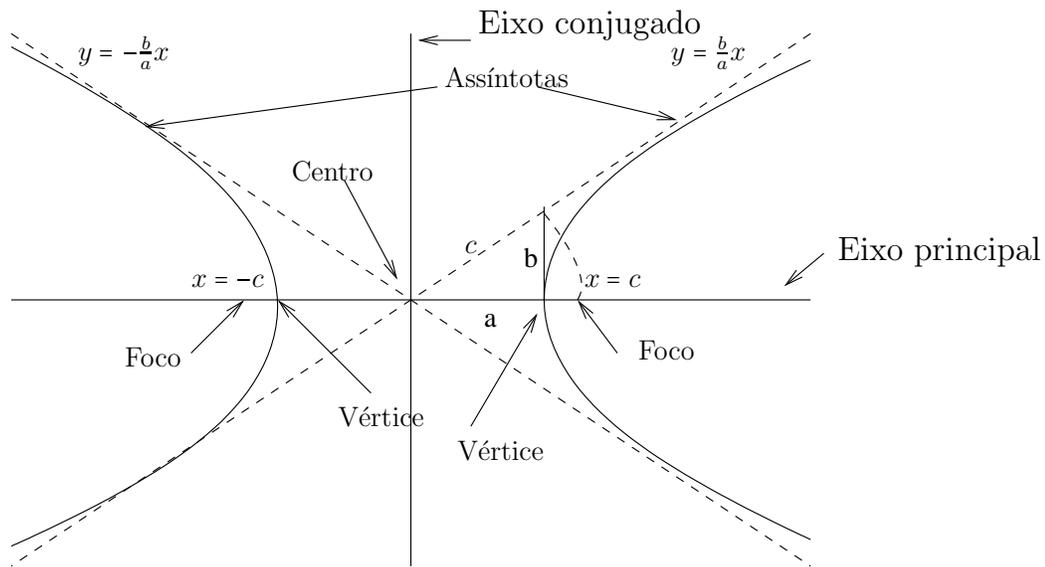


Figura 1.15: Hipérbole - Assíntotas

Como a equação contém apenas potências pares de x e y , a hipérbole é simétrica em relação aos eixos coordenados, chamados eixos da curva, sendo a interseção destes o centro da hipérbole.

Quando $y = 0$, temos $x = \pm a$. Porém, quando $x = 0$ então y é imaginário. Logo, o eixo que passa pelos focos, dito eixo principal, intersecta a curva em dois pontos denominados vértices, localizados a uma distância a de cada lado do centro. Entretanto, o outro eixo não intersecta a curva (não estamos admitindo a solução y complexa) e é então chamado eixo conjugado.

A hipérbole é formada por duas partes simétricas, chamadas ramos, em relação ao eixo y .

Pela equação (H5), os pontos mais próximos ao eixo conjugado \vec{Oy} , correspondentes ao menor valor para $|x|$, são os vértices

$$(-a, 0) \text{ e } (a, 0).$$

Estes fatos são também identificáveis a partir da equação (H5) resolvendo-a para y . Obtemos então

$$(H6) \quad y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \text{ com } x \leq -a \text{ ou } x \geq a.$$

Esta fórmula mostra que não há pontos do gráfico na faixa vertical $-a < x < a$, pois para tais x a expressão sob o radical é negativa. Para $x = \pm a$, temos $y = 0$ e esses dois pontos $[(-a, 0)$ e $(a, 0)]$ são os vértices. Quando x cresce a partir de a ou decresce a partir de $-a$, obtemos dois possíveis valores de sinais opostos (em cada caso), para y , crescentes em valor absoluto, à medida que x tende a $+\infty$ ou x tende a $-\infty$. Tal comportamento produz os braços superior e inferior nos ramos da curva.

Um aspecto bastante significativo do gráfico pode ser observado escrevendo (H6) na forma

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

Quando x tende a $\pm\infty$, a expressão sob o radical é próxima de 1, sendo razoável supor que a hipérbole está próxima do par de retas

$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

Devido as simetrias basta analisarmos tal idéia no primeiro quadrante. Neste caso é fácil ver que a reta está acima do ramo da hipérbole, e também que a distância vertical da hipérbole à reta correspondente é

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} &= \frac{b}{a} (x - \sqrt{x^2 - a^2}) \\ &= \frac{b}{a} \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \\ &= \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \end{aligned}$$

a qual tende a zero quando $x \rightarrow +\infty$. As retas acima mencionadas são chamadas assíntotas da hipérbole.

O triângulo mostrado no primeiro quadrante na Figura 1.15 é um mnemônico para lembrar os principais aspectos geométricos de uma hipérbole.

De fato, sua base a é a distância do centro ao vértice à direita, a altura b é o segmento vertical que une esse vértice à assíntota do primeiro quadrante, cujo coeficiente angular é

$$\frac{b}{a}$$

e, como por (H4) temos

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

a hipotenusa c desse triângulo é também a distância do centro a um foco.

A razão

$$\frac{c}{a}$$

é definida como a excentricidade da hipérbole e é denotada por e .

Assim,

$$\begin{aligned} e &= \frac{c}{a} \\ &= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}. \end{aligned}$$

É óbvio que

$$e > 1.$$

Quando e é próximo de 1, então b é pequeno em relação a a , a hipérbole se localiza em um ângulo pequeno formado pelas assíntotas e a curva é bem fechada nos vértices. Vide figura 1.16 abaixo.

Quando e é grande, então b é grande quando comparado com a , o ângulo entre as assíntotas é grande e a hipérbole é bastante achatada no vértices. Vide figura 1.16 abaixo.

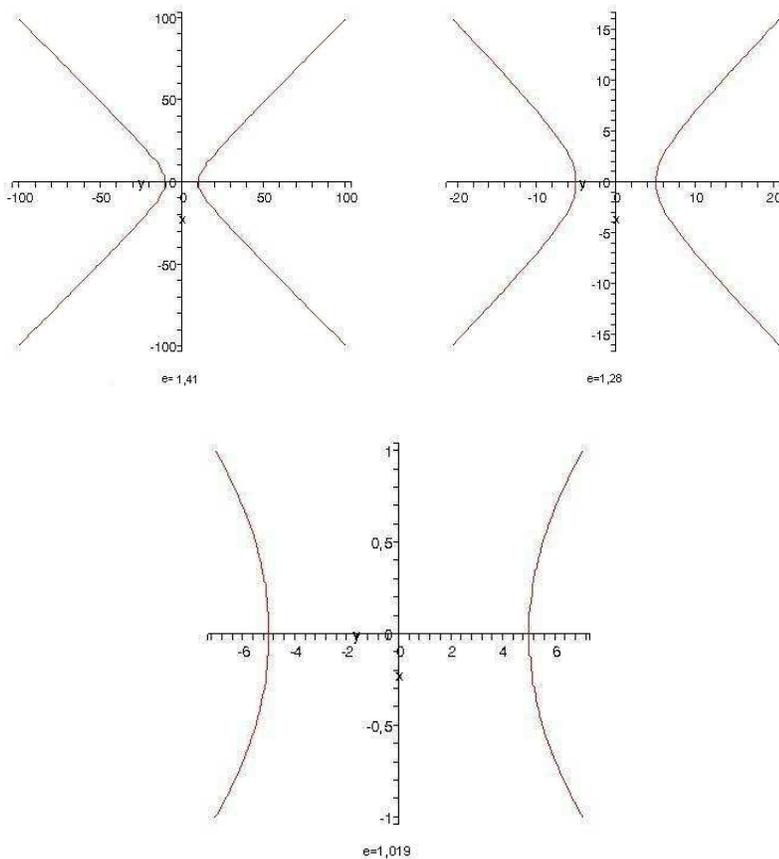


Figura 1.16: Hipérboles - Excentricidades

As fórmulas (H2) e (H3) dos raios focais direito e esquerdo PF e PF' podem ser escritas como

$$\begin{cases} |PF| &= \pm (ex - a) = \pm e \left[x - \frac{a}{e} \right] \\ e \\ |PF'| &= \pm (ex + a) = \pm e \left[x - \left(-\frac{a}{e} \right) \right], \end{cases}$$

com os sinais positivos referindo-se ao ramo direito e os sinais negativos ao esquerdo. Se P está no ramo direito (Figura 1.15) as quantidades entre colchetes são as distâncias $|PD|$ e $|PD'|$ de P às retas,

denominadas diretrizes,

$$x = \frac{a}{e} \text{ e } x = -\frac{a}{e},$$

respectivamente. Analogamente, se P estiver no ramo esquerdo. Em qualquer caso, ambas podem ser escritas na forma

$$\frac{|PF|}{|PD|} = e \quad , \quad \frac{|PF'|}{|PD'|} = e .$$

Uma hipérbole pode então ser caracterizada como a trajetória de um ponto que se move de modo a manter constante $e > 1$ a razão entre sua distância a um ponto fixo (foco) e sua distância a uma reta fixa (diretriz). Como no caso das elipses, é suficiente uma das equações acima para descrever toda a hipérbole.

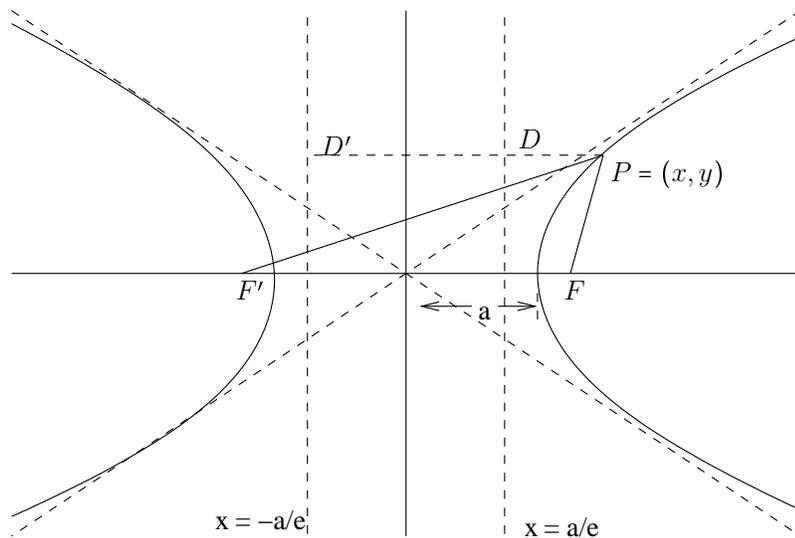


Figura 1.17: Hipérbole - Diretrizes

Observação. Invertendo as variáveis x e y em (H5), vemos que a equação

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

representa uma hipérbole com eixo principal vertical, vértices $(0, \pm a)$ e focos $(0, \pm c)$, onde temos, como no caso anterior,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Porém, no presente caso, as assíntotas são as retas

$$y = \pm \frac{a}{b}x$$

como vemos facilmente ao resolvermos para y os dois ramos desta hipérbole:

$$y = \pm \frac{a}{b}x \sqrt{1 + \frac{b^2}{x^2}}.$$

O eixo contendo os focos não é estabelecido pela proporção entre a e b , como com uma elipse, mas sim por sabermos qual termo é subtraído de qual, na forma reduzida da equação. Os números a e b podem, então, ser de quaisquer tamanho relativos. Se $a = b$ as assíntotas são perpendiculares entre si (bissetrizes principal e secundária) e a hipérbole se diz equilátera.

Observação. Uma reta intersecta uma hipérbole, C , em no máximo dois pontos e, em tal caso, a chamamos secante. Se $P \in C$, existem apenas três retas intersectando-a unicamente em P . Duas são paralelas a uma das assíntotas, e cruzam-na, e a terceira é a tangente (Figura 1.18).

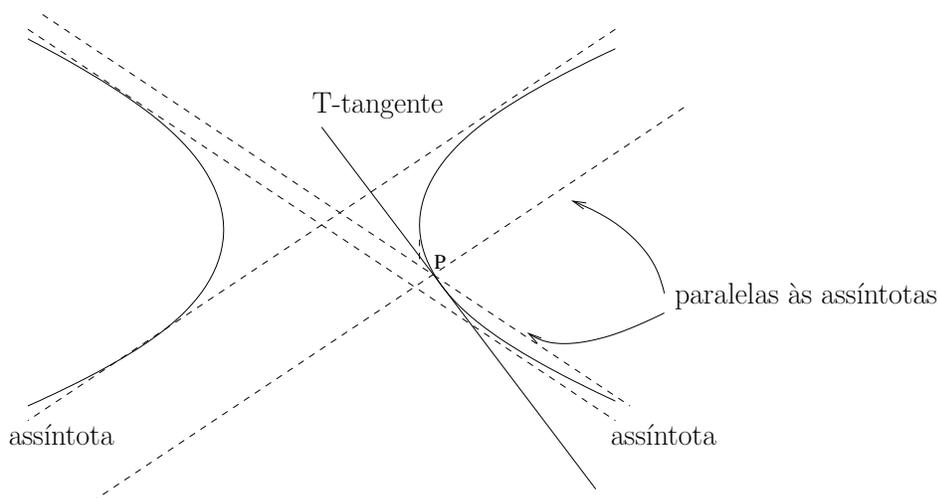


Figura 1.18: Hipérbole - Tangente e Paralelas às Assíntotas

A figura abaixo destaca o *retângulo fundamental* para hipérboles, considerando a hipérbole

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

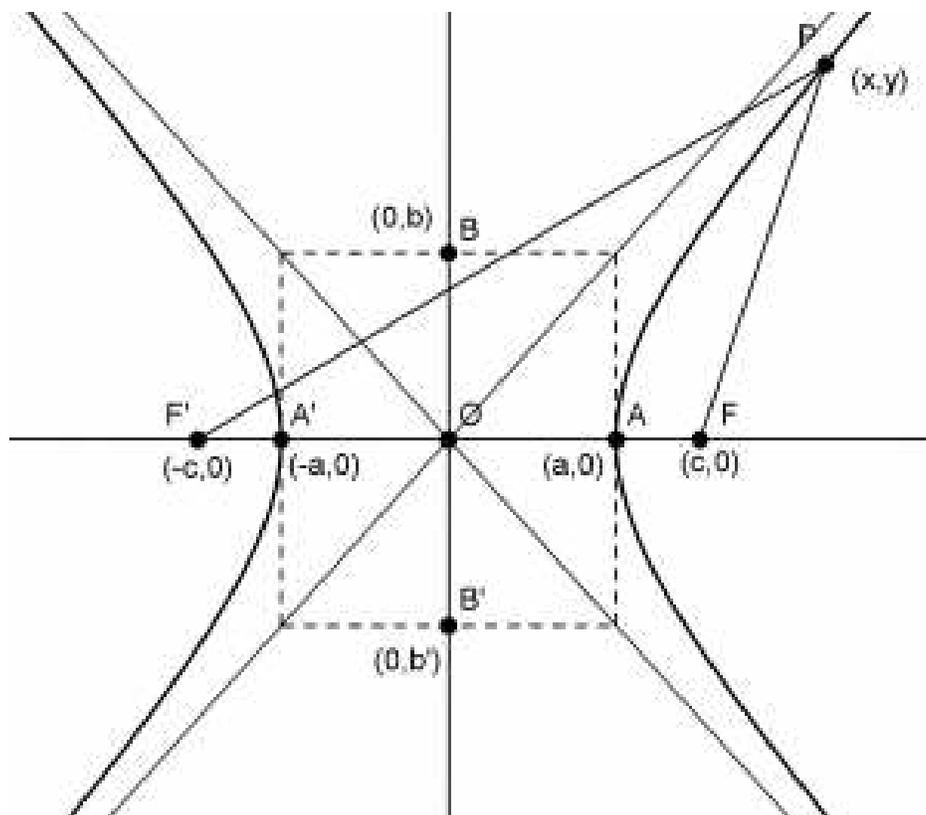


Figura 1.19: Retângulo fundamental e assíntotas para $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Propriedade de Reflexão das Hipérboles - Prova Geométrica

Seja C uma hipérbole, no plano, com focos F_1 e F_2 , satisfazendo

$$||PF_1| - |PF_2|| = d, \text{ para todo ponto } P \in C,$$

com d uma constante real tal que $d < |F_1F_2|$.

Teorema 1.3 *Dada uma hipérbole C com focos F_1 e F_2 e contendo o ponto P , a bissetriz, T , do ângulo determinado pelos raios focais $\overrightarrow{PF_1}$ e $\overrightarrow{PF_2}$ é tangente à hipérbole.*

Prova.

Se A pertence a T , $A \neq P$, segue que $\angle APF_1 \cong \angle APF_2$ e, considerando $E \in PF_1$ tal que $|PE| = |PF_2|$ temos a identidade $|EF_1| = |PF_1| - |PF_2|$ e então

$$|EF_1| = d.$$

Como T bissecta $\angle F_1PF_2$ segue que T é perpendicular a EF_2 ,

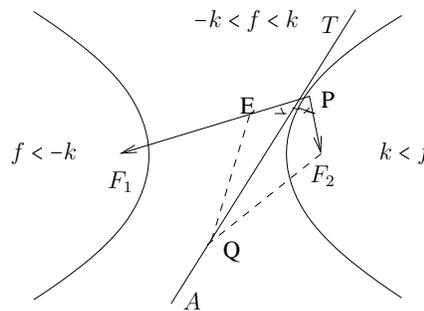


Figura 1.20: Hipérbole - Prova da Propriedade de Reflexão

base do triângulo isósceles $\triangle EPF_2$. Portanto, se $Q \in T$, $Q \neq P$, temos que $\triangle EQF_2$ é também isósceles e, em particular (vide Figura 1.20).

$$|QE| = |QF_2|.$$

Sendo os pontos Q , E e F_1 não alinhados, é óbvio que valem

$$|QE| < |QF_1| + |EF_1| \quad \text{e} \quad |QF_1| < |QE| + |EF_1|.$$

Assim segue $|QE| - |EF_1| < |QF_1| < |QE| + |EF_1|$.

Subtraindo $|QE|$ nestas desigualdades obtemos as desigualdades $-|EF_1| < |QF_1| - |QE| < |EF_1|$ e então

$$| |QF_1| - |QE| | < |EF_1|.$$

Porém temos $|QE| = |QF_2|$ e, como já mostramos, $|EF| = d$. Logo,

$$(1) \quad |QF_1| - |QF_2| < d, \quad \forall Q \neq P, Q \in T.$$

Logo, T intersecta C apenas em P . Para concluirmos que T é tangente resta mostrarmos que ela não é paralela a nenhuma assíntota. Assim, basta provarmos que T não cruza a hipérbole.

A hipérbole divide o plano em três regiões: uma contém o foco F_1 , outra o foco F_2 e uma terceira, chamada média (considerada contendo C) e situada entre os dois ramos.

Definamos uma função f , no plano, por

$$f(Q) = |QF_1| - |QF_2|.$$

É claro que $f = -d$ sobre o ramo esquerdo e $f = +d$ sobre o ramo direito.

Mostremos que $f < -d$ na região contendo F_1 . Se X pertence a tal região, então XF_2 intersecta o ramo contendo F_1 em um ponto X' (vide Figura 20, acima). Temos então as identidades

$$\begin{aligned} (2) \quad f(X) &= |XF_1| - |XF_2| \\ &= |XF_1| - (|XX'| + |X'F_2|) \\ &= (|F_1X| - |XX'|) - |X'F_2|. \end{aligned}$$

Mas, pela desigualdade triangular temos $|F_1X| < |F_1X'| + |X'X|$, e portanto $|F_1X| - |XX'| < |F_1X'|$. Substituindo esta última inequação em (2) obtemos

$$f(X) < |F_1X'| - |X'F_2| = -d.$$

Analogamente, $f > +d$ na região que contém o foco F_2 . Pois dado X nessa região, o segmento XF_1 intersecta o ramo que contém F_2 em um ponto que denotaremos por X'' . Então segue

$$\begin{aligned} f(X) &= |XF_1| - |XF_2| \\ &= |XX''| + |X''F_1| - |XF_2|. \end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular temos $|XF_2| - |XX''| < |X''F_2|$, e portanto $|XX''| - |XF_2| > -|X''F_2|$. Logo, substituindo,

$$\begin{aligned} f(X) &= |XF_1| - |XF_2| \\ &> |X''F_1| - |X''F_2| \\ &= d. \end{aligned}$$

A demonstração se conclui aqui pois f sobre a reta T , por (1), é tal que temos

$$|f(X)| \leq d, \text{ para todo } X \in T.$$

Logo, a reta T não tem pontos nas regiões delimitadas pelos ramos e portanto não cruza a hipérbole. Consequentemente, T não é paralela às assíntotas e é inevitavelmente a reta tangente♣

Adendo. Provemos que dado X na região entre os ramos temos

$$-d < f(X) < +d.$$

Para um tal X , seja X_1 a intersecção do segmento XF_1 com o ramo à esquerda na figura. Então segue

$$\begin{aligned} f(X) &= |XF_1| - |XF_2| \\ &= |XX_1| + |X_1F_1| - |XF_2| \\ &= |XX_1| + |X_1F_1| - |X_1F_2| + |X_1F_2| - |XF_2|, \end{aligned}$$

e também $|X_1F_1| - |X_1F_2| = -d$ e ainda, pela desigualdade triangular,

$$|XX_1| + |X_1F_2| - |XF_2| > 0.$$

Logo, obtemos

$$f(X) > -d.$$

Consideremos agora X_2 o ponto intersecção do segmento XF_2 com o ramo à direita. Então temos

$$\begin{aligned} |XF_1| - |XF_2| &= |XF_1| - |XX_2| - |X_2F_2| \\ &= |XF_1| - |XX_2| - |X_2F_1| + |X_2F_1| - |X_2F_2|, \end{aligned}$$

e, ainda, $|X_2F_1| - |X_2F_2| = +d$ e, ainda mais, pela desigualdade triangular segue

$$|XF_1| - |XX_2| - |X_2F_1| < 0.$$

Logo, obtemos

$$f(X) < +d \clubsuit$$

Observação 1. Se a hipérbole for rotacionada em torno de seu eixo principal e os lados convexos de cada parte forem prateados, tornando-se refletores, então o raio de luz que se aproxima de um lado convexo por uma trajetória pelo foco (Figura 1.21) é refletido em direção ao outro foco.

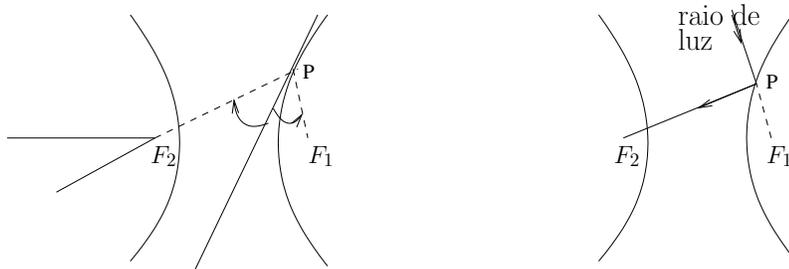


Figura 1.21: Hipérbole - Propriedade de Reflexão

Observação 2. Em telescópios refletores tipo Cassegrain, os focos do espelho hiperbólico estão um no foco e o outro no vértice de um espelho parabólico, onde uma ocular ou câmera localiza-se. Raios paralelos débeis de luz estelar são refletidos pelo parabólico em direção ao seu foco, depois são interceptados pelo hiperbólico e refletidos de volta, em direção à ocular ou câmera.

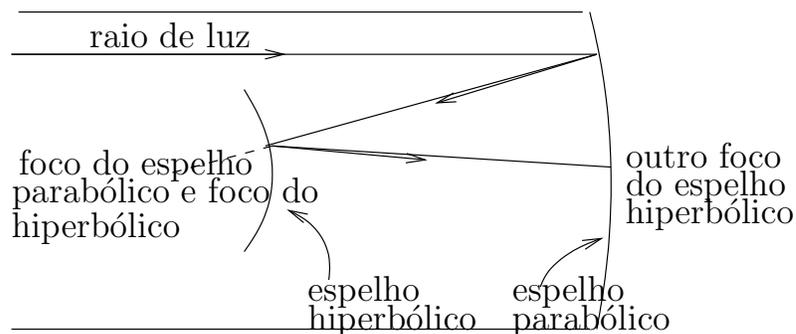


Figura 1.22: Projeto do telescópio de Cassegrain

Observação 3. Há duas espécies de cometas. Alguns, membros permanentes do sistema solar, como o cometa Halley, viajam ao redor do Sol em órbitas elípticas com o Sol num dos focos. Outros têm órbitas hiperbólicas com o Sol num foco, entram no sistema solar com velocidades altas vindos do espaço exterior, volteiam o Sol, e retornam ao espaço. O fator crucial é a energia total E do cometa, que é a soma da energia cinética com a energia potencial (devida à atração gravitacional do Sol). Verifica-se que a órbita é uma elipse, se $E < 0$, e uma hipérbole se $E > 0$. O caso $E = 0$ corresponde a uma órbita parabólica, que é considerada improvável.

Navegação. No Sistema Loran (Long Range Navigation), duas estações de rádio, em A e B , emitem sinais simultaneamente a um navio ou avião, em P , e o computador de bordo estima a diferença de tempo na recepção transformando-a em diferença de distâncias: $|PA| - |PB| = c\Delta t$, c a velocidade da luz. Assim o/a navegador determina uma equação de hipérbole e em qual ramo ele está. Sabendo as coordenadas de uma delas ele determina sua posição. Uma outra possibilidade é receber sinais de três fontes e determinar a intersecção de três hipérboles.

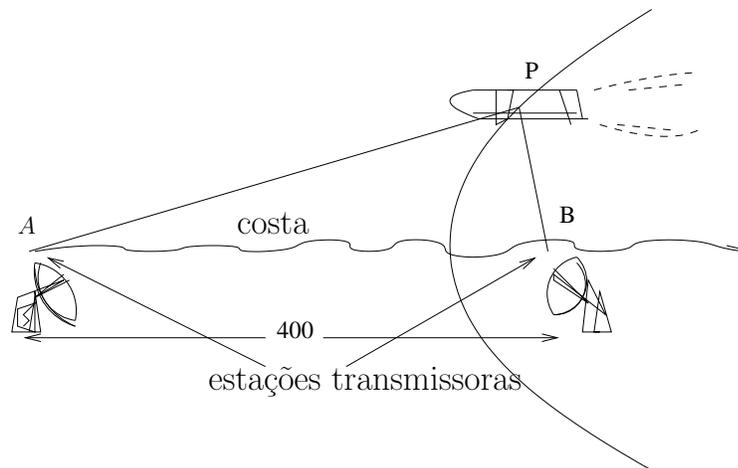


Figura 1.23: Sistema Loran de Navegação - Hipérboles

Desenhando Uma Hipérbole. Sejam F_1 e F_2 dois pontos em uma folha de papel, sobre uma prancha de desenho, cuja distância recíproca é $2c$. Tome um pedaço de fio e amarre nele um nó K de modo que a diferença entre o comprimento das duas partes em que K divide o fio seja $2a$, onde

$$0 < a < c.$$

Amarre as extremidades do fio em duas tachinhas colocadas em F_1 e F_2 e enrole o fio ao redor da ponta de um lápis.

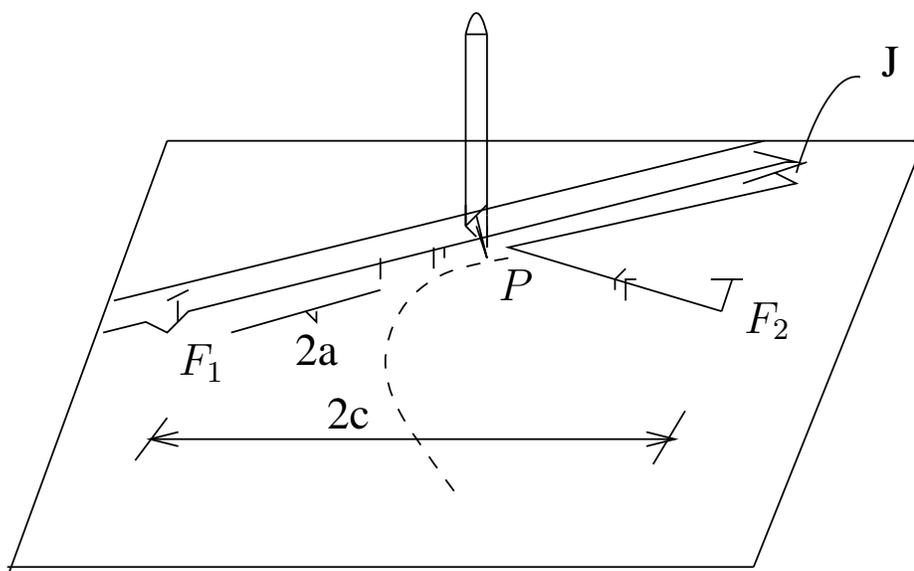


Figura 1.24: Desenhando uma Hipérbole

Mantendo o fio tenso e puxando o nó K cuidadosamente, o lápis em P desenha um ramo de hipérbole (verifique).

1.5 Coordenadas Polares de uma Cônica

As coordenadas polares são excelentes para descrevermos cônicas no plano, pois a equação é simples e tem a mesma forma para elas, exceto a circunferência.

Consideremos uma cônica com excentricidade e , com $e > 0$, reta diretriz $x = -p$, com $p > 0$, e foco na origem (Figura 1.25).

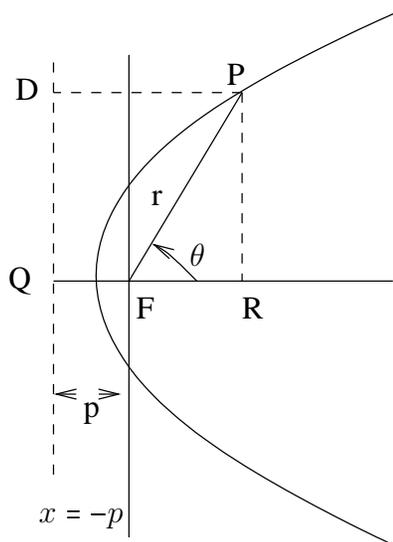


Figura 1.25: coordenadas polares de uma cônica

Equação Polar de uma Cônica que não a Circunferência

Com a notação apresentada na figura, a equação foco-diretriz-excentricidade de uma cônica, que não a circunferência, é

$$\frac{|PF|}{|PD|} = e, \text{ onde } 0 < e < 1.$$

A curva é uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole conforme temos $0 < e < 1$, $e = 1$ ou $e > 1$.

Utilizando coordenadas polares vemos que $|PF| = r$ e

$$|PD| = |QR| = |QF| + |FR| = p + r \cos \theta.$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Donde segue a equação

$$r = |PF| = e|PD| = e(p + r \cos \theta).$$

Resolvendo tal equação para r concluímos que

$$(1) \quad r = \frac{ep}{1 - e \cos \theta}$$

é a equação polar da cônica, sendo ela uma

parábola se $e = 1$, elipse se $e < 1$ e uma hipérbole se $e > 1$.

Caso a reta diretriz esteja à direita da origem, temos $x = p$, com $p > 0$ (vide Figura 1.26), e então as identidades

$$|PD| = p - r \cos \theta \quad , \quad |PF| = e|PD|$$

e

$$r = e(p - r \cos \theta).$$

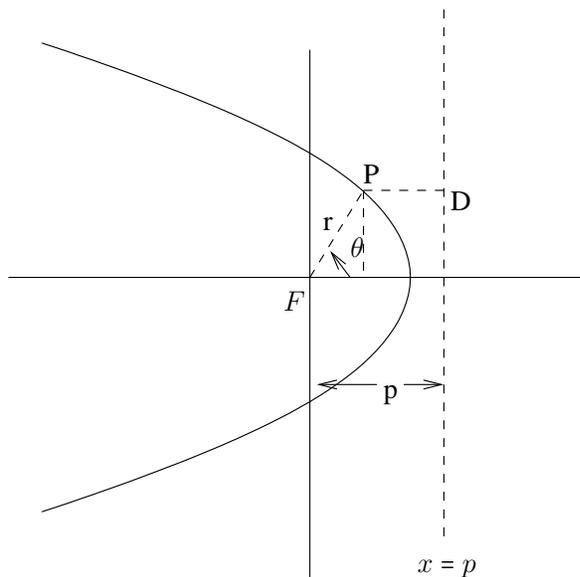


Figura 1.26: Diretriz à direita

Assim, resolvendo em r obtemos

$$r = \frac{ep}{1 + e \cos \theta}.$$

Equação Polar de uma Elipse. No caso de uma elipse ($e < 1$) é também útil (em astronomia, por exemplo) expressarmos a posição, r , em termos da excentricidade e do semi-eixo maior a .

Por (1) temos que

$$ep = r - er \cos \theta$$

e então,

$$r = e(p + r \cos \theta).$$

Passando às coordenadas cartesianas obtemos

$$x^2 + y^2 = e^2(p + x)^2 = e^2(p^2 + 2px + x^2).$$

Donde segue

$$(1 - e^2)x^2 - 2e^2px + y^2 = e^2p^2.$$

Agora, dividindo por $1 - e^2$ (pois a curva não é uma parábola) e completando quadrados temos

$$\left(x - \frac{pe^2}{1 - e^2}\right)^2 - \frac{e^4p^2}{(1 - e^2)^2} + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2p^2}{1 - e^2},$$

e assim, denotando

$$x_0 = \frac{pe^2}{1 - e^2},$$

chegamos a

$$(x - x_0)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \frac{e^2p^2}{1 - e^2} \left(1 + \frac{e^2}{1 - e^2}\right) = \frac{e^2p^2}{(1 - e^2)^2},$$

a qual escrevemos em sua forma padrão,

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \text{ com } a = \frac{ep}{(1 - e^2)}.$$

Substituindo $ep = a(1 - e^2)$ em (1) concluímos que (observemos que, abaixo, no caso $e = 0$ temos uma circunferência).

$$(2) \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta} \spadesuit$$

1.6 Construções Geométricas - π no Antigo Egito - A Duplicação do Cubo

Apresentação. Na introdução mencionamos que já no século VI a.C. os gregos haviam acordado que a resolução de um problema geométrico só é válida se obtida através de, e apenas, régua não graduada e compasso. A idéia subjacente sendo a busca da solução exata.

Por exemplo, vários povos da antiguidade obtiveram aproximações muito boas para π , via geometria. Os egípcios talvez pensassem que

$$\pi \text{ fosse } 4 \left(\frac{8}{9} \right)^2,$$

que é aproximadamente 3,1604936. Mas, podemos indagar se eles sabiam ser não exato tal valor. Por enquanto, não há resposta.

Um alerta é necessário. Ao citarmos o Antigo Egito podemos estar retomando uma época anterior em muito mais que meio milênio em relação à Grécia ainda mitica, por exemplo, quando da Guerra de Tróia (c. 1200 a.C.), tema de *Ilíada*, e mais que um milênio anterior à *Idade Áurea*, século V a.C. O famoso papiro Ahmes (com 5m), o nome devido ao escriba, com tais e outros cálculos, comprado em 1858 à beira do Nilo, data de 1650 a.C. quando já houvera um Egito ainda mais antigo, com realizações de engenharia admiráveis, sendo que à época de sua escrita a pirâmide de Queóps (c. 2.600 a.C.) já tinha mil anos.

A concepção grega de solução geométrica era um avanço, senão prático, tendo em vista a engenharia egípcia, ao menos teórico. Era ainda um novo paradigma, que culmina na análise dos “Construtíveis”, via Teoria de Galois (E. Galois, 1811-1832), com a qual se prova que os três problemas clássicos da antiguidade grega: duplicação do cubo, quadratura do círculo e triseção do ângulo são inexequíveis, com régua e compasso. Mais ainda, não há fórmula, por radicais, para as soluções das equações polinomiais de grau maior ou igual a cinco.

Ilustremos com um caso trivial. Suponhamos que dado um quadrado Q desejamos construir um quadrado cuja área seja o dobro da área de Q . Por “dado um quadrado” deve-se entender que ele se encontra no plano euclidiano, sem coordenadas, sendo o desenho apenas uma representação. Traçamos então a diagonal de Q , levantamos as perpendiculares pelos extremos da diagonal, marcamos a altura e riscamos a quarta aresta do quadrado Q_1 . Pelo Teorema de Pitágoras a área de Q_1 é o dobro da área de Q (vide figura abaixo).

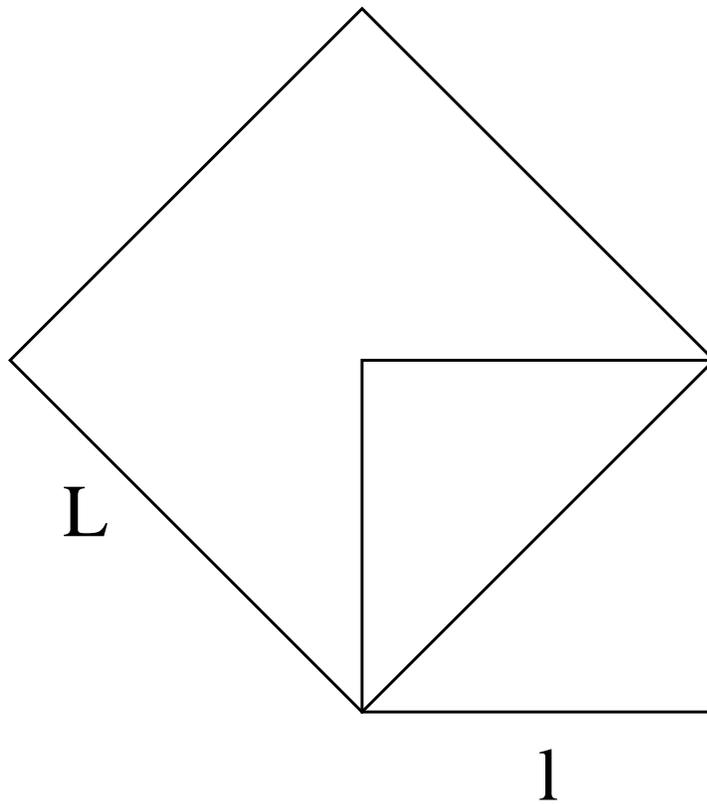


Figura 1.27: Duplicação do Quadrado

Como outros exemplos simples temos que utilizando cordas em uma circunferência podemos, convencionando a unidade, efetuar o “produto de duas quantidades” a e b (vide Figura 1.28).

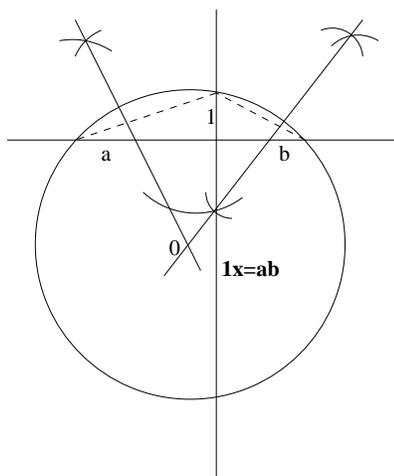


Figura 1.28: O Produto por régua e compasso

Também podemos extrair a raiz quadrada de c (vide figura abaixo).

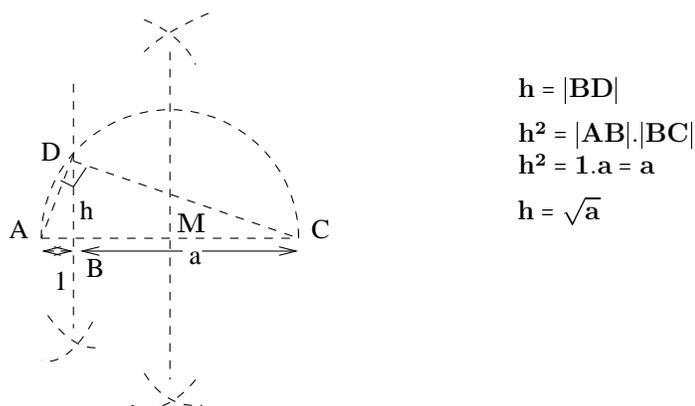


Figura 1.29: Extração de raiz quadrada

Observação. É possível resolver geometricamente equações de segundo grau, com condições óbvias.

Vejam agora com os egípcios calculavam π .

Cálculo de π - Papiro Ahmes - 1650 a.C.

Neste papiro já surgira a comparação entre áreas de círculos e quadrados, o que mostra que é natural e muito antiga a questão da quadratura do círculo. Vejamos o que foi considerado um dos maiores sucessos matemáticos dos egípcios.

Há diversos problemas no papiro Ahmes e o de número 48 é um célebre. Neste, assume-se que a área de um círculo com um diâmetro de nove unidades é igual a de um quadrado com lado oito unidades. O cálculo principia formando-se um octógono a partir de um quadrado de lado nove unidades dividindo os lados em três partes, cada uma medindo três unidades.

Em cada canto do quadrado temos um triângulo retângulo isósceles com o cateto medindo três unidades. Retirando estes quatro triângulos temos o octógono. Vide figura abaixo.

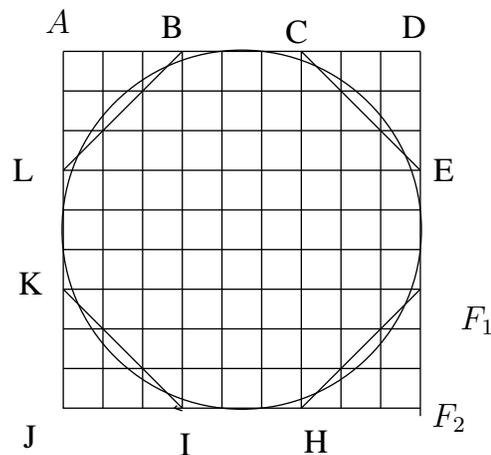


Figura 1.30: Um Cálculo Egípcio para π - Papiro Ahmes

Procurando traçar uma circunferência inscrita ao quadrado percebemos que a área do círculo inscrito é bem próxima da área do octógono, dando a impressão que em uma relação de “perde-ganha” as áreas praticamente se equivalem. Ainda, é visível que a área do octógono é menor e tal fato não deve ter lhes passado despercebido.

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Cada triângulo isósceles retirado tem área

$$\frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}.$$

Como são retirados quatro triângulos, a área retirada é de dezoito unidades de área. Consequentemente, a área do octógono é

$$81 - 18 = 63.$$

Olhando atentamente para a figura é bem razoável supormos que a área do círculo seja

$$(63 + 1) \text{ unidades de área.}$$

Assim, a regra egípcia para calcular a área de um campo circular com diâmetro de nove unidades era considerá-la igual a de um quadrado com lado de oito unidades. Teríamos então, em notação atual,

$$\pi \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 8^2 \Rightarrow \pi = 4(8/9)^2.$$

No século V a.C. Anáxagoras, um símbolo das especulações filosóficas do período, quando preso em Atenas por impiedade, ao assegurar que o Sol não era uma divindade mas uma pedra incandescente, grande como o Peloponeso, aproveitou para, segundo Plutarco, determinar a quadratura do círculo.

[Curiosidade. No Brasil, durante a ditadura militar, foi publicado em alguns jornais que o general e então presidente João Batista Figueiredo lograra tal proeza.]

Retornemos à **duplicação do cubo** ou problema deliano.

Notemos que os gregos tinham à sua disposição como ferramentas para resolver problemas geométricos somente retas e circunferências. Mesmo assim, Hipócrates de Chios conseguiu a primeira quadratura da história de uma figura curva, chamada luna, e talvez tenha proferido que sendo possível a construção de uma certa curva satisfazendo determinadas relações de proporção (vide introdução) então o problema da duplicação do cubo teria solução.

Naturalmente, construções baseadas em círculos e retas no espaço, tais como cilindros e esferas, já era comum. Surpreendentemente, porém, não perceberam que uma seção oblíqua do cilindro é uma elipse. A princípio pouco se sabia sobre o cone e não se sabia que as seções transversais de um cone produziam curvas novas e importantes. Este, por si só, foi um dos grandes méritos de Meneacmos, sendo então considerado o descobridor das parábolas, elipses e hipérbolas. O principal mérito de Meneacmos foi aplicar tal descoberta na resolução do problema deliano, provando a utilidade da parábola.

É importante destacar que Meneacmos se manteve dentro da regra estabelecida de usar apenas retas e circunferências. As intersecções de planos com o cone eram vistas como construtíveis, não com régua e compasso, mas ainda de forma elementar, pois utilizavam apenas: planos, pontos, retas e circunferências.

Duplicação do Cubo

Passemos a nos ocupar com a demonstração do célebre teorema de Meneacmos. Antes, porém, introduzamos algumas notações e terminologia.

Seja ABC o cone circular reto, simples (uma só folha), e com ângulo $\angle BAC$, em A , reto (vide Figura 1.31, a seguir e que acompanha a demonstração do Teorema de Meneacmos). Isto é, o ângulo do vértice, segundo a notação e a terminologia nestas notas, igual a 45° . As retas passando pelo vértice A e por um ponto da circunferência, na base, são chamadas de *geratrizes*.

Teorema 1.4 (Meneacmos) *Seja π um plano perpendicular à uma geratriz ao cone ABC . Então a intersecção, pode ser escrita na forma*

$$y^2 = lx,$$

com l uma constante que depende da distância do plano ao vértice A .

Prova.

Sendo AC a geratriz do enunciado e D a intersecção de π com a geratriz, seja EDG a curva intersecção entre π e o cone (vide figura abaixo). Consideremos $P \in EDG$ e π_1 um plano perpendi-

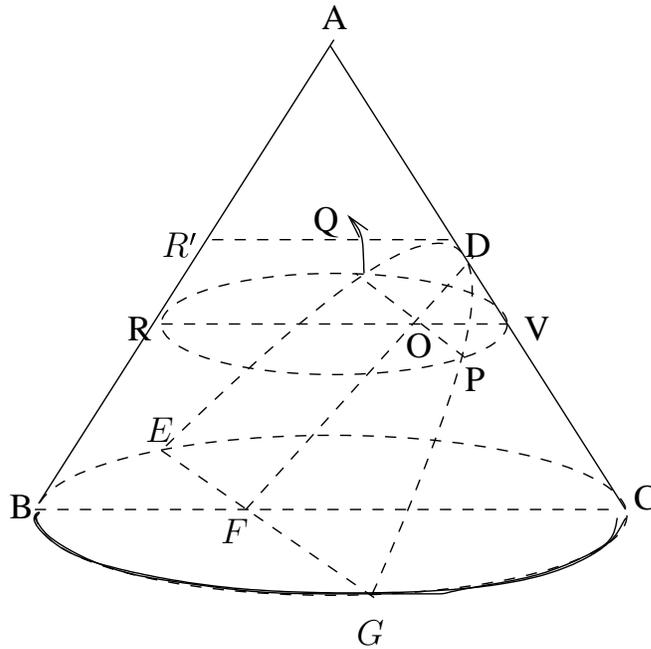


Figura 1.31: A Resolução de Meneacmos

cular ao eixo do cone (horizontal) contendo P . Seja então PVR o círculo dado pela intersecção de π_1 com o cone. Sendo a intersecção entre os planos π e π_1 uma reta é fácil ver que existe um outro ponto Q , intersecção da curva EDG com o círculo.

Das simetrias envolvidas decorre PQ é perpendicular a RV em O . Para mostrarmos tal fato, observemos que o plano π_2 que contém o eixo do cone e o ponto D , o qual corresponde ao que chamaremos de vértice, é perpendicular ao plano contendo o círculo, contém o eixo de simetria da curva EDG e contém o diâmetro, denotado por RV , do círculo PVR .

Pela propriedade de cordas, acima enunciada, temos que

$$(1) \quad |OQ| |OP| = |OR| |OV|,$$

e então, como $|OP| = |OQ|$, segue que OP é a média geométrica dos segmentos OR e OV .

Da semelhança dos triângulos $\triangle R'DA$ ($R'D$ paralelo a RV) e $\triangle ABC$ resulta

$$(2) \quad \frac{|R'D|}{|AR'|} = \frac{|BC|}{|AB|}.$$

Da semelhança dos triângulos $\triangle OVD$ e $\triangle BCA$ segue que

$$(3) \quad \frac{|OV|}{|DO|} = \frac{|BC|}{|AB|}.$$

Sejam $y = |OP|$ e $x = |OD|$ as coordenadas de P no plano π . Temos então, por (1),

$$y^2 = |OR| |OV|.$$

Assim, notando que $|OR| = |R'D|$ e utilizando (2) e (3) obtemos,

$$y^2 = |R'D| |OV| = |AR'| \frac{|BC|}{|AB|} |DO| \frac{|BC|}{|AB|},$$

e agora, como $|AR'| = |AD|$ e $x = |OD|$, concluímos que

$$(4) \quad y^2 = |AD| \frac{|BC|^2}{|AB|^2} x.$$

Sendo o triângulo retângulo $\triangle BAC$ isóceles temos ainda a identidade $|BC|^2 = 2|AB|^2$, e substituindo em (4) chegamos à equação

$$(5) \quad y^2 = 2|AD| x.$$

Finalmente, definindo $l = 2|AD|$, encerramos a demonstração ♣

Comentários. A constante l passaria a ser denominada “latus rectum” da curva e é o dobro da distância do ponto D ao vértice do cone. Provavelmente Meneacmos chegou a este teorema sem fazer uso de coordenadas pois sabe-se que na antiguidade grega não era conhecido que uma relação entre duas variáveis determinava uma curva.

Com um tal resultado, tornava-se então possível construir-se parábolas com “latus rectum” arbitrário e então, podemos movimentá-la no plano, também arbitrário, conforme nossa conveniência. Variando o latus rectum obtemos parábolas ou mais ou menos fechadas.

A Duplicação do Cubo. Suponhamos que queremos duplicar um cubo de aresta a . Determinamos então sobre um cone retângulo duas parábolas: uma com latus rectum a e a outra com latus rectum $2a$. Posicionemos as em um mesmo plano, com vértices coincidindo no mesmo ponto, a origem do sistema de coordenadas, com o eixo y sendo o eixo de simetria da primeira parábola e o eixo x o de simetria da segunda parábola, como na Figura 1.32.

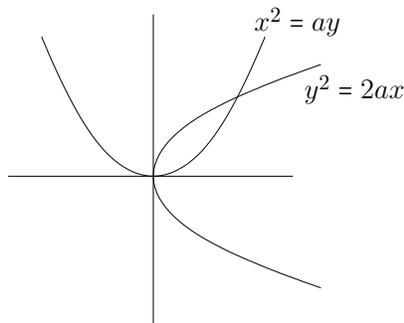


Figura 1.32: Meneacmos e a aresta do cubo duplicado

Então o ponto $P = (x, y)$ de intersecção das parábolas satisfaz as relações de proporção

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a} .$$

Isto é, $x^2 = ay$ e $y^2 = 2ax$. Donde se infere $x^4 = a^2y^2 = 2a^3x$ e se conclui

$$x = a\sqrt[3]{2} \quad , y = a\sqrt[3]{4} .$$

Portanto, a abscissa x é a aresta do cubo procurado ♣

Comentário Final (Meneacmos, Dinostráto, Hípias, Quadratura do Círculo e Trisecção do Ângulo). Se um irmão “resolveu” o clássico problema da *Duplicação do Cubo*, Dinostráto, irmão de Meneacmos, “resolveu” o clássico problema da *Quadratura do Círculo*, utilizando a curva chamada **trissectriz de Hípias**, o nome desta curva derivando do fato que Hípias a utilizou para “resolver” o também clássico problema da *Trisecção do Ângulo*.

Tal curva entrou para a história da Matemática com o nome **quadratriz**, após o feito de Dinostráto.

Era bem claro aos gregos que as soluções de Hípias e Dinostráto violavam as regras, as quais não permitiam assumir curvas que não circunferências e retas e, acresce que a trissectriz é mais uma construção mental. Tais soluções eram até mesmo consideradas, não elogiosamente, sofisticadas, ainda mais por ser Hípias um eminente sofista. [O personagem Hípias aparece no filme *Sócrates*, de Roberto Rossellini, como já citado na introdução a este texto.] Hoje em dia (e mesmo na antiguidade) a palavra ”sofista” é revestida de uma conotação pejorativa.

Meneacmos, diferentemente de Dinostráto e Hípias, utilizou retas e circunferências e não “imaginou” uma curva como Hípias. Em grande parte deve-se a tal fato a importância de sua solução.

1.7 A Propriedade de Reflexão Caracteriza as Parábolas

Consideremos um espelho curvo, no espaço, que reflita a luz a partir de uma fonte na origem paralelamente ao eixo x . A projeção do espelho no plano é uma curva APB (vide Figura 1.33) que mantém tal propriedade. O espelho seria a rotação desta curva em torno do eixo x .

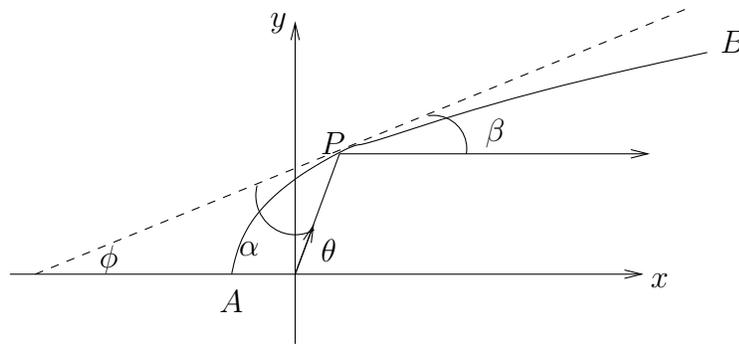


Figura 1.33: Seção do espelho

Sejam T a reta tangente à curva no ponto $P = (x, y)$, com inclinação ϕ , $O = (0, 0)$ a origem do sistema e θ o ângulo entre o segmento OP e o eixo x .

Sendo α o ângulo de incidência e β o ângulo de reflexão, temos o que segue.

1. $\alpha = \beta$, pela Lei de Reflexão.
2. $\phi = \beta$, por hipótese.
3. $y'(x) = y' = \text{tg } \phi$ pelo significado de derivada.
4. $\theta = \phi + \alpha$ e $\text{tg } \theta = \frac{y}{x}$, por geometria elementar.

Logo, encontramos $\theta = 2\beta$, $\text{tg } \beta = y'$ e

$$\frac{y}{x} = \text{tg}(\theta) = \text{tg}(2\beta) = \frac{2 \text{tg } \beta}{1 - \text{tg}^2 \beta} = \frac{2y'}{1 - (y')^2}.$$

Resolvendo esta equação do segundo grau em y' e utilizando notação infinitesimal obtemos

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y},$$

ou

$$(1) \quad xdx + ydy = \pm\sqrt{x^2 + y^2}dx.$$

Sabemos que dada qualquer função diferenciável seu diferencial é

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Portanto, $d(x^2 + y^2) = 2xdx + 2ydy$ e assim podemos reescrever (1) como

$$\pm \frac{d(x^2 + y^2)}{2\sqrt{x^2 + y^2}} = dx.$$

Porém, substituindo $z = x^2 + y^2$ no primeiro membro da equação acima temos

$$\pm \frac{dz}{2\sqrt{z}} = dx, \text{ com } z = x^2 + y^2.$$

Agora, integrando os dois membros da equação acima obtemos

$$\pm\sqrt{z} = x + c, \text{ onde } c \in \mathbb{R} \text{ e } z = x^2 + y^2.$$

Finalmente,

$$y^2 = 2cx + c^2, \text{ onde } c \in \mathbb{R}.$$

Esta última é a equação de todas as parábolas com foco na origem e eixo x pois a distância de P ao foco é $\sqrt{x^2 + y^2}$ e a distância de P à reta diretriz é $|x \pm c|$, onde $c \in \mathbb{R}$. Logo,

$$x^2 + y^2 = (x \pm c)^2.$$

Como já vimos que a parábola têm a propriedade focal, a caracterização está completa♣

1.8 Propriedade de Reflexão - Prova Elementar

Teorema 1.5 *Considerando a parábola $x^2 = 4py$ e $P = (x_0, y_0)$ um seu ponto definimos, geometricamente, a tangente em P , como a única reta T , por P e não vertical, intersectando a parábola unicamente em P . Vimos que $F = (0, p)$ é o foco de tal parábola. Seja β o ângulo entre T e FP e α o ângulo entre T e a reta vertical por P . Provemos que $\beta = \alpha$, o que implica que se um raio de luz é emitido do foco a parábola reflete-o paralelamente ao seu eixo. Notemos que (vide figura) α é também o ângulo entre a reta normal N e o eixo x .*

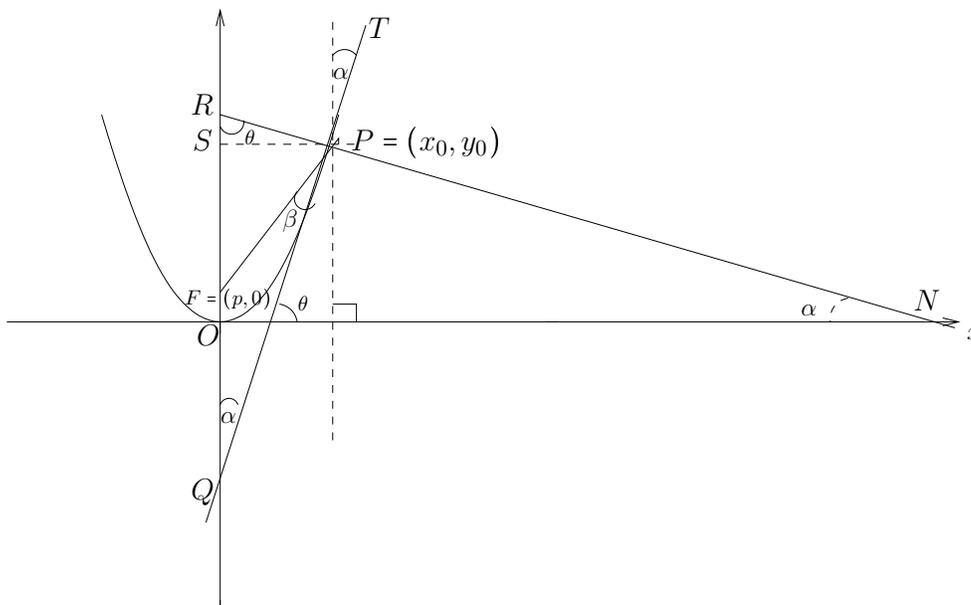


Figura 1.34: Propriedade de Reflexão-Parábolas

Prova.

Sejam Q e R os respectivos pontos em que as retas tangente e normal à parábola, em P , interceptam o eixo da parábola. Sejam S o pé da perpendicular em P a esse eixo e θ o ângulo de inclinação de T relativamente ao eixo x . Temos (v. Fig. 1.34)

$$\alpha + \theta = \frac{\pi}{2} \text{ e } S = (0, y_0).$$

Afirmção 1. Se $P = (x_0, y_0)$, o coeficiente angular de T é

$$m_T = \operatorname{tg}(\theta) = \frac{x_0}{2p}.$$

Verificação. Seja T a reta procurada e m o coeficiente angular a determinar. Então temos que

$$T: y - \frac{x_0^2}{4p} = m(x - x_0)$$

e impomos a condição que o sistema abaixo tenha solução única,

$$\begin{cases} y - \frac{x_0^2}{4p} = m(x - x_0) \\ y = \frac{x^2}{4p}. \end{cases}$$

Substituindo a segunda equação na primeira obtemos

$$\frac{x^2}{4p} - \frac{x_0^2}{4p} = m(x - x_0),$$

e agrupando encontramos a equação

$$x^2 - 4pmx + (4pmx_0 - x_0^2) = 0,$$

a qual tem discriminante

$$\begin{aligned} \Delta &= 16p^2m^2 - 4(4pmx_0 - x_0^2) \\ &= 16p^2m^2 - 16pmx_0 + 4x_0^2 \\ &= (4pm - 2x_0)^2. \end{aligned}$$

Consequentemente, como $\Delta \geq 0$, o sistema acima tem solução para qualquer valor de m , sendo que a solução é única se, e somente se, $\Delta = 0$ ou ainda $4pm - 2x_0 = 0$. Isto é,

$$m_T = \frac{x_0}{2p}.$$

Afirmção 2. Se M é o ponto médio do segmento QR então

$$M = F.$$

Verificação. Obviamente temos, pela Afirmção 1 e pela Figura 34, as identidades

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{m_T} = \frac{2p}{x_0}, \\ |SP| = x_0, \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{|RS|}{|SP|}, \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{|SP|}{|SQ|}. \end{array} \right.$$

Conseqüentemente, segue $|RS| = 2p$ e

$$\begin{aligned} |SQ| &= \frac{|SP|}{\operatorname{tg} \alpha} \\ &= \frac{x_0^2}{2p} \\ &= \frac{4p \cdot y_0}{2p} \\ &= 2y_0. \end{aligned}$$

Logo, como $S = (0, y_0)$, seguem as fórmulas

$$R = (0, y_0 + 2p) \text{ e } Q = (0, -y_0).$$

Assim, encontramos

$$\begin{aligned} M &= \frac{Q + R}{2} \\ &= (0, p) \\ &= F. \end{aligned}$$

Conclusão. Utilizemos que todo triângulo retângulo é inscrito à circunferência centrada no ponto médio da hipotenusa e diâmetro igual à hipotenusa (Figura abaixo).

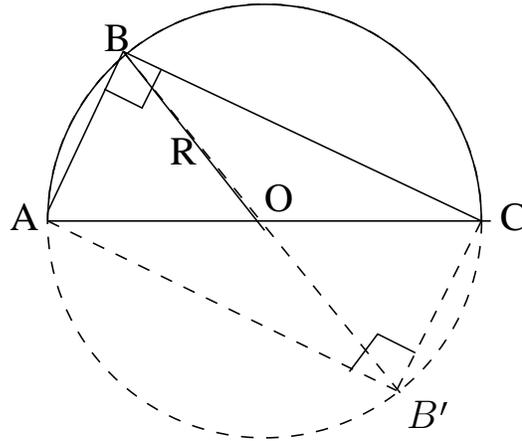


Figura 1.35: Triângulo retângulo inscrito

Consequentemente, como $\triangle RPQ$ é um triângulo retângulo em P , concluímos as identidades

$$|FP| = |FR| = |FQ|$$

e portanto, o triângulo $\triangle QFP$ tem os lados FP e FQ com mesmo comprimento e é então isósceles, donde se conclui que os ângulos FQP e FPQ têm mesma medida. Logo,

$$\beta = \alpha.$$

Isto completa a prova do Teorema 1.5 ♣

Consequência. Se W é o pé da perpendicular por P à reta diretriz, então os ângulos FPQ e QPW são iguais e consequentemente a reta tangente T é a bissetriz do ângulo FPW .

1.9 Propriedade de Reflexão das Elipses - Prova Analítica

Observação. É possível uma prova elementar, análoga a obtida para parábolas, porém trabalhosa (e muito bonita).

Teorema 1.6 *Seja P um ponto sobre uma elipse com focos F e F' e seja T a reta tangente em P . Se T forma ângulos α e β com os raios focais PF e PF' , respectivamente, então $\alpha = \beta$.*

Prova.

Consideremos o sistema de coordenadas cartesiano (usual), vide figura abaixo, e a equação da elipse escrita em sua forma padrão

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ com } a > 0 \text{ e } b > 0.$$

Denotemos os focos por $F' = (-c, 0)$ e $F = (c, 0)$, onde, como já vimos, $a^2 = b^2 + c^2$.

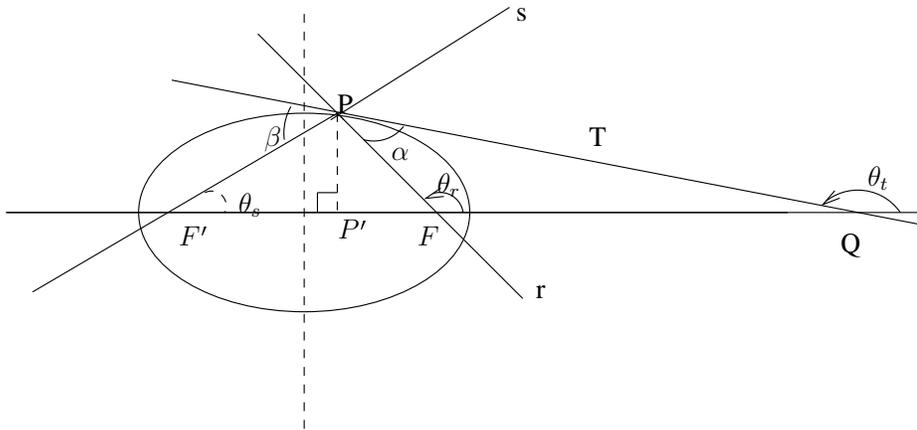


Figura 1.36: Propriedade de Reflexão - Elipses

Sejam $P = (x_0, y_0)$, um ponto da elipse e T a reta tangente à elipse no ponto P . Sejam r a reta que contém o raio focal PF e s a reta que contém o raio focal PF' . Sejam θ_T , θ_r e θ_s os respectivos ângulos entre as retas T , r e s e o eixo x (horizontal). Seja Q a interseção entre a reta T e o eixo x .

Observando o triângulo $\triangle PFQ$, temos $\theta_T = \alpha + \theta_r$. Segue a equação

$$(1) \quad \alpha = \theta_T - \theta_r.$$

Analogamente, observando o triângulo $\triangle PF'Q$, temos a identidade $\theta_T = \theta_s + (\pi - \beta)$ e portanto a equação

$$(2) \quad \beta = \pi + (\theta_s - \theta_T).$$

Para nossos propósitos podemos supor $y \geq 0$ e assim temos

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \text{ com } |x| \leq a.$$

Donde, no ponto P encontramos

$$\sqrt{a^2 - x_0^2} = \frac{ay_0}{b}$$

e a equação

$$(3) \quad \begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta_T) &= y'(x_0) \\ &= -\frac{bx_0}{a\sqrt{a^2 - x_0^2}} \\ &= -\frac{b^2x_0}{a^2y_0}. \end{aligned}$$

Pelos triângulos retângulos $\triangle PP'F$ e $\triangle PP'F'$, sendo $P' = (x_0, 0)$, temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg}(\theta_T) = -\frac{b^2x_0}{a^2y_0} \\ \operatorname{tg}(\theta_r) = -\frac{y_0}{c-x_0} = \frac{y_0}{x_0-c} \\ \operatorname{tg}(\theta_s) = \frac{y_0}{x_0+c}. \end{array} \right.$$

Por tais fórmulas, pelas equações (1), (2) e (3) e, ainda, pela fórmula para a tangente da soma, temos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(\alpha) &= \operatorname{tg}(\theta_T - \theta_r) \\
 &= \frac{\operatorname{tg}(\theta_T) - \operatorname{tg}(\theta_r)}{1 + \operatorname{tg}(\theta_T) \operatorname{tg}(\theta_r)} \\
 &= \frac{-\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} + \frac{y_0}{c-x_0}}{1 + \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \frac{y_0}{c-x_0}} \\
 &= \frac{-b^2 x_0 (c-x_0) + y_0 a^2 y_0}{a^2 y_0 (c-x_0) + b^2 x_0 y_0}
 \end{aligned}$$

e, expandindo e simplificando o numerador (da equação padrão temos $b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2$) e utilizando que $b^2 = a^2 - c^2$ para simplificar o denominador, obtemos

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a^2 b^2 - b^2 c x_0}{a^2 c y_0 - c^2 x_0 y_0}.$$

Procedendo de forma análoga obtemos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(\beta) &= \operatorname{tg}[\pi + (\theta_s - \theta_T)] \\
 &= \operatorname{tg}(\theta_s - \theta_T) \\
 &= \frac{\operatorname{tg}(\theta_s) - \operatorname{tg}(\theta_T)}{1 + \operatorname{tg}(\theta_s) \operatorname{tg}(\theta_T)} \\
 &= \frac{\frac{y_0}{x_0+c} + \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}}{1 - \frac{y_0}{x_0+c} \cdot \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}} \\
 &= \frac{a^2 y_0^2 + b^2 x_0 (x_0 + c)}{a^2 y_0 (x_0 + c) - b^2 x_0 y_0}.
 \end{aligned}$$

Assim, utilizando as mesmas simplificações feitas acima, encontramos

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{a^2 b^2 + b^2 c x_0}{c^2 x_0 y_0 + a^2 c y_0}.$$

Finalmente, para provar que $\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{tg}(\beta)$, basta constatar a igualdade

$$(a^2 b^2 - b^2 c x_0)(c^2 x_0 y_0 + a^2 c y_0) = (a^2 b^2 + b^2 c x_0)(a^2 c y_0 - c^2 x_0 y_0) \spadesuit$$

1.10 Propriedade de Reflexão das Hipérboles - Prova Analítica

Teorema 1.7 *A tangente em um ponto P sobre uma hipérbole é a bissetriz do ângulo formado pelos raios focais \overrightarrow{PF} e $\overrightarrow{PF'}$.*

Prova.

Seja T a reta tangente à hipérbole no ponto P . Sejam α e β os respectivos ângulos formados por PF e PF' com T (vide Figura 1.37).

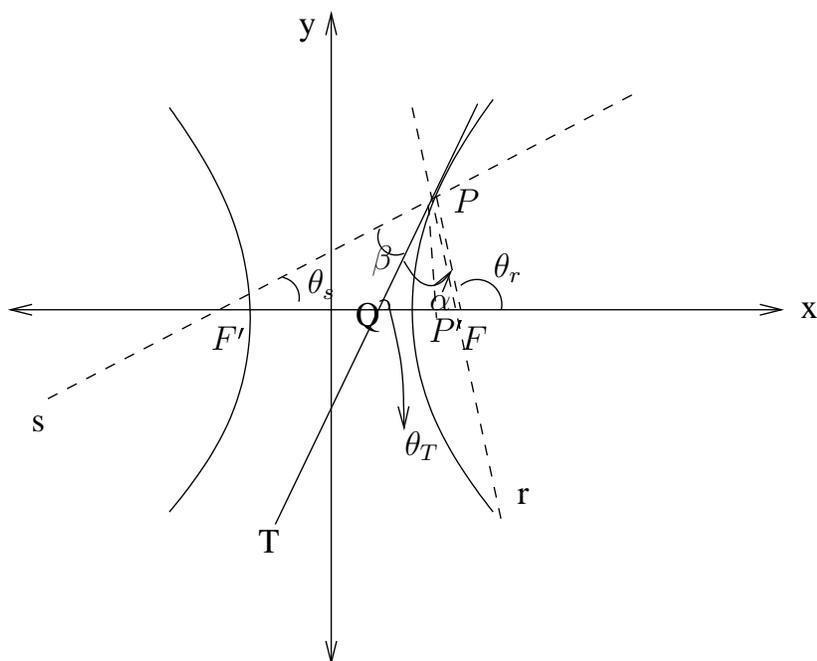


Figura 1.37: Propriedade de Reflexão - Hipérboles

Consideremos o sistema de coordenadas cartesianas como indicado na figura e a equação da hipérbole em sua forma reduzida,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ com } a > 0 \text{ e } b > 0.$$

Denotemos os focos por

$$F' = (-c, 0) \text{ e } F = (c, 0), \text{ onde } c^2 = a^2 + b^2.$$

Sejam $P = (x_0, y_0)$ um ponto da hipérbole. Sejam T , r e s retas tais que, T é tangente à hipérbole em P , a reta r contém o raio focal PF e a reta s contém o raio focal PF' .

Sejam θ_T , θ_r e θ_s os ângulos que as retas T , r e s formam com o eixo x . Por fim, seja Q a interseção entre T e o segmento \overline{Ox} .

Observando o triângulo $\triangle PQF'$ concluímos que $\theta_T = \beta + \theta_s$.

Logo,

$$(1) \quad \beta = \theta_T - \theta_s.$$

Analogamente, para o triângulo $\triangle PQF$, concluímos a identidade $\theta_r = \alpha + \theta_T$. Segue

$$(2) \quad \alpha = \theta_r - \theta_T.$$

Pela simetria da hipérbole é suficiente analisarmos no primeiro quadrante e assim temos

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \text{ para } x \geq a.$$

Donde, no ponto P encontramos

$$\sqrt{x_0^2 - a^2} = \frac{ay_0}{b}$$

e a equação

$$(3) \quad \text{tg}(\theta_T) = y'(x_0) = \frac{b}{a} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - a^2}} = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}.$$

Pelos triângulos retângulos $\triangle PP'F$ e $\triangle PP'F'$, sendo $P' = (x_0, 0)$, temos

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tg}(\theta_T) = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} \\ \text{tg}(\theta_r) = -\frac{y_0}{c-x_0} = \frac{y_0}{x_0-c} \\ \text{tg}(\theta_s) = \frac{y_0}{x_0+c}. \end{array} \right.$$

Por tais fórmulas, pelas equações (1), (2) e (3) e, ainda, pela fórmula para a tangente da soma, encontramos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(\alpha) &= \operatorname{tg}(\theta_r - \theta_T) \\
 &= \frac{\operatorname{tg}(\theta_r) - \operatorname{tg}(\theta_T)}{1 + \operatorname{tg}(\theta_r) \operatorname{tg}(\theta_T)} \\
 &= \frac{\frac{y_0}{x_0 - c} - \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}}{1 + \frac{y_0}{(x_0 - c)} \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0}} \\
 &= \frac{a^2 y_0^2 - b^2 x_0(x_0 - c)}{a^2 y_0(x_0 - c) + b^2 x_0 y_0}.
 \end{aligned}$$

Expandindo e simplificando o último numerador acima (da equação reduzida temos $b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 = a^2 b^2$) e utilizando a identidade $c^2 = a^2 + b^2$ para simplificar o último denominador acima, segue

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{a^2 b^2 - b^2 c x_0}{a^2 c y_0 - c^2 x_0 y_0}.$$

Procedendo de forma análoga obtemos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{tg}(\beta) &= \operatorname{tg}(\theta_T - \theta_s) \\
 &= \frac{\operatorname{tg}(\theta_T) - \operatorname{tg}(\theta_s)}{1 + \operatorname{tg}(\theta_T) \operatorname{tg}(\theta_s)} \\
 &= \frac{\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} - \frac{y_0}{x_0 + c}}{1 + \frac{b^2 x_0 y_0}{a^2 y_0(x_0 + c)}} \\
 &= \frac{b^2 x_0(x_0 + c) - a^2 y_0^2}{a^2 y_0(x_0 + c) + b^2 x_0 y_0}.
 \end{aligned}$$

Assim, utilizando as mesmas simplificações feitas acima, encontramos

$$\operatorname{tg}(\beta) = \frac{a^2 b^2 + b^2 c x_0}{c^2 x_0 y_0 + a^2 c y_0}.$$

Observando que as expressões para $\operatorname{tg} \alpha$ e $\operatorname{tg} \beta$, neste caso, são iguais às encontradas no caso do Princípio da Reflexão para Elipses (Prova Analítica), segue a tese ♣

1.11 Hipérbole X Circunferência

Consideremos a circunferência fundamental e a hipérbole fundamental, dadas respectivamente por

$$x^2 + y^2 = 1 \quad \text{e} \quad x^2 - y^2 = 1.$$

Sabemos que podemos dar as coordenadas (polares) de um ponto $P = (x, y)$ da circunferência através das funções $\cos \theta$ e $\sin \theta$ (ou $\sin \theta$, em inglês), com θ o ângulo que o segmento \overline{OP} forma com o eixo Ox .

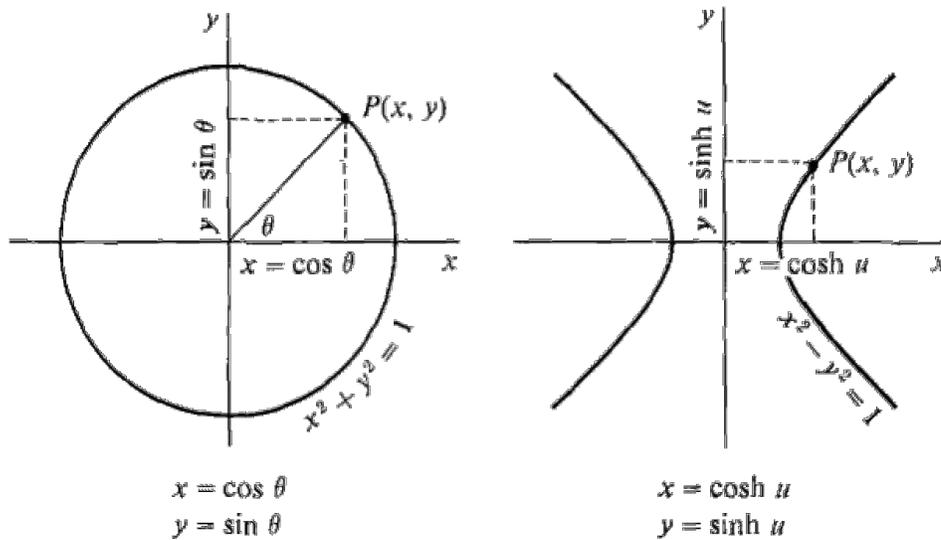


Figura 1.38: Coordenadas polares X Coordenadas hiperbólicas

Analogamente, consideremos um ponto $P = (x, y)$ no ramo direito da hipérbole $x^2 - y^2 = 1$. Donde segue $x \geq 1$ e $y \in (-\infty, +\infty)$.

A função seno hiperbólico, $\sinh x$ (em inglês, $\sinh x$), é uma bijeção de \mathbb{R} em \mathbb{R} e então existe um único número real u tal que

$$\sinh(u) = y.$$

Então, pela *relação fundamental hiperbólica* $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$, e sabendo que a função cosseno hiperbólico somente assume valores maiores ou iguais a 1, concluímos que

$$\cosh(u) = x.$$

Sabemos também que área do setor circular compreendido entre o eixo das abscissas e o segmento linear de extremidades $(0,0)$ e $(\cos x, \sin x)$ [tal setor é determinado pelo arco de circunferência unindo os pontos $(1,0)$ e $(\cos x, \sin x)$ e medindo x rad], é

$$\frac{x}{2}.$$

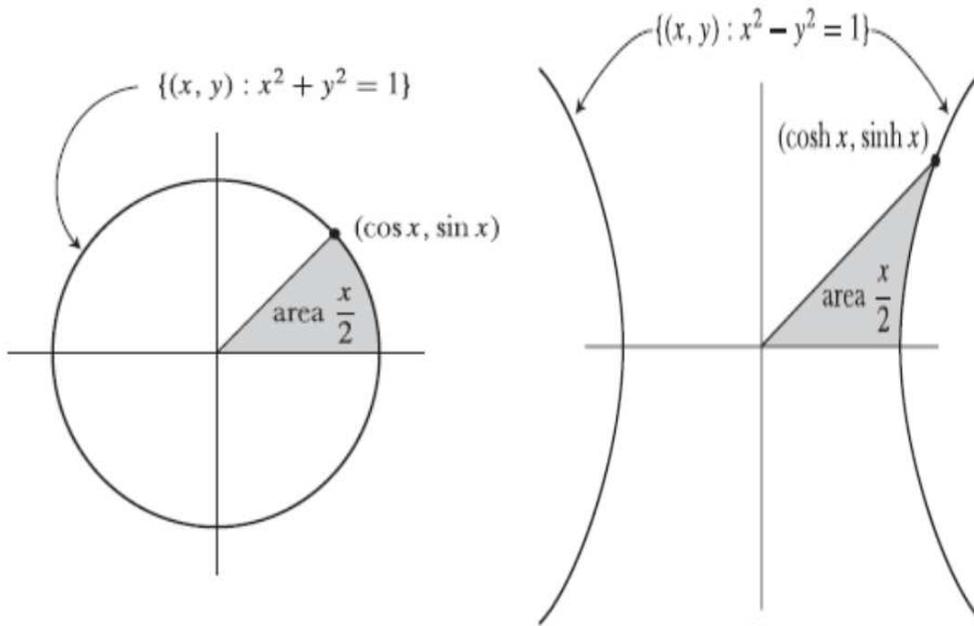


Figura 1.39: Área do setor circular X área do setor hiperbólico

Analogamente, pode ser mostrado (utilizando cálculo integral) que as hipérboles satisfazem a propriedade descrita a seguir.

A área do setor hiperbólico (vide figura acima) compreendido entre a curva hiperbólica, o eixo das abscissas e o segmento linear de extremidades $(0,0)$ e $(\cosh x, \sinh x)$ [tal setor é determinado pelo arco de hipérbole unindo os pontos $(1,0)$ e $(\cosh x, \sinh x)$], é

$$\frac{x}{2}.$$

Capítulo 2

Cônicas no Espaço

2.1 Definição de Apolônio e Seções de um Cone

Sejam C uma circunferência, uma reta E que contém o centro de C e é perpendicular ao plano por C e V um ponto de E mas não no plano por C (Figura 2.1). Nestas notas, cone designará uma superfície.

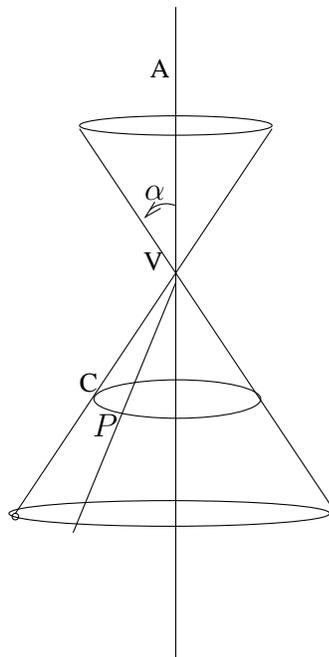


Figura 2.1: Cone Reto

Definição 2.1 (Apolônio) Consideremos P em C e a reta que passa por P e V . Quando P percorre C , a reta PV gera um cone circular reto com eixo (do cone) E e vértice V . As retas \overleftrightarrow{PV} chamam-se geratrizes do cone, e o ângulo α entre o eixo e qualquer geratriz chama-se ângulo do vértice. Orientando o eixo como indicado na figura chamamos a parte superior e inferior do cone, que intersectam-se no vértice, de folhas do cone.

Definição 2.2 Dado um cone e um plano a interseção de ambos é dita seção cônica. Se o plano não contém o vértice a chamamos cônica e, contendo-o, seção cônica degenerada. Se o plano é perpendicular ao eixo temos uma circunferência (não estudada aqui), se paralelo a uma geratriz, a cônica chama-se parábola e, caso contrário, elipse ou hipérbole (uma curva com dois ramos), conforme o plano corte uma só ou ambas as folhas. Vide Figura 2.2.

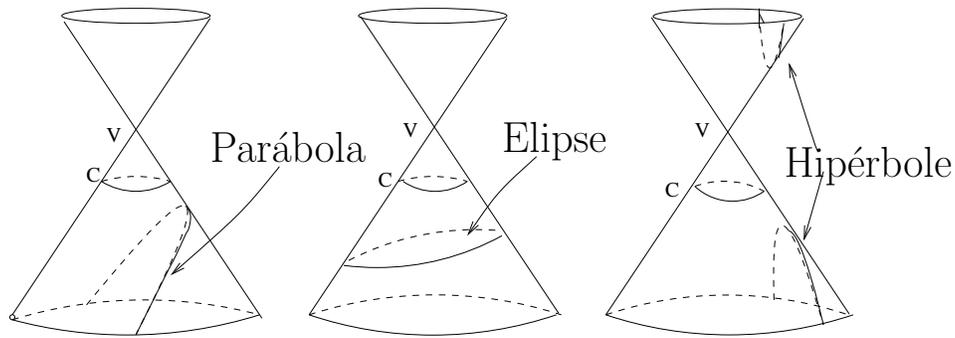


Figura 2.2: Parábola - Elipse - Hipérbole

Definição 2.3 O ângulo de inclinação β , $0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$, de um plano secante ao cone, em relação ao eixo, é o formado entre o plano e o referido eixo (circunferências exclusas se $\beta \neq \frac{\pi}{2}$).

Observação 1. Para facilitar a exposição manteremos nesta seção a notação acima e, ainda, o plano secante, a menos que explicitado, não contém o vértice V . Denotamos o plano secante por π .

Observação 2. Nas provas das propriedades focais, apesar de nomeá-las conforme as cônicas antes das demonstrações, utilizaremos apenas o ângulo de inclinação para as construções geométricas necessárias e provaremos que o nome dado à propriedade corresponde ao que se espera.

Observação 3. O plano secante ao cone, com inclinação α , é paralelo a uma geratriz.

Temos a seguinte interpretação. Imaginemos uma fonte de luz em V e um anel em C . A sombra do anel sobre um plano é uma cônica conforme a inclinação deste.

- Se o plano é perpendicular ao eixo ($\beta = \frac{\pi}{2}$), a cônica é uma circunferência.
- Se o plano é paralelo a uma geratriz ($\beta = \alpha$), a cônica é uma parábola.
- Se o plano é menos inclinado em relação ao eixo ($\beta < \alpha$), a cônica é um ramo da hipérbole.
- Se o plano é mais inclinado em relação ao eixo ($\beta > \alpha$), a cônica é uma elipse.

Provaremos a seguir que o nome dado é correto.

Transladando-se os planos secantes da figura acima até que passem pelo vértice, obtemos, na ordem, as seções degeneradas de, respectivamente, parábolas, elipses, e hipérbolas: uma reta, um ponto e duas retas concorrentes. Na seção 3 mostraremos que não há identificação entre estas e quádricas degeneradas.

2.2 Propriedade Focal das Elipses, Hipérboles e Parábolas

Elipses ($\beta > \alpha$).

Consideremos duas esferas inscritas no cone, tangentes a π em F e F' , e a C nas circunferências C_1 e C_2 . Notemos (Figura 2.2) que se $\beta \leq \alpha$ não há duas tais esferas.

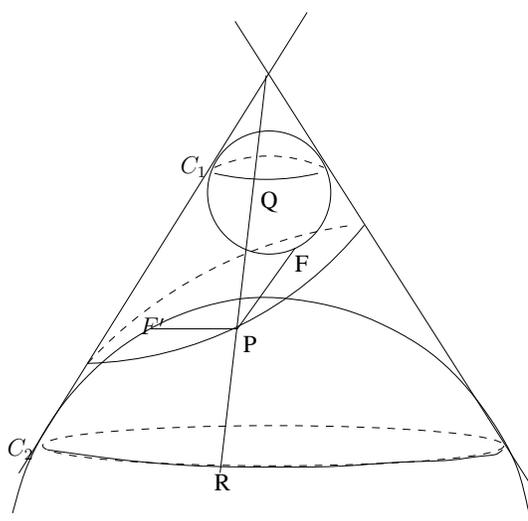


Figura 2.3: Propriedade Focal Elíptica

Sendo P um ponto arbitrário da seção cônica, mostremos que $|PF| + |PF'|$ é constante.

Sejam Q e R dois pontos, em C_1 e C_2 , respectivamente, pertencentes à geratriz por P . Tangentes à esfera, por um mesmo ponto, têm igual comprimento. Seguem $|PQ| = |PF|$ e $|PF'| = |PR|$. Logo,

$$|PF| + |PF'| = |PQ| + |PR| = |QR|.$$

Finalmente, $|QR|$ é uma constante. A saber, $|QR|$ é a distância de C_1 a C_2 ao longo de uma geratriz ♣

Hipérboles ($\beta < \alpha$).

Então, π intersecta as duas folhas do cone. Sejam S_1 e S_2 , esferas inscritas em C e tangenciando π , uma em cada folha. Evidentemente, se $\beta \geq \alpha$ não há duas tais esferas.

Sejam F_1 e F_2 os pontos de tangência de S_1 com π e de S_2 com π , respectivamente; S_1 e S_2 determinam sobre C dois círculos, C_1 e C_2 , respectivamente.

Seja P um ponto qualquer de $C \cap \pi$ (isto é, na hipérbole) e sejam V_1 e V_2 a intersecção da reta determinada pelo segmento VP com os círculos C_1 e C_2 , respectivamente.

Os segmentos PV_1 e PA são tangentes a S_1 por P . Os segmentos PV_2 e PB são tangentes a S_2 por P . Logo,

$$|PV_1| = |PA| \quad \text{e} \quad |PV_2| = |PB|.$$

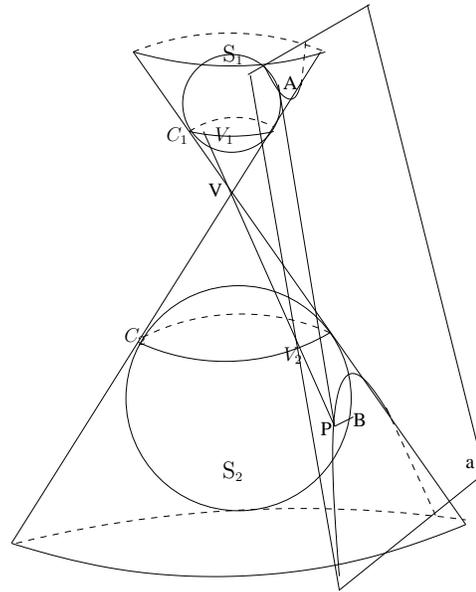


Figura 2.4: Propriedade Focal Hiperbólica

Assim temos

$$| |PA| - |PB| | = | |PV_1| - |PV_2| | = |V_1V_2|.$$

Pondo $|V_1V_2| = 2a$ temos a equação da hipérbole. Claramente, $|V_1V_2|$ é a distância entre as circunferências C_1 e C_2 , tomada ao longo das geratrizes ♣

Parábolas ($\beta = \alpha$).

Este é um caso particular do Teorema de Dandelin, provado a seguir (vide Figura 2.5 e Figura 2.6).

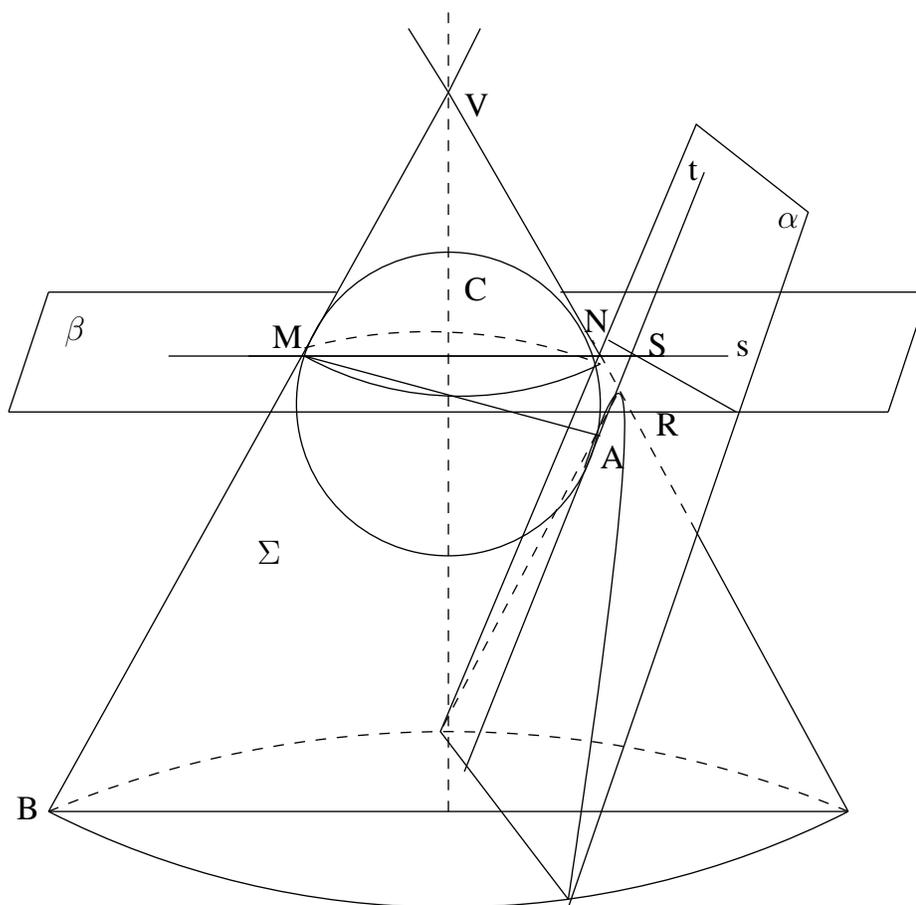


Figura 2.5: Propriedade Focal Parabólica

2.3 Caracterização Geométrica (Teorema de Dandelin): Relações Foco-Diretriz-Excentricidade

Suponhamos

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Consideremos uma esfera inscrita em C , tangente a π em F e ao cone ao longo da circunferência C_1 , d a reta intersecção entre o plano por C_1 e π , e D o pé da perpendicular por P à reta d . Na figura 2.6 abaixo temos uma elipse mas o argumento se aplica às outras cônicas também.

Notemos que o triângulo $\triangle P Q D$ é retângulo e $\beta = \angle Q P D$.

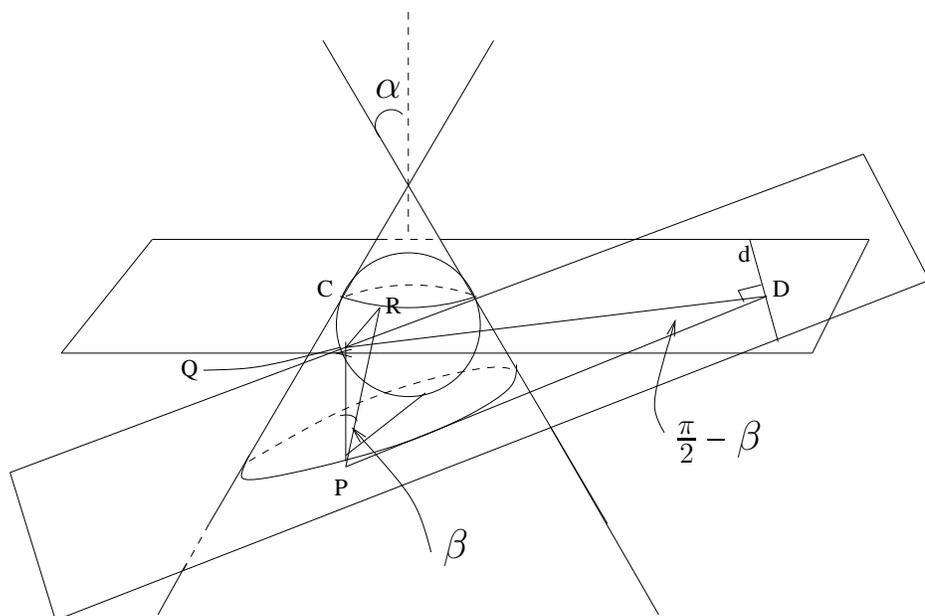


Figura 2.6: Relação Foco-Diretriz-Excentricidade

Teorema 2.1 (Dandelin). *A seção cônica tem em F seu foco e em d sua diretriz. Isto é, para todo ponto P da seção, a razão*

$$\frac{|PF|}{|PD|}$$

é uma constante $e > 0$ denominada excentricidade. A seção é uma

$$\begin{cases} \text{parábola se} & e = 1 \\ \text{elipse se} & 0 < e < 1 \\ \text{hipérbole se} & e > 1. \end{cases}$$

Prova.

Sejam P um ponto da seção cônica, Q o ponto em que a paralela por P ao eixo da cônica intersecta o plano por C_1 e R o ponto em que a geratriz por P intercepta C .

PR e PF são tangentes à esfera a partir do mesmo ponto P e, portanto temos

$$|PR| = |PF|.$$

Do triângulo retângulo $\triangle PQR$ obtemos $|PQ| = |PR| \cos \alpha$.

Do triângulo retângulo $\triangle PQD$ obtemos $|PQ| = |PD| \cos \beta$.

Assim, chegamos a

$$|PR| \cos \alpha = |PQ| = |PD| \cos \beta.$$

Donde segue

$$\frac{|PR|}{|PD|} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}.$$

Porém, como já vimos que $|PR| = |PF|$, encontramos

$$\frac{|PF|}{|PD|} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = e \spadesuit$$

Observação 1. Se $\beta = \alpha$, o plano é paralelo a uma geratriz, a cônica é uma parábola e a Figura 2.5 é adequada, revelando o único foco e a reta diretriz.

Observação 2. A excentricidade

$$e = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

depende apenas do cone e do plano secante.

Notemos que, sendo a função cosseno decrescente,

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \beta < \alpha \Rightarrow \cos \beta > \cos \alpha \Rightarrow e > 1 \\ \beta = \alpha \Rightarrow e = 1 \\ \alpha < \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos \beta < \cos \alpha \Rightarrow e < 1. \end{array} \right.$$

Observação 3. O ângulo $\beta_0 = \alpha$ é crítico pois a natureza das cônicas muda se a inclinação do plano é maior ou menor que α . Tal fato é visualmente constatado nas três possibilidades exibidas na Figura 2.6 Na primeira ($\beta = \alpha$) o plano é paralelo a uma geratriz e a interseção é uma parábola. Na segunda, o plano é mais inclinado ($\beta > \alpha$) e temos uma elipse. Por último, na terceira ele é menos inclinado ($\beta < \alpha$) e a interseção é uma hipérbole.

Consequentemente, escrevendo

$$\frac{|PF|}{|PD|} = e$$

temos as situações (já mencionadas no teorema de Dandelin)

$$\left\{ \begin{array}{l} e < 1, \text{ para uma elipse} \\ e = 1, \text{ para uma parábola} \\ e > 1, \text{ para uma hipérbole} \end{array} \right. .$$

Esta unificação geométrica não inclui circunferências, pois as construções geométricas necessárias não são possíveis por ser o plano secante, neste caso, perpendicular ao eixo do cone.

Capítulo 3

Quádricas no Plano

3.1 Rotação de Eixos e Classificação - “Identificação” entre Quádricas e Cônicas

Consideremos a equação geral do segundo grau em x e y tal que A ou B ou C é não nulo:

$$(3.1.1) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad .$$

Uma quádrlica (ou gráfico ou curva) é uma solução da equação (3.1.1). Isto é, a quádrlica é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo a equação (3.1.1). As quatro cônicas no plano são, obviamente, quádrlicas e estão assim algébricamente unificadas .

Teorema 3.1 *Toda quádrlica é uma circunferência, uma parábola, uma elipse, uma hipérbole, um ponto, o conjunto vazio, uma única reta ou um par de retas (concorrentes ou paralelas).*

Idéia da prova. O termo misto Bxy é o nó górdio para a identificação geométrica da solução. Até aqui a visualização foi simples pois as curvas foram apresentadas em forma padrão, com eixos de simetria

paralelos aos tradicionais e, assim, sem termo misto. Como circunferências, elipses e hipérbolas têm eixos perpendiculares e parábolas têm eixos e retas diretrizes ortogonais podemos esperar que com uma rotação adequada possamos obter uma equação equivalente em forma padrão. Como exemplo, elimine o termo misto em $xy = 1$.

Na demonstração do Teorema (3.1) além de determinarmos o ângulo de rotação que desacopla as variáveis as características abaixo emergirão.

1. A natureza das curvas sendo invariante por rotações, obteremos uma relação entre os coeficientes refletindo tal fato.

2. No espaço vimos que $\beta_0 = \alpha$ é o ângulo em que a natureza das cônicas muda. Se β , o ângulo de inclinação do plano secante em relação ao eixo do cone, é igual a β_0 temos então uma parábola. No plano, as características das curvas mudam em $e = 1$, a excentricidade da parábola. É razoável então que a parábola, uma vez mais, mostre-se singular.

Verifiquemos o Teorema (3.1) no caso trivial, em que não existe termo misto.

(Caso $B = 0$). Temos as quatro casos abaixo para os gráficos de

$$(3.1.1') \quad Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ onde } A \neq 0 \text{ ou } C \neq 0.$$

- (1) Uma circunferência, se $A = C$ (ou um ponto ou o vazio).
- (2) Uma elipse, se A e C têm mesmo sinal e $A \neq C$ (ou um ponto ou o vazio).
- (3) Uma hipérbole, se A e C têm sinais opostos (ou um par de retas concorrentes).
- (4) Uma parábola se $A = 0$ ou $C = 0$ (ou uma reta ou duas retas paralelas ou o vazio).

Prova do Teorema (3.1).

◇ Casos (1, 2 e 3). Temos A e C não nulos. Reescrevemos a equação (3.1.1') na forma

$$A\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right) + C\left(y^2 + \frac{E}{C}y\right) + F = 0$$

e, completando quadrados,

$$A\left[\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 - \frac{D^2}{4A^2}\right] + C\left[\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 - \frac{E^2}{4C^2}\right] + F = 0.$$

Logo, definindo

$$x_0 = -\frac{D}{2A}, \quad y_0 = -\frac{E}{2C} \quad \text{e} \quad \gamma = \frac{AE^2 + CD^2 - 4ACF}{4AC}$$

achamos

$$(3.1.1'') \quad A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = \gamma, \quad \text{onde } AC \neq 0.$$

Se A e C têm mesmo sinal podemos supor-lo positivo. Logo, a solução não existe ($\gamma < 0$), é um ponto ($\gamma = 0$), é uma circunferência ($\gamma > 0$ e $A = B$) ou é uma elipse ($\gamma > 0$ e $A \neq B$).

Se A e C têm sinais opostos, podemos supor $A = \frac{1}{a^2}$, $a \neq 0$, e $C = -\frac{1}{c^2}$, $c \neq 0$. Encontramos então

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{c^2} = \gamma,$$

que é uma hipérbole se $\gamma \neq 0$ (dividindo por γ obtemos a equação reduzida) e, se $\gamma = 0$, fatoramos (3.1.1'') e obtemos o par de retas concorrentes,

$$\frac{x - x_0}{a} - \frac{y - y_0}{c} = 0, \quad \frac{x - x_0}{a} + \frac{y - y_0}{c} = 0.$$

◇ Caso 4. É suficiente analisarmos $C = 0$ e $A = 1$. Então temos a equação $x^2 + Dx + Ey + F = 0$ e, se $E \neq 0$, obtemos

$$y = \frac{-x^2 - Dx - F}{E},$$

é uma parábola. Se $E = 0$, temos $x^2 + Dx + F = 0$ e (x, y) é solução se x é raiz de $x^2 + Dx + F = 0$, a qual tem (uma ou duas) ou não solução, e obtemos o vazio ou uma ou duas retas verticais♣

Definição 3.1 *O ponto, o vazio, uma reta ou um par de retas são quádricas degeneradas.*

A justificativa para uma tal definição é de ordem prática: objetivamos estudar parábolas, elipses e hipérbolas. Poderíamos definir a circunferência também degenerada e, por vezes, a vemos como uma elipse degenerada, com excentricidade zero como curva plana ou limite de elipses quando o plano secante tende ao plano perpendicular ao eixo do cone. Notemos que um par de retas paralelas é uma quádrica (degenerada) porém não é uma seção cônica (degenerada).

Com a notação acima, obtemos a classificação abaixo para uma solução de (3.1.1') e não degenerada.

- Uma circunferência se e somente se $A = C$.
- Uma elipse se e somente se $AC > 0$ e $A \neq C$.
- Uma hipérbole se e somente se $AC < 0$.
- Uma parábola se e somente ocorre $A = 0$ ou ocorre $C = 0$.

Demonstração do Teorema 3.1.

Podemos supor $B \neq 0$. Consideremos o plano cartesiano xy e uma rotação de eixos, no sentido anti-horário, por um ângulo θ (Figura 3.1).

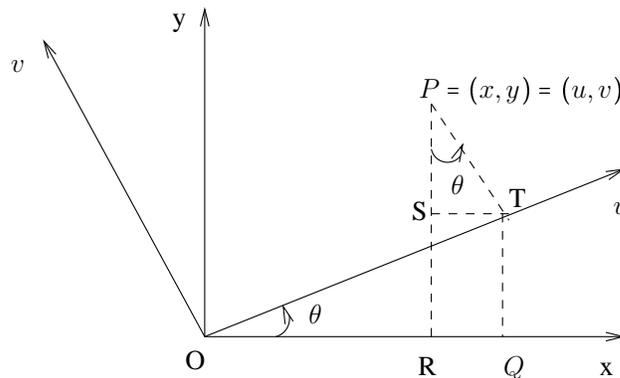


Figura 3.1: Rotação de Eixos

Um ponto P do plano têm então dois pares de coordenadas retangulares (x, y) e (u, v) . Observemos, a partir da figura, que

$$\begin{cases} x = |OR| = |OQ| - |RQ| = |OQ| - |ST| = u \cos \theta - v \operatorname{sen} \theta \\ y = |PR| = |RS| + |SP| = |QT| + |SP| = u \operatorname{sen} \theta + v \cos \theta. \end{cases}$$

Estas equações são denominadas equações da rotação.

Em notação matricial temos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Substituindo as equações de rotação em (1) obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= A(u \cos \theta - v \operatorname{sen} \theta)^2 + B(u \cos \theta - v \operatorname{sen} \theta)(u \operatorname{sen} \theta + v \cos \theta) \\ &+ C(u \operatorname{sen} \theta + v \cos \theta)^2 + D(u \cos \theta - v \operatorname{sen} \theta) \\ &+ E(u \operatorname{sen} \theta + v \cos \theta) + F. \end{aligned}$$

Identificando os coeficientes nas variáveis u e v , obtemos

$$A'u^2 + B'uv + C'v^2 + D'u + E'v + F' = 0$$

sendo que

$$\begin{cases} A' = A \cos^2 \theta + B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \operatorname{sen}^2 \theta \\ B' = -2A \operatorname{sen} \theta \cos \theta + B(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) + 2C \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ C' = A \operatorname{sen}^2 \theta - B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta \\ D' = D \cos \theta + E \operatorname{sen} \theta \\ E' = -D \operatorname{sen} \theta + E \cos \theta \\ F' = F. \end{cases}$$

Chamemos a estas equações de fórmulas simples (pois utilizam o arco simples θ) para a mudança de coeficientes pela rotação.

Substituindo as fórmulas para o duplo arco

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \quad , \quad \cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$$

nas fórmulas simples, obtemos as fórmulas sintéticas

$$\left\{ \begin{array}{l} A' = A \cos^2 \theta + \frac{B}{2} \operatorname{sen} 2\theta + C \operatorname{sen}^2 \theta \\ B' = (C - A) \operatorname{sen} 2\theta + B \cos 2\theta \\ C' = A \operatorname{sen}^2 \theta - \frac{B}{2} \operatorname{sen} 2\theta + C \cos^2 \theta \\ D' = D \cos \theta + E \operatorname{sen} \theta \\ E' = -D \operatorname{sen} \theta + E \cos \theta \\ F' = F . \end{array} \right.$$

Pelas fórmulas sintéticas temos que

$$B' = 0 \quad \text{se e somente se} \quad B \cos 2\theta = (A - C) \operatorname{sen} 2\theta.$$

Escolhemos então o ângulo

$$\theta, \quad \text{com} \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2},$$

tal que (por hipótese temos $B \neq 0$)

$$\cotg 2\theta = \frac{A - C}{B} \spadesuit$$

3.2 Caracterização Algébrica (Discriminante) - Translações - Composição de Rotações

Proposição 3.1 *Dada (3.1.1), as expressões*

$$\Delta = B^2 - 4AC \quad e \quad A + C$$

são invariantes por rotação.

Prova.

É óbvio que $A + C$ é invariante por rotação. Quanto a Δ , utilizemos as fórmulas simples. Encontramos

$$\begin{aligned} B'^2 &= [2(C - A) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) B]^2 \\ &= 4(C - A)^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + 4B(C - A) \operatorname{sen} \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \\ &\quad + (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta)^2 B^2 \\ &= 4A^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + B^2 (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta)^2 + 4C^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \\ &\quad - 4AB \operatorname{sen} \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) - 8AC \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \\ &\quad + 4BC \operatorname{sen} \theta \cos \theta (\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A'C' &= (A \cos^2 \theta + B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \operatorname{sen}^2 \theta) (A \operatorname{sen}^2 \theta - B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta) \\ &= A^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta - B^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + C^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \\ &\quad + AB(\operatorname{sen}^2 \theta - \cos^2 \theta) \operatorname{sen} \theta \cos \theta + AC(\operatorname{sen}^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ &\quad + BC(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \operatorname{sen} \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

Computando $B'^2 - 4A'C'$ (evidenciando os coeficientes de A^2 , B^2 , C^2 , AB , etc.) obtemos

$$\begin{aligned}
 B'^2 - 4A'C' &= 0.A^2 + [(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)^2 + 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta]B^2 + 0.C^2 \\
 &\quad + 0.AB + (-8 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - 4 \sin^4 \theta - 4 \cos^4 \theta)AC + 0.BC \\
 &= (\cos^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \sin^4 \theta)B^2 \\
 &\quad - 4(\sin^4 \theta + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta)AC \\
 &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 B^2 - 4(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^2 AC \\
 &= B^2 - 4AC \spadesuit
 \end{aligned}$$

Definição 3.2 *O número*

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

é o invariante algébrico ou discriminante da equação (3.1.1).

Observação. Dada uma quádrlica como em (3.1.1), associamos a ela a matriz

$$M = \begin{pmatrix} A & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C \end{pmatrix},$$

cujos determinante e traço,

$$\det(M) = |M| = AC - \frac{B^2}{4} = -\frac{\Delta}{4} \quad \text{e} \quad \text{tr}(M) = (A + C),$$

são invariantes por rotação. Podemos então definir o polinômio característico à quádrlica por

$$\begin{aligned}
 p(\lambda) &= \det(M - \lambda I) \\
 &= \begin{vmatrix} A - \lambda & \frac{B}{2} \\ \frac{B}{2} & C - \lambda \end{vmatrix} \\
 &= \lambda^2 - (A + C)\lambda - \frac{\Delta}{4},
 \end{aligned}$$

pois os coeficientes são invariantes por rotação.

Fixando θ tal que $B' = 0$, simplifiquemos a seguir o cálculo dos demais coeficientes.

Proposição 3.2 *Com a notação acima, os números A' e C' são as raízes do polinômio característico.*

Prova.

Se λ é raiz do polinômio característico então temos

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda - \frac{B^2 - 4AC}{4} = \lambda^2 - (A + C)\lambda - \frac{\Delta}{4} = 0.$$

Logo, a soma das raízes é $A + C$ e o produto é $-\frac{\Delta}{4}$.

Já vimos que $A' + C' = A + C$ qualquer que seja a rotação e, para este específico ângulo, $B' = 0$. Portanto, sendo o discriminante invariante por rotação, $\Delta = B'^2 - 4A'C' = -4A'C'$, e a equação ganha a forma

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + A'C' = 0 .$$

Finalmente, pela regra da soma e produto, A' e C' são as raízes da equação♣

Observação.

- Se as raízes são distintas é necessário distingui-las. Notemos que

$$A' - C' = (A - C) \cos 2\theta + B \sin 2\theta .$$

Logo,

$$\frac{A' - C'}{A - C} = \cos 2\theta + \frac{B}{A - C} \sin 2\theta = \cos 2\theta + \operatorname{tg} 2\theta \sin 2\theta = \frac{1}{\cos 2\theta}$$

e portanto

$$\cos 2\theta = \frac{A - C}{A' - C'} .$$

Tal identidade faz a distinção entre A' e C' .

Teorema 3.2 *A quádrlica (3.1.1), se não degenerada e com discriminante $\Delta = B^2 - 4AC$, é uma*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{elipse ou circunferência, se } \Delta < 0, \\ \text{parábola se } \Delta = 0, \\ \text{hipérbole se } \Delta > 0. \end{array} \right.$$

Prova.

Por uma rotação podemos assumir $B = 0$. Logo, $\Delta = -4AC$.

Se $\Delta < 0$, então $AC > 0$ e temos uma elipse ou circunferência (ou ponto ou \emptyset).

Se $\Delta = 0$ então $A = 0$ ou $C = 0$ (mas não ambos). Temos uma parábola, uma reta, duas retas paralelas ou \emptyset .

Se $\Delta > 0$, então A e C têm sinais opostos. Temos uma hipérbole ou duas retas concorrentes \clubsuit

Teorema 3.3 *Uma solução de (3.1.1), que não seja um ponto ou o vazio, é uma circunferência se e somente se $B = 0$ e $A = C$.*

Prova.

Suponhamos uma rotação tal que $B' = 0$ (se $B = 0$ tomemos $\theta = 0$). Então, pela verificação feita no Teorema (3.1), a quádrlica é uma circunferência se e somente se $A' = C'$. Entretanto, como A' e C' são as raízes do polinômio característico, isto ocorre se e somente se o polinômio característico

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (A + C)\lambda - \frac{\Delta}{4},$$

tem raiz dupla, o que é equivalente ao discriminante de tal polinômio ser nulo. Isto é,

$$(A + C)^2 + \Delta = (A + C)^2 + (B^2 - 4AC) = (A - C)^2 + B^2 = 0$$

cuja única solução é $A = C$ e $B = 0$ \clubsuit

Definição 3.3 *A quádrlica é de*

$$\begin{cases} \text{tipo elíptico se } \Delta < 0, \\ \text{tipo parabólico se } \Delta = 0, \\ \text{tipo hiperbólico se } \Delta > 0. \end{cases}$$

Observação. Por tal classificação, concluimos que

$$\begin{cases} \text{um ponto é de tipo elíptico,} \\ \text{duas retas concorrentes têm tipo hiperbólico e,} \\ \text{uma reta ou duas retas paralelas têm tipo parabólico.} \end{cases}$$

Interpretamos tais quádrlicas (pontos - retas concorrentes - uma reta ou duas retas paralelas) como degenerescências de elipses, hipérbolés e parábolas, respectivamente. Justifique geometricamente. Na seção 2 observamos que duas retas paralelas não é uma uma seção cônica.

Identificação. Há uma óbvia correspondência entre quádrlicas não degeneradas, cônicas no plano e cônicas (seções cônicas não degeneradas). Alguns autores, abusando da linguagem, identificam quádrlicas e cônicas e outros não. Neste texto tal identificação não é adotada.

Simplifiquemos a equação (3.1.1), se possível, eliminando os coeficientes dos termos de grau 1 com uma translação. Isto é, determinemos $x = u + h$ e $y = v + k$, onde $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, tais que (3.1.1) tenha a forma

$$\bar{A}u^2 + \bar{B}uv + \bar{C}v^2 + \bar{F} = 0.$$

Procedendo à substituição das equações de translação em (3.1.1) temos

$$A(u+h)^2 + B(u+h)(v+k) + C(v+k)^2 + D(u+h) + E(v+k) + F = 0,$$

que reagrupando, e destacando os coeficientes nas variáveis u e v , é escrita como

$$\begin{cases} Au^2 + Buv + Cv^2 + (2Ah + Bk + D)u + (Bh + 2Ck + E)v + P(h, k) = 0 \\ P(h, k) = Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F, \end{cases}$$

e então devemos determinar (h, k) tal que

$$\begin{cases} 2Ah + Bk + D = 0 \\ Bh + 2Ck + E = 0. \end{cases}$$

Utilizando uma vez mais a matriz M associada à quadrica obtemos,

$$\begin{pmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = 2M \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -D \\ -E \end{pmatrix}$$

sendo o determinante de $2M$ igual a $4AC - B^2 = -\Delta$.

Façamos então a observação abaixo.

Observação. Eliminado o termo misto ($B' = 0$) encontramos as situações abaixo.

- (i) Se $\Delta \neq 0$ eliminamos também os termos de grau 1.
- (ii) Se $\Delta = 0$, a solução tem tipo parabólico e pode ser impossível eliminar os termos de grau 1. Porém, temos

$$\Delta = -4A'C'$$

e portanto ocorre $A' = 0$ ou ocorre $C' = 0$ (não ambos) e neste caso reduzimos a equação (3.1.1).

Notação. Denotando por R_θ a rotação por um ângulo θ no sentido anti-horário, escrevemos

$$\begin{aligned} (x, y) &= R_\theta(u, v) \\ &= (u \cos \theta - v \operatorname{sen} \theta, u \operatorname{sen} \theta + v \cos \theta), \end{aligned}$$

ou, escrevendo na forma matricial,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix},$$

para todo par (u, v) no plano cartesiano.

Proposição 3.3 A composição das rotações R_θ e R_ϕ é a rotação $R_{\theta+\phi}$. Isto é,

$$R_\phi \circ R_\theta = R_{\phi+\theta}.$$

Prova.

Por definição, temos

$$R_\theta(u, v) = (u \cos \theta - v \sin \theta, u \sin \theta + v \cos \theta).$$

Assim, se $(x, y) = R_\phi(R_\theta(u, v))$, segue

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta & -\cos \phi \sin \theta - \sin \phi \cos \theta \\ \sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta & -\sin \phi \sin \theta + \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

e, utilizando as fórmulas trigonométricas para cosseno e seno da adição de dois ângulos,

$$\begin{cases} \cos(\phi + \theta) = \cos \phi \cos \theta - \sin \phi \sin \theta \\ \sin(\phi + \theta) = \sin \phi \cos \theta + \cos \phi \sin \theta, \end{cases}$$

encontramos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\phi + \theta) & -\sin(\phi + \theta) \\ \sin(\phi + \theta) & \cos(\phi + \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = R_{\phi+\theta}(u, v) \spadesuit$$

Observação. O ângulo θ tal que a a rotação R_θ elimina o termo misto satisfaz a equação

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\cotg 2\theta}{\sqrt{1 + \cotg^2 2\theta}} \right),$$

a qual permite trivialmente computar $\sin \theta$, R_θ e $\tg \theta$, que identifica o ângulo de rotação .

3.3 Refinamento - O Indicador de Degerescência

Refinemos o Teorema 3.1, para quádricas sem termo misto, via equação (3.1.1''), onde mostramos que

$$A(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \gamma, \quad \text{com } \boxed{\gamma = \frac{AE^2 + CD^2 - 4ACF}{4AC}, \text{ se } AC \neq 0}.$$

Dada a quádrica (3.1.1'), definimos

$$\boxed{\delta' = AE^2 + CD^2 - 4ACF.}$$

Teorema 3.4 *Sendo (3.1.1') $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ uma quádrica temos as seguintes classificações para esta quádrica.*

Supondo $\delta' = 0$ temos as duas possibilidades abaixo.

- (i) Se $AC \neq 0$, a quádrica é um ponto ou duas retas concorrentes.*
- (ii) Se $AC = 0$, a quádrica é o vazio ou uma reta ou duas retas paralelas.*

Supondo $\delta' \neq 0$ temos as três possibilidades abaixo.

- (iii) Se $AC > 0$, a quádrica é o vazio (caso em que A e C tem sinal oposto ao de δ') ou, caso contrário, uma elipse (caso $A \neq C$) ou uma circunferência (caso $A = C$).*
- (iv) Se $AC < 0$, a quádrica é uma hipérbole.*
- (v) Se $AC = 0$, a quádrica é uma parábola.*

Prova.

- (i) Pela equação (3.1.1'') temos $A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = 0$.

Se $AC > 0$ a solução é o ponto $P_0 = (x_0, y_0)$.

Se $A > 0$ e $C < 0$, temos $A(x - x_0)^2 = -C(y - y_0)^2$. Donde segue $\sqrt{A}(x - x_0) = \pm\sqrt{-C}(y - y_0)$ e a solução é um par de retas concorrentes em P_0 . O caso $A < 0$ e $C > 0$ é análogo.

- (ii) Se $A = 0$, então temos $0 = \delta' = CD^2$ e pela equação (3.1.1'') segue $C \neq 0$. Logo,

$$D = 0.$$

Assim, a quádrlica é dada por

$$Cy^2 + Ey + F = 0.$$

Esta equação, em \mathbb{R} , é uma equação do segundo grau em y tendo por solução ou \emptyset ou um ponto ou dois pontos. Logo, em \mathbb{R}^2 , temos ou \emptyset ou uma reta ou duas retas paralelas.

Analogamente para o caso $A \neq 0$ e $C = 0$.

- (iii) e (iv). Sendo $AC \neq 0$, dividindo a equação (3.1.1'') por γ , encontramos a identidade

$$\frac{A}{\gamma}(x - x_0)^2 + \frac{C}{\gamma}(y - y_0)^2 = 1, \text{ com } AC \neq 0.$$

Se A e C têm sinais contrários, esta é a equação reduzida de uma hipérbole, o que prova (iv).

Se $AC > 0$, então A e C têm mesmo sinal e o mesmo ocorre com δ' e γ . Analisemos duas possibilidades (dois sub-casos).

Caso A e C tenham sinal oposto a δ' , o mesmo se dá em relação a γ . Neste caso, a solução é \emptyset .

Caso A e C tenham mesmo sinal que δ' , então o mesmo se dá em relação a γ . Neste caso, os números A , C , δ' e γ têm mesmo sinal. Portanto temos

$$\frac{A}{\gamma} > 0 \text{ e } \frac{C}{\gamma} > 0.$$

Sendo assim, a equação é a forma padrão para uma elipse, se $A \neq C$, ou a de uma circunferência se $A = C$.

- (v) Suponhamos $C = 0$. Então, pela definição da equação (3.1.1'') temos $A \neq 0$. Logo,

$$0 \neq \delta' = AE^2$$

e portanto $E \neq 0$. Assim, a quádrlica é

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0, \text{ com } AE \neq 0.$$

Dividindo por E , se necessário, podemos assumir $E = 1$ e obtemos a equação

$$y = -(Ax^2 + Dx + F),$$

que é a equação de uma parábola.

A prova é análoga se $A = 0$ ♣

Adendo. A equação $\delta' = 0$ define as soluções, que não o conjunto vazio, de (3.1.1') e não degeneradas.

Dito de outra forma, a equação $\delta' \neq 0$ define, a menos do conjunto vazio, as soluções não degeneradas. Ainda mais, se $\delta' \neq 0$ a solução vazia ocorre apenas se A e C tem mesmo sinal, sendo este sinal oposto ao de δ' .

Consideremos a quádrlica (3.1.1), com termo misto (isto é, $B \neq 0$). Sabemos, em tese, transformá-la em

$$(3.1.1') \quad A'x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0,$$

sem o termo misto. Objetivando determinar o indicador de degenerescência para a equação (3.1.1) explicitemos quanto necessário a equação (3.1.1').

Proposição 3.4 *Os coeficientes A' , C' , D' , e E' da equação (3.1.1') satisfazem*

$$\begin{aligned} A' &= \frac{A}{2} \left(1 \pm \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) + \frac{B|B|}{2\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} + \frac{C}{2} \left(1 \mp \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right), \\ C' &= \frac{A}{2} \left(1 \mp \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) - \frac{B|B|}{2\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} + \frac{C}{2} \left(1 \pm \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right), \\ D'^2 &= \frac{D^2}{2} \left(1 \pm \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) + \frac{DE|B|}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} + \frac{E^2}{2} \left(1 \mp \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right), \\ E'^2 &= \frac{D^2}{2} \left(1 \mp \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) - \frac{DE|B|}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} + \frac{E^2}{2} \left(1 \pm \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right). \end{aligned}$$

Os sinais estão ordenados de forma padrão.

Prova.

Por trigonometria elementar temos $\operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cotg^2 \theta$.

Sendo

$$\cotg 2\theta = \frac{A-C}{B}$$

segue que

$$\operatorname{cosec}^2 2\theta = 1 + \left(\frac{A-C}{B} \right)^2.$$

Consequentemente temos

$$\operatorname{sen}^2 2\theta = \frac{B^2}{B^2 + (A-C)^2},$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{|B|}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}}$$

e

$$\operatorname{cos}^2 2\theta = \frac{(A-C)^2}{B^2 + (A-C)^2}.$$

Sendo θ tal que

$$0 = B' = (C-A) \operatorname{sen} 2\theta + B \operatorname{cos} 2\theta$$

obtemos

$$\operatorname{cos} 2\theta = \frac{A-C}{B} \operatorname{sen} 2\theta.$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Logo,

$$\cos 2\theta = \pm \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}},$$

onde o sinal é positivo se $B > 0$ e negativo caso contrário.

Também temos

$$D'^2 = D^2 \cos^2 \theta + 2DE \sin \theta \cos \theta + E^2 \sin^2 \theta$$

e

$$E'^2 = D^2 \sin^2 \theta - 2DE \sin \theta \cos \theta + E^2 \cos^2 \theta.$$

Se $B > 0$, da identidade

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$$

segue

$$\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}}.$$

Assim encontramos

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \right)$$

e também

$$\sin^2 \theta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \right).$$

Pelas fórmulas sintéticas, segue a proposição, no caso $B > 0$.

O caso $B < 0$ é análogo ♣

Mantendo a notação acima temos o seguinte teorema.

Teorema 3.5 *Seja (3.1.1') a quádrlica sem termo misto obtida de (3.1.1), onde $B \neq 0$. Então,*

$$\delta' = AE^2 + CD^2 - BDE + \Delta F.$$

Prova. Supondo $B > 0$, temos as fórmulas

$$\begin{aligned} A' &= \frac{A}{2} \left(1 + \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) + \frac{B^2}{2\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} + \frac{C}{2} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right), \\ C' &= \frac{A}{2} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) - \frac{B^2}{2\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} + \frac{C}{2} \left(1 + \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right), \\ D'^2 &= \frac{D^2}{2} \left(1 + \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) + \frac{DEB}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} + \frac{E^2}{2} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right), \\ E'^2 &= \frac{D^2}{2} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) - \frac{DEB}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} + \frac{E^2}{2} \left(1 + \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right). \end{aligned}$$

Obtemos então,

$$\begin{aligned} A'E'^2 &= \frac{AD^2}{4} \left(1 - \frac{(A-C)^2}{B^2 + (A-C)^2} \right) - \frac{ADEB}{2\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \left(1 + \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) \\ &+ \frac{AE^2}{4} \left(1 + \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right)^2 \\ &+ \frac{B^2D^2}{4\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) - \frac{DEB^3}{2(B^2 + (A-C)^2)} \\ &+ \frac{B^2E^2}{4\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \left(1 + \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) \\ &+ \frac{CD^2}{4} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right)^2 - \frac{CDEB}{2\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) \\ &+ \frac{CE^2}{4} \left(1 - \frac{(A-C)^2}{B^2 + (A-C)^2} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 C'D'^2 &= \frac{AD^2}{4} \left(1 - \frac{(A-C)^2}{B^2 + (A-C)^2} \right) \\
 &+ \frac{ADEB}{2\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) \\
 &+ \frac{AE^2}{4} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right)^2 \\
 &- \frac{B^2D^2}{4\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \left(1 + \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) \\
 &- \frac{DEB^3}{2(B^2 + (A-C)^2)} \\
 &- \frac{B^2E^2}{4\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) \\
 &+ \frac{CD^2}{4} \left(1 + \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right)^2 \\
 &+ \frac{CDEB}{2\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \left(1 + \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) \\
 &+ \frac{CE^2}{4} \left(1 - \frac{(A-C)^2}{B^2 + (A-C)^2} \right).
 \end{aligned}$$

Consequentemente obtemos,

$$\begin{aligned}
 A'E'^2 + C'D'^2 &= \frac{AD^2}{2} \frac{B^2}{B^2 + (A-C)^2} - \frac{ADEB(A-C)}{B^2 + (A-C)^2} \\
 &+ \frac{AE^2}{2} + \frac{AE^2}{2} \frac{(A-C)^2}{B^2 + (A-C)^2} - \frac{B^2D^2}{2} \frac{A-C}{B^2 + (A-C)^2} \\
 &- \frac{DEB^3}{B^2 + (A-C)^2} + \frac{B^2E^2}{2} \frac{A-C}{B^2 + (A-C)^2} \\
 &+ \frac{CD^2}{2} + \frac{CD^2}{2} \frac{(A-C)^2}{B^2 + (A-C)^2} \\
 &+ \frac{CDEB(A-C)}{B^2 + (A-C)^2} \\
 &+ \frac{CE^2}{2} \frac{B^2}{B^2 + (A-C)^2}.
 \end{aligned}$$

Simplificando chegamos a

$$\begin{aligned}
A'E'^2 + C'D'^2 &= \frac{AE^2}{2} + \frac{CD^2}{2} \\
&+ \frac{1}{2(B^2 + (A-C)^2)} [(AD^2B^2 - 2ADEB(A-C) \\
&+ AE^2(A-C)^2 - B^2D^2(A-C) - 2DEB^3 + B^2E^2(A-C) \\
&+ CD^2(A-C)^2 + 2CDEB(A-C) + CE^2B^2] \\
&= \frac{1}{2(B^2 + (A-C)^2)} [2DEB(A-C)(C-A) \\
&+ (AE^2 + CD^2)(A-C)^2 + B^2D^2C - 2DEB^3 \\
&+ B^2E^2(A-C) + CE^2B^2] + \frac{AE^2}{2} + \frac{CD^2}{2} \\
&= \frac{1}{2(B^2 + (A-C)^2)} [-2DEB(A-C)^2 \\
&+ (AE^2 + CD^2)(A-C)^2 + B^2D^2C - 2DEB^3 \\
&+ + B^2E^2(A-C) + CE^2B^2] + \frac{AE^2}{2} + \frac{CD^2}{2} \\
&= \frac{1}{2(B^2 + (A-C)^2)} [-2DEB((A-C)^2 + B^2) \\
&+ (AE^2 + CD^2)(A-C)^2 + B^2(CD^2 + AE^2)] \\
&+ \frac{AE^2}{2} + \frac{CD^2}{2} \\
&= \frac{1}{2(B^2 + (A-C)^2)} [(A-C)^2 + B^2](-2DEB + AE^2 + CD^2) \\
&+ \frac{AE^2}{2} + \frac{CD^2}{2} \\
&= AE^2 + CD^2 - BDE.
\end{aligned}$$

Como já vimos, para a quádrica (3.1.1'), sem termo misto, temos

$$A'C' = -\frac{\Delta}{4} \text{ e } F' = F.$$

Donde concluímos que

$$\delta' = A'E'^2 + C'D'^2 - 4A'C'F' = AE^2 + CD^2 - BDE + \Delta F \clubsuit$$

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Definição 3.4 *O indicador de degenerescência de uma quádrlica é dado pela expressão*

$$\delta = AE^2 + CD^2 - BDE + \Delta F .$$

Notemos que δ' é igual a δ , se $B = 0$. Isto é, por ora, vale a igualdade apenas quando da rotação que elimina o termo misto.

Corolário 3.1 *Dada uma quádrlica como em (3.1.1), com $\Delta \neq 0$, podemos escrevê-la na forma*

$$(3.1.1'') \quad A'(x - x_0)^2 + C'(y - y_0)^2 = \gamma, \text{ onde } \gamma = -\frac{\delta}{\Delta}.$$

Prova.

Rotacionando escrevemo-la

$$(3.1.1') \quad A'x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$$

e esta, como $A'C' = -\frac{\Delta}{4} \neq 0$, vide prova do Teorema 3.1, é então redutível à forma

$$A'(x - x_0)^2 + C'(y - y_0)^2 = \gamma, \text{ com } \gamma = \frac{\delta'}{4A'C'} = -\frac{\delta}{\Delta} \clubsuit$$

No apêndice provamos o teorema abaixo.

Teorema 3.6 *O indicador de degenerescência é invariante por rotações e translações.*

Teorema 3.7 *Uma quádrlica, não o \emptyset , dada por (3.1.1), é não degenerada se e somente se $\delta \neq 0$.*

Prova. Basta reduzirmos (3.1.1) a (3.1.1') e aplicarmos o teorema anterior \clubsuit

Teorema 3.8 *As quádricas satisfazem a classificação abaixo.*

Supondo $\delta = 0$.

- (i) Se $\Delta \neq 0$, um ponto (sub-caso $\Delta < 0$) ou um par de retas concorrentes (sub-caso $\Delta > 0$).*
- (ii) Se $\Delta = 0$, o vazio ou uma reta ou um par de retas paralelas.*

Supondo $\delta \neq 0$.

- (iii) Se $\Delta < 0$, o vazio ou uma elipse ou, uma circunferência (se e somente se $B = 0$ e $A = C$).*
- (iv) Se $\Delta > 0$, uma hipérbole.*
- (v) Se $\Delta = 0$, uma parábola.*

Prova.

Mantendo a notação, primeiro reduzimos a quádrica à forma sem termo misto. Escrevamos

$$(3.1.1') \quad A'x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0,$$

com

$$A'C' = -\frac{\Delta}{4}$$

e, ainda,

$$\begin{cases} \delta' = A'E'^2 + C'D'^2 - 4A'C'F' \\ F' = F. \end{cases}$$

◇ O caso $\Delta = -4A'C' \neq 0$.

Vimos acima que podemos reescrever (3.1.1') na forma

$$(3.1.1'') \quad A'(x - x_0)^2 + C'(y - y_0)^2 = -\frac{\delta}{\Delta}.$$

Pelo Teorema 3.4 ou por inspeção direta, notando que $\Delta < 0$ é equivalente a $A'C' > 0$ ou, ainda, A' e C' ter mesmo sinal, valem as seguintes afirmações.

- (i) Se $\delta = 0$ a quádrlica é um ponto (sub-caso $\Delta < 0$) ou um par de retas concorrentes (sub-caso $\Delta > 0$).
- (iii) Se $\delta \neq 0$ e $\Delta < 0$ então a solução é o conjunto \emptyset se o sinal comum de A' e C' é oposto ao de δ .

Caso contrário, temos uma circunferência, se $B = 0$ e $A = C$, ou uma elipse se $B \neq 0$ ou $A \neq C$.

- (iv) Se $\delta \neq 0$ e $\Delta > 0$ então A' e C' tem sinais opostos e, dividindo a equação (3.1.1'') por

$$-\frac{\delta}{\Delta}$$

obtemos uma equação padrão de uma hipérbole.

◇ O caso $\Delta = 0$. Então, vale o que segue.

- (ii) Se $\delta = 0$, pelo Teorema 3.4 aplicado à equação (3.1.1') estabelecemos a afirmação (ii).
- (v) Se $\delta \neq 0$, pelo Teorema 3.4, a quádrlica é uma parábola♣

3.4 Aplicação: Intersecções entre Cone e Plano

Consideremos o cone circular reto (de duas folhas) dado por

$$C : z^2 = \lambda^2(x^2 + y^2), \text{ com } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ e } \lambda > 0 \text{ uma constante.}$$

O eixo do cone coincide com o eixo Oz e o vértice com a origem. Duas de suas geratrizes são as retas em \mathbb{R}^3 , definidas pelas equações $z = \pm \lambda x$, com $y = 0$. Tais retas formam com o eixo, assim como qualquer geratriz, ângulos congruentes denotados por α , onde

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

é tal que

$$\cos \alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}.$$

Consideremos um plano π que não passe pelo vértice,

$$\pi : ax + by + cz + d = 0, \quad d \neq 0, \quad \text{com } \vec{n} = (a, b, c) \neq \vec{0}.$$

Se β é o ângulo entre o eixo e π , com

$$0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2},$$

então β é o complementar do ângulo entre os vetores \vec{k} e \vec{n} .

Valem as fórmulas

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \text{e} \quad \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} \cdot \vec{k} = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Vide figura 3.2, a seguir.

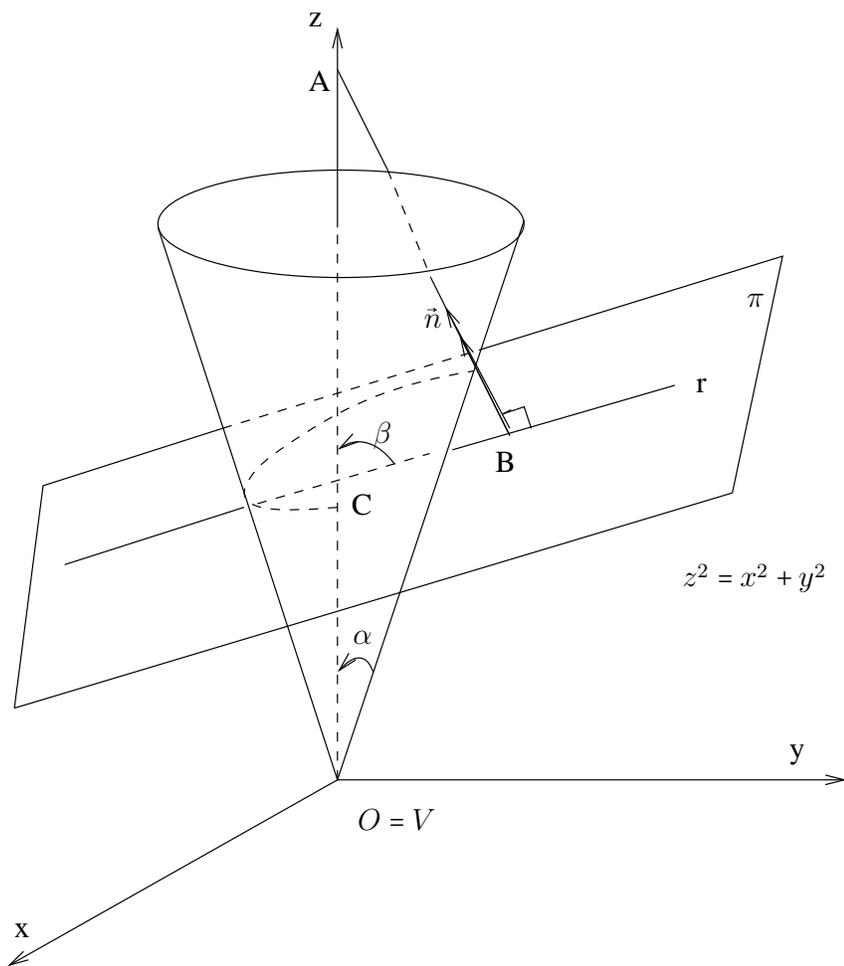


Figura 3.2: Interseção: cone e plano

Três quaisquer geratrizes não são coplanares e portanto $C \cap \pi \neq \emptyset$.

Sendo $d \neq 0$ podemos supor $d = 1$ e, se $P = (x, y, z) \in C \cap \pi$ então o ponto P satisfaz ao sistema

$$(*) \begin{cases} ax + by + cz + 1 = 0, \\ z^2 = \lambda^2(x^2 + y^2). \end{cases}$$

Afirmção 1. *As soluções do sistema (*) são quádricas não degeneradas.*

Prova.

Acima, já vimos que tais quádricas são não vazias.

Temos

$$-cz = 1 + ax + by \text{ e } (-cz)^2 = (1 + ax + by)^2.$$

Logo, pela clara identidade

$$(-cz)^2 = c^2 z^2 = c^2 \lambda^2 (x^2 + y^2)$$

[é mister $c \neq 0$ para não anularmos a equação do cone] obtemos

$$c^2 \lambda^2 (x^2 + y^2) = (1 + ax + by)^2,$$

equação esta que escrevemos como

$$(**) \quad (a^2 - c^2 \lambda^2)x^2 + 2abxy + (b^2 - c^2 \lambda^2)y^2 + 2ax + 2by + 1 = 0.$$

Verifiquemos que (**) define uma quádrica.

Verificação. Se $ab \neq 0$ segue que (**) é, por definição, uma quádrica. Se $ab = 0$ então a ou b é nulo. Admitamos $a = 0$. Então o coeficiente de x^2 é $-c^2 \lambda^2$, o qual é não nulo pois c e λ são não nulos. O caso $b = 0$ é análogo.

Computemos então $\delta = AE^2 + CD^2 - BDE + (B^2 - 4AC)F$. Temos

$$\begin{aligned} \delta &= (a^2 - c^2 \lambda^2)4b^2 + (b^2 - c^2 \lambda^2)4a^2 - (2ab)4ab \\ &\quad + [4a^2 b^2 - 4(a^2 - c^2 \lambda^2)(b^2 - c^2 \lambda^2)] \\ &= -4c^2 \lambda^2 (a^2 + b^2) + [4a^2 b^2 - 4(a^2 b^2 - c^2 \lambda^2 a^2 - c^2 \lambda^2 b^2 + c^4 \lambda^4)] \\ &= -4c^2 \lambda^2 (a^2 + b^2) + [-4c^4 \lambda^4 + 4c^2 \lambda^2 (a^2 + b^2)] \\ &= -4c^4 \lambda^4. \end{aligned}$$

Caso $c \neq 0$. Pelo Teorema 3.8, a quádrlica é não degenerada pois ocorre $\delta \neq 0$.

Caso $c = 0$. Sob tal condição não é necessário o cômputo de δ .

Temos

$$\pi : ax + by + 1 = 0, \text{ com } a \text{ ou } b \text{ não nulo.}$$

Suponhamos, sem perda de generalidade, $b \neq 0$. Então segue

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{1}{b}$$

e pela equação do cone obtemos

$$z^2 = \lambda^2 \left[x^2 + \left(-\frac{a}{b}x - \frac{1}{b} \right)^2 \right].$$

Encontramos assim (completando quadrados na última passagem)

$$\begin{aligned} \frac{b^2 z^2}{\lambda^2} &= b^2 x^2 + (ax + 1)^2 \\ &= (a^2 + b^2)x^2 + 2ax + 1 \\ &= (a^2 + b^2) \left[\left(x + \frac{a}{a^2 + b^2} \right)^2 - \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right)^2 \right] + 1. \end{aligned}$$

Portanto, a intersecção é a hipérbole

$$\frac{b^2}{\lambda^2} z^2 - (a^2 + b^2) \left(x + \frac{a}{a^2 + b^2} \right)^2 = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \spadesuit$$

Afirmção 2. As soluções de (**) são, dependendo do parâmetro c , parábolas, elipses, circunferências e hipérbolas.

Prova.

Do cálculo efetuado para δ encontramos

$$\Delta = 4c^2\lambda^2(a^2 + b^2 - c^2\lambda^2).$$

Como o caso $c = 0$ já foi analisado, resta estudarmos o caso $c \neq 0$.

Neste caso temos

$$4c^2\lambda^2 > 0$$

e é suficiente analisarmos a expressão $a^2 + b^2 - c^2\lambda^2$. Pelo Teorema 3.8 a quádrlica obedece às classificações abaixo.

- (i) Uma hipérbole, se $a^2 + b^2 - c^2\lambda^2 > 0$, isto é, $|c\lambda| < \sqrt{a^2 + b^2}$.
- (ii) Uma parábola se $a^2 + b^2 - c^2\lambda^2 = 0$, isto é, $|c\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- (iii) Uma circunferência se e somente se $2ab = 0$ e $a^2 - c^2\lambda^2 = b^2 - c^2\lambda^2$. Isto é, $a = b = 0$.
- (iv) Uma elipse se $a^2 + b^2 - c^2\lambda^2 < 0$ e, ou $2ab \neq 0$ ou $a^2 - c^2\lambda^2 \neq b^2 - c^2\lambda^2$.

Porém, temos

$$\begin{aligned} |c\lambda| < \sqrt{a^2 + b^2} &\Leftrightarrow c^2\lambda^2 < a^2 + b^2 \\ &\Leftrightarrow c^2\lambda^2 + \lambda^2(a^2 + b^2) < a^2 + b^2 + \lambda^2(a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} |c\lambda| < \sqrt{a^2 + b^2} &\Leftrightarrow \lambda^2(a^2 + b^2 + c^2) < (1 + \lambda^2)(a^2 + b^2) \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} < \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \end{aligned}$$

Finalmente, observando que variando o parâmetro c admitimos apenas ângulos β tais que

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

concluimos que $\cos \beta < 1$. Ainda, de

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

temos $0 < \cos \alpha < 1$.

Concluimos então que

$$\begin{aligned} |c\lambda| < \sqrt{a^2 + b^2} &\Leftrightarrow 0 < \cos \alpha < \cos \beta < 1 \\ &\Leftrightarrow 0 < \beta < \alpha, \end{aligned}$$

pois a função cosseno é decrescente no intervalo

$$\left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Temos resultados análogos ao trocarmos o símbolo $<$ por $>$ ou $=$.

Notemos que vale $a = b = 0$ se e somente se $\beta = \frac{\pi}{2}$.

Provamos então que a quádrlica é um entre os seguintes tipos.

- (i) Uma hipérbole se $0 < \beta < \alpha$.
- (ii) Uma parábola se $\beta = \alpha$ (o plano π é paralelo a uma geratriz).
- (iii) Uma circunferência se $\beta = \frac{\pi}{2}$ (o plano π é perpendicular ao eixo).
- (iv) Uma elipse se $\alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ ♣

3.5 Apêndice: Invariância do Indicador de Degenerescência

Fixemos uma quádrlica dada pela equação (3.1.1) e mantenhamos a notação.

Proposição 3.5 *δ é invariante por rotação.*

Prova.

Dada uma quádrlica como em (3.1.1), consideremos uma rotação qualquer e a correspondente quádrlica

$$A'u^2 + B'uv + C'v^2 + D'u + E'v + F'.$$

Utilizando as fórmulas para a mudança de coeficientes, computemos $A'E'^2 + C'D'^2 - B'D'E'$.

Inicialmente, notemos que

$$\begin{cases} D'^2 = D^2 \cos^2 \theta + DE \sin 2\theta + E^2 \sin^2 \theta \\ E'^2 = D^2 \sin^2 \theta - DE \sin 2\theta + E^2 \cos^2 \theta, \end{cases}$$

Seguem então

$$\begin{aligned} A'E'^2 &= (A \cos^2 \theta + B \sin \theta \cos \theta + C \sin^2 \theta) \\ &\quad \cdot (D^2 \sin^2 \theta - DE \sin 2\theta + E^2 \cos^2 \theta) \\ &= AD^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - ADE \sin 2\theta \cos^2 \theta \\ &\quad + AE^2 \cos^4 \theta + BD^2 \sin^3 \theta \cos \theta \\ &\quad - BDE \sin 2\theta \sin \theta \cos \theta + BE^2 \sin \theta \cos^3 \theta \\ &\quad + CD^2 \sin^4 \theta - CDE \sin 2\theta \sin^2 \theta \\ &\quad + CE^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C'D'^2 &= (A \operatorname{sen}^2 \theta - B \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta) \\
 &\quad \cdot (D^2 \cos^2 \theta + DE \operatorname{sen} 2\theta + E^2 \operatorname{sen}^2 \theta) \\
 &= AD^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \\
 &\quad + ADE \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen}^2 \theta \\
 &\quad + AE^2 \operatorname{sen}^4 \theta \\
 &\quad - BD^2 \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta \\
 &\quad - BDE \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\
 &\quad - BE^2 \operatorname{sen}^3 \theta \cos \theta \\
 &\quad + CD^2 \cos^4 \theta \\
 &\quad + CDE \operatorname{sen} 2\theta \cos^2 \theta \\
 &\quad + CE^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta,
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 B'D'E' &= [(C - A) \operatorname{sen} 2\theta + B \cos 2\theta](D \cos \theta + E \operatorname{sen} \theta) \\
 &\quad \cdot (-D \operatorname{sen} \theta + E \cos \theta) \\
 &= [(C - A) \operatorname{sen} 2\theta + B \cos 2\theta] \\
 &\quad \cdot [-D^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + DE(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) + E^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta] \\
 &= -(C - A)D^2 \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\
 &\quad + (C - A)DE \operatorname{sen} 2\theta \cdot \cos 2\theta \\
 &\quad + (C - A)E^2 \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\
 &\quad - BD^2 \cos 2\theta \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\
 &\quad + BDE \cos^2 2\theta \\
 &\quad + BE^2 \cos 2\theta \operatorname{sen} \theta \cos \theta.
 \end{aligned}$$

Assim, encontramos a identidade

$$\begin{aligned}
-B'D'E' &= 2CD^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta - 2AD^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \\
&\quad - CDE \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta + ADE \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta \\
&\quad - 2CE^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + 2AE^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta \\
&\quad + BD^2 \cos 2\theta \operatorname{sen} \theta \cos \theta - BDE \cos^2 2\theta \\
&\quad - BE^2 \cos 2\theta \operatorname{sen} \theta \cos \theta.
\end{aligned}$$

Agora computemos $A'E'^2 + C'D'^2$. Achamos

$$\begin{aligned}
A'E'^2 + C'D'^2 &= 2AD^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta - ADE \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta \\
&\quad + AE^2 (\operatorname{sen}^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
&\quad - BD^2 \cos 2\theta \operatorname{sen} \theta \cos \theta - BDE \operatorname{sen}^2 2\theta \\
&\quad + BE^2 \cos 2\theta \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\
&\quad + CD^2 (\operatorname{sen}^4 \theta + \cos^4 \theta) + CDE \operatorname{sen} 2\theta \cos 2\theta \\
&\quad + 2CE^2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta.
\end{aligned}$$

Somando $A'E'^2 + C'D'^2$ e $-B'D'E'$ os termos em AD^2 , ADE , BD^2 , BE^2 , CDE e CE^2 se cancelam e então obtemos

$$\begin{aligned}
A'E'^2 + C'D'^2 - B'D'E' &= AE^2 (\operatorname{sen}^4 \theta + 2 \operatorname{sen}^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^2 \theta) \\
&\quad - BDE (\operatorname{sen}^2 2\theta + \cos^2 2\theta) \\
&\quad + CD^2 (\operatorname{sen}^4 \theta + 2 \operatorname{sen}^2 \theta + \cos^4 \theta) \\
&= AE^2 + CD^2 - BDE.
\end{aligned}$$

Entretanto vale a identidade

$$(B'^2 - 4A'C')F' = \Delta F$$

pois F e Δ são invariantes por rotação. Fim da prova.♣

Notação. Dada a equação (3.1.1) e um vetor $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ denotamos

$$Q(h, k) = Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F.$$

Proposição 3.6 δ é invariante por translações.

Prova.

Consideremos uma quádrlica como em (3.1.1) e efetuemos uma translação pelo vetor $\vec{v} = (h, k)$. Sejam $u = x - h$ e $v = y - k$. Substituindo em (3.1.1) temos

$$\begin{aligned} & Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F \\ &= A(u+h)^2 + B(u+h)(v+k) + C(v+k)^2 + D(u+h) + E(v+k) + F \\ &= Au^2 + Buv + Cv^2 + (2Ah + Bk + D)u + (Bh + 2Ck + E)v + Q(h, k). \end{aligned}$$

Computando δ obtemos

$$\begin{aligned} \delta &= A(2Ck + Bh + E)^2 + C(2Ah + Bk + D)^2 \\ &\quad - B(2Ah + Bk + D)(2Ck + Bh + E) + (B^2 - 4AC)Q(h, k) \\ &= [(4AC^2k^2 + AB^2h^2 + AE^2) + (4ABC hk + 4ACEk + 2ABEh)] \\ &\quad + [(4CA^2h^2 + CB^2k^2 + CD^2) + (4ABC hk + 4ACDh + 2BCDk)] \\ &\quad - B(4AC hk + 2ABh^2 + 2AEh + 2BCK^2 \\ &\quad + B^2hk + BEk + 2CDk + BDh + DE) \\ &\quad + B^2(Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F) \\ &\quad - 4AC(Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F). \end{aligned}$$

Evidenciemos h^2 , hk , k^2 , h e k . Evidenciemos também o termo livre em relação a h e k . Obtemos

$$\begin{aligned} \delta &= (AB^2 + 4CA^2 - 2AB^2 + B^2A - 4A^2C)h^2 \\ &\quad + (4ABC + 4ABC - 4ABC - B^3 + B^3 - 4ABC)hk \\ &\quad + (4AC^2 + CB^2 - 2B^2C + B^2C - 4AC^2)k^2 \\ &\quad + (2ABE + 4ACD - 2ABE - B^2D + B^2D - 4ACD)h \\ &\quad + (4ACE + 2BCD - B^2E - 2BCD + B^2E - 4ACE)k \\ &\quad + (AE^2 + CD^2 - BDE + B^2F - 4ACF) \\ &= AE^2 + CD^2 - BDE + \Delta F \clubsuit \end{aligned}$$

Referências Bibliográficas

- [1] Boulos, Paulo: *Geometria Analítica (Um Tratamento Vetorial)*,
- [2] Boyer, Carl B: *História da Matemática*, Ed. Edgard Blücher Ltda, (1974).
- [3] Burns, E. Mcnall: *História da Civilização Ocidental*, Volume 1, 2ª edição, Editora Globo, (1968).
- [4] Halmos, Paul R. : *Teoria Ingênua dos Conjuntos*, EDUSP e Ed. Polígono, (1973).
- [5] Jennings, George: *Modern Geometry with Applications*, Springer-Verlag, New York, Universitex, (1994).
- [6] Simmons, G.: *Cálculo com Geometria Analítica*, Volume 2, Ed. McGraw-Hill, (1987).
- [7] Stewart, James: *Cálculo*, Volume 2, 5ª edição, Ed. Thomson Learning, (1983).