DUPLO PRODUTO VETORIAL
VETORES E GEOMETRIA ANALÍTICA- MAT105
INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS
Primeiro semestre de 2016
Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Dados três vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$, computemos o vetor

$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} \ .$$

Se $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ é LD, sabemos que $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ e portanto

$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} \ = \ \overrightarrow{0}.$$

Se $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$ é LI, sabemos que $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ é um vetor ortogonal aos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{u}$. Então, como o vetor duplo produto vetorial $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w}$ é, por definição, ortogonal ao vetor $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ segue que o vetor duplo produto vetorial é uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$. Assim sendo, para orientar os cálculos à frente, note que existem λ e μ em $\mathbb{R}$ tais que:

$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} \ = \ \lambda\overrightarrow{u} \ + \ \mu\overrightarrow{v} \ .$$

Sejam então $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})_j$, com $j = 1, 2, 3$, as coordenadas do vetor $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$. Então temos,

$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} \ = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})_1 & (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})_2 & (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} .$$

Computando a primeira coordenada de $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w}$ encontramos a expresão

$$\Big[\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w}\Big]_1 = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})_2 w_3 - (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})_3 w_2 \ .$$

Assim, utilizando a fórmula

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} \ = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

expandimos a expressão já obtida para a primeira coordenada como

$$
\begin{aligned}
\Big[(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w}\Big]_1 &= -(u_1v_3 - u_3v_1)w_3 \ - \ (u_1v_2 - u_2v_1)w_2 \\
&= (-v_3w_3 - v_2w_2)u_1 \ + \ (u_3w_3 + u_2w_2)v_1 \\
&= -(v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3)u_1 \ + \ (u_1w_1 + u_2w_2 + u_3w_3)v_1 \\
&= -\ (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})u_1 \ + \ (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})v_1.
\end{aligned}
$$

Procedendo analogamente em relação às demais coordenadas encontramos

$$(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} \ = \ -\ (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{u} \ + \ (\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{w})\overrightarrow{v} \ \clubsuit$$