Teorema Fundamental da Álgebra (TFA)

Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Outubro de 2013

INTRODUÇÃO HISTÓRICA

Uma Breve História dos Números Complexos

As informações históricas são, majoritariamente, extraídos de Agarwal-Perera-Pinelas [1], Milies [15] e Remmert [19].

Tais números surgiram já, ao menos, em equações do segundo grau nas tabuletas de argila da Suméria, c. 1700 a.C. A total formalização de tal campo numérico ocorreu em 1833, por W. R. Hamilton (irlandês).

O fato de um número negativo não ter raíz quadrada parece ter sido sempre conhecido pelos matemáticos que se depararam com a questão.

Heron de Alexandria (c. 75 d.C.), tentou determinar o volume de um tronco de cone, que requeria computar a raíz quadrada de $81 - 144$ (embora números negativos não fossem aceitáveis no mundo helenístico). Bhaskara Acharya (em 486 d.C.), matemático hindu, escreveu "O quadrado de um número positivo, assim como de um número negativo, é positivo: e a raíz quadrada de um número positivo é bivalente, positiva e negativa; não existe raíz quadrada de um número negativo, pois um número negativo não é um quadrado".

Entretanto, não foram as equações do segundo grau que motivaram a aceitação de tal campo numérico mas sim as de terceiro grau. As equações de segundo grau eram vistas como a formulação matemática de um problema concreto ou geométrico e se no processo de resolução surgia uma raíz quadrada de um número negativo, isto era interpretado como prova de que tal problema não tinha solução.

CRONOLOGIA DO TFA

1608 (P. Roth) - Diz que polinômios (reais) de grau n têm no máximo n raízes.

1629 (Girard, belga) - **Todo polinômio tem raíz** (numa "terra-de-ninguém").

1742 (Euler, suiço) - todo polinômio de grau n é produto de polinômios lineares e polinômios quadráticos, mas só o prova para $n \leq 6$ (vide W. Dunham, 1991).

1746 (**d'Alembert**) - buscando **integrar funções racionais**, acha uma prova díficil do TFA (ou de d'Alembert, na França), com um erro (corrigido em 1851).

1795 (Laplace) - Prova "algébrica" e bem elegante (incompleta). Reabilitada.

1797 (C. Wessel, cartógrafo norueguês-dinamarquês) - Números imaginários vistos como pontos do plano. Adição vetorial. Obra pouco notada. Reabilitada.

1798 (J. Wood) - Prova incompleta. Reabilitada em 2000.

1799 (Gauss), tese de doutorado - aponta erros nas provas anteriores e dá a 1 prova considerada correta do TFA. Tal prova contém "problemas" superados em 1920 por Ostrowski. Em 1981, Smale renova a crítica à 1 prova de Gauss.

1806 (**Argand**, suiço-francês, livreiro) - publica (à sua custa) e distribui (a poucos) um livro (sem seu nome) com a **geometria dos números imaginários** (esboçando uma prova do TFA), notações (vetor, módulo, etc.) e interpretações.

1814 (Argand) - J. Français "acha" Argand, que publica a 1 prova "correta" do TFA (polinômios com coeficientes imaginários), via teorema do mínimo (1870). Não reconhecida então, é a mais "fácil" de todas (mas, não elementar).

1816 (Gauss) - publica sua 2 prova (muito algébrica) do TFA. Tal prova é correta e usa um resultado que seria provado futuramente (o Teorema do Anulamento). Ainda em 1816, Gauss mostra sua 3 prova do TFA (usando integração).

1831 e 1849 (Gauss) - Em 1831, el cria o termo "**números complexos**" e defende seu uso. (1849) Jubileu do doutorado e sua 4 prova (coeficientes em $\mathbb{C}$).

1903 (Moritz) - Aponta erros nas provas do TFA, na maioria dos livros.

1941 (Littlewood) - Sua prova (sofisticada) elementariza a de Argand.

1956 (Estermann) - Simplifica a prova de Littlewood.

2009 (Theo de Jong, holandês) - "moderniza" a 1 prova de Gauss.

O QUE É UMA PROVA ELEMENTAR DO TFA ?

Para provarmos o TFA de forma elementar, devemos utilizar o mínimo possível de ferramentas matemáticas. Isto não significa que a prova seja simples pois muitas provas elementares não são nem simples nem fáceis. A prova que comentaremos requer as propriedades básicas de números complexos (mas não a Fórmula de Moivre) e um resultado básico apresentado no primeiro ano de cursos de Cálculo.

Tradicionalmente o TFA é provado em cursos avançados dos bacharelados de matemática e física e não raramente os alunos tem contato com tal teorema pela primeira vez na pós-graduação. Em tais cursos, via de regra o TFA é provado após o Teorema de Liouville o qual deriva da Teoria da Integração Complexa. Uma tal demonstração não é elementar e nem simples, ainda que "fácil". Muitas vezes o TFA é provado utilizando a Teoria de Galois ou a Topologia Algébrica.

Já por volta de 1800 eram conhecidas demonstrações do TFA que não faziam uso da teoria da integração mas que entretanto não eram rigorosas pois os fundamentos da análise matemática ainda não estavam estabelecidos. Uma delas, a de J. Argand, é considerada fácil mas não elementar pois faz uso da extração das raízes n-ésimas de um número complexo arbitrário. Tal operação de radiciação não é trivial. Em geral a radiciação em $\mathbb{C}$ é feita com a

$$\textsf{Fórmula de Moivre:} \quad (\cos\theta + i\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta$$

ou com a

$$\textsf{Fórmula de Euler:} \quad e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\mathrm{sen}\,y).$$

Por exemplo, se $w = re^{i\theta}$, onde $r \geq 0$, é um número complexo arbitrário, então o número $z = \sqrt[n]{r}\,e^{i\frac{\theta}{n}}$ é uma raíz enésima de w pois

$$z^n = \left[\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}\right]^n = re^{ni\frac{\theta}{n}} = re^{i\theta} = w.$$

A grosso modo, uma função (ou número) é algébrica (algébrico) se é obtível com uma combinação finita das operações de soma, subtração, multiplicação e radiciação. Uma função (número) é transcendental se não é algébrica. Os números

e e π e as funções trigonométricas e exponencial são transcendentais e em geral os formalizamos com a teoria de séries infinitas ou equações diferenciais.

Assim, as provas do TFA (um teorema sobre radiciação) que utilizam a radiciação arbitrária de um número complexo arbitrário não são elementares e, além disso, empregam um **raciocínio circular**.

Evidentemente, as provas do TFA que utilizam derivação e/ou integração não são elementares. Similarmente, as provas do TFA que utilizam trigonometria/ângulo também não são elementares. Vejamos o motivo.

As provas para as relações trigonométricas que conhecemos até o nível médio usam a intuição geométrica ao invés de fórmulas ou métodos para calcular o seno e o cosseno de um ângulo arbitrário. Notemos que sabemos como computar o seno e o cosseno do arco metade, $\sin(\theta/2)$, se soubermos calcular o seno e o cosseno do arco θ. Porém, como computar o seno ou o cosseno de um ângulo arbitrário?

Por exemplo, o cálculo dos seguintes senos e cossenos é problemático:

$$\sin 1\,,\ \sin 2\,,\ \sin 3\,, \sin 90\,, ... \cos 1\,,\ \cos 3\,, \cos 5\,,\ \cos 8\,, ...\ \sin\sqrt{2}\,,\ \cos\sqrt{3}\ \text{ etc.}$$

Lembremos que acima $1, 2, 3, 5, 8, 90, \sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ são números reais e não graus ou radianos. Assim, apesar que temos $\sin(\pi/2) = 1$ não temos $\sin 90 = 1$.

Mas então, quem são estas funções $\sin\theta$ e $\cos\theta$? Eis a resposta:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots,\ \text{para todo real}\ \ x$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots\ \ ,\ \text{para todo real}\ \ x.$$

Notemos também que várias das provas do TFA são feitas por absurdo e que esta técnica é conceitualmente sofisticada.

A extração de raízes quadradas de um número complexo arbitrário é admissível pois as fórmulas para as raízes quadradas de um número complexo arbitrário são facilmente deduzíveis, Ainda mais, é bem conhecido (desde os babilônios) um método para extrair raízes quadradas de reais positivos.

A PROVA DO TEOREMA FUNDAMENTAL DA ÁLGEBRA

ESTRATÉGIA

Dividamos a prova em duas partes.

- A primeira parte é a mais profunda, usa a **completude de** $\mathbb{R}$, e é considerada fácil de provar. Nela utilizamos um teorema sobre mínimos.
- A segunda parte é conceitualmente simples, porém mais difícil de provar. Nesta parte provamos que dado um polinômio complexo e não constante P então o valor da função $|P| = |P(z)|$ em seu ponto de mínimo global é zero.

PRELIMINARES

Discos no Plano

Dado um ponto $P = (a,b)$ em $\mathbb{R}^2$, o conjunto dos pontos do plano cuja distância ao ponto P é menor ou igual a R é chamado de disco (fechado e limitado) de centro (a,b) e raio R. Notação:

$$D(P;R) = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \leq R\Big\}.$$

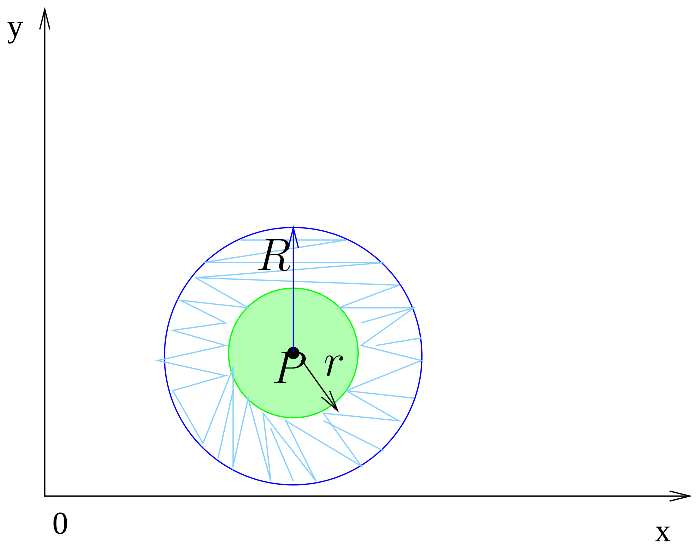

Figura 1: Dois discos (fechados e limitados) centrados em P, de raios r e R.

Adição e Multiplicação por Escalar Real: Interpretação Geométrica.

Seja $z = a + bi$, $w = c + di$, com a, b, c, d números reais. Seja λ um escalar real.

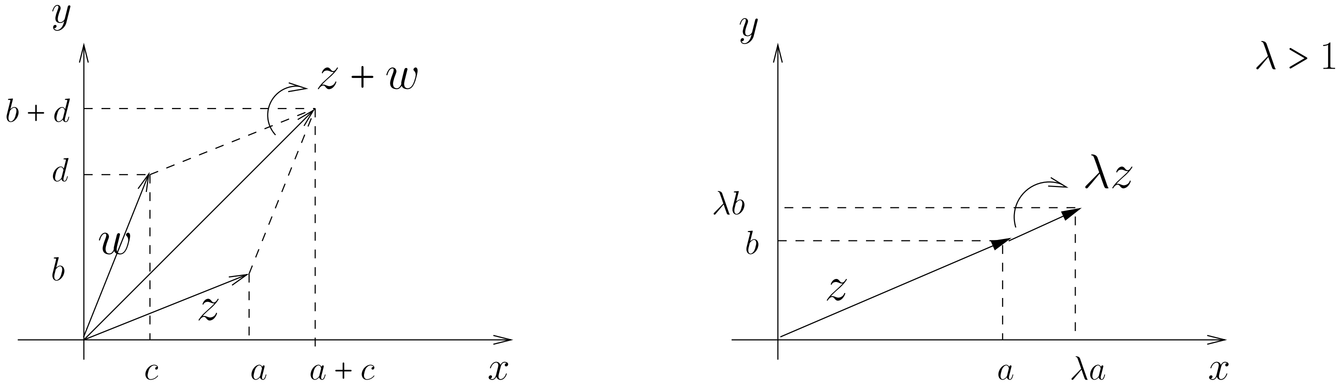

Figura 2: Adição e Multiplicação por Escalar Real

Notemos que, vide figura acima,

$$z + w = (a + c) + i(b + d) \qquad \text{e} \qquad \lambda z = \lambda a + i\lambda b \ .$$

Para **Argand**, na reta real (unidimensional), multiplicar por $\lambda > 0$ corresponde a um "zoom" (esticar ou diminuir) de fator λ. Se $\lambda = -1$ temos uma reflexão.

No plano (dimensão dois), multiplicar por $\lambda = -1$ pode ser interpretado como uma rotação de 180°. Então, interpretamos a identidade

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1,$$

como a composição de duas rotações gerando a rotação de 180°. Assim, $\sqrt{-1}$ corresponde a uma rotação de 90°. Logo, $\sqrt{-1} = \sqrt{-1}.1$ é o ponto do plano que se obtém girando o número 1 por 90° no sentido anti-horário.

O Conjugado e o Módulo.

Dado um número complexo $z = a + bi$, com $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$, chamamos o número a de parte real de z e o número b de parte imaginária de z:

$$\mathrm{Re}(z) = a \qquad \text{e} \qquad \mathrm{Im}(z) = b\ .$$

O conjugado de z é $\quad \overline{z} = a - bi.$

O módulo de z é $\quad |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$

Propriedades:

$$\mathrm{Re}(\mathbf{z}) = \mathrm{Re}(\overline{\mathbf{z}}) \quad \text{e} \quad |\mathbf{zw}| = |\mathbf{z}|\,|\mathbf{w}|.$$

Identidade Básica

Dados z e w em $\mathbb{C}$, obtemos

$$|z + w|^2 = (z + w)\overline{(z + w)} = (z + w)(\overline{z} + \overline{w})$$

$$= |z|^2 \ + \ z\overline{w} \ + \ w\overline{z} \ + \ |w|^2.$$

Assim,

$$|\mathbf{z} + \mathbf{w}|^{\mathbf{2}} \ = \ |\mathbf{z}|^{\mathbf{2}} \ + \ \mathbf{2}\mathrm{Re}[\mathbf{z}\overline{\mathbf{w}}] \ + \ |\mathbf{w}|^{\mathbf{2}}.$$

Desigualdades Triangulares.

Dados $z \in \mathbb{C}$ e w em $\mathbb{C}$ valem as desigualdades

$$|z+w| \;\leq\; |z|+|w| \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad \big||z|-|w|\big| \;\leq |z+w| \;,$$

as quais interpretamos, respectivamente, como (vide figura abaixo):

O comprimento de um lado de um triângulo é menor que a soma, e maior que a diferença, dos comprimentos dos outros dois lados do triângulo.

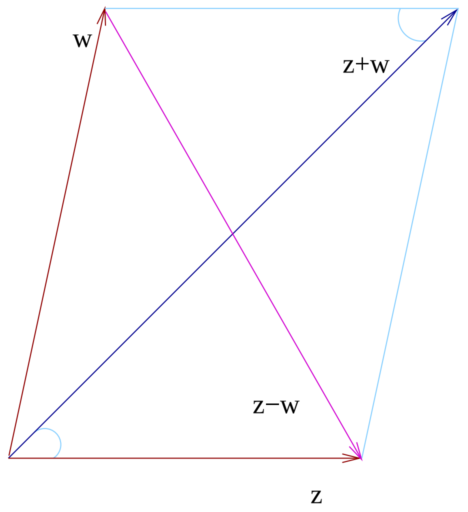

Figura 3: Ilustrando $\big||\mathbf{z}|-|\mathbf{w}|\big| \;\leq\; |\mathbf{z} \pm \mathbf{w}| \;\leq\; |\mathbf{z}|+|\mathbf{w}|$

Sejam $z_1,\ldots,z_n \in \mathbb{C}$. Aplicando tais desigualdades sucessivamente obtemos:

$$|\mathbf{z_1}|-|\mathbf{z_2}|-\ldots-|\mathbf{z_n}| \quad\leq\quad |\mathbf{z_1}+\ldots+\mathbf{z_n}| \quad\leq\quad |\mathbf{z_1}|+\ldots+|\mathbf{z_n}|.$$

O Limite de um Polinômio, no Infinito.

Dado um polinômio complexo de grau n (com coeficientes complexos),

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\,, \quad a_n \neq 0\,,$$

com as desigualdades triangulares encontramos

$$|P(z)| \;\geq\; |a_n||z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \cdots - |a_1||z| - |a_0|.$$

Donde (argumentando com a variável real $|z|$),

$$\lim_{|\mathbf{z}| \to +\infty} |\mathbf{P(z)}| \;=\; +\infty.$$

Translação na variável, para o polinômio $P(z)$.

Fixemos z_0, um número complexo qualquer. Então,

$$P(z+z_0) \;\text{ é }\; \begin{cases} \text{um polinômio na variável z e de mesmo grau que } P(z), \\ \text{cujo termo independente é } P(z_0), \\ \text{e com mesmo termo dominante que } P(z). \end{cases}$$

Exemplo. Seja $P(z) = \mathbf{7}z^3 + 5z^2 + 3z + 2$ e $z_0 = \mathbf{10}$. Então,

$$\begin{aligned} P(z+\mathbf{10}) \;&=\; 7(z+10)^3 + 5(z+10)^2 + 3(z+10) + 2 = \\ &=\; 7(z^3 + 30z^2 + 300z + 1000) + 5(z^2 + 20z + 100) + 3(z+10) + 2 = \\ &=\; \mathbf{7}z^3 + 215z^2 + 2203z + \mathbf{7532}\ . \end{aligned}$$

O Monômio de Menor Grau (não nulo) de um Polinômio (não constante).

Exemplo.

Dado $P(z) = 7z^4 + 5z^3 + 3z^2 + 2$, destacamos o monômio $\mathbf{z^2}$:

$$P(z) = 2 + \mathbf{z^2}(3 + 5z + 7z^2)\ .$$

INÍCIO DA DEMONSTRAÇÃO

Assumiremos a continuidade dos polinômios complexos e as seguintes consequências da completude de $\mathbb{R}$:

- Toda função contínua $f : D \to \mathbb{R}$, D um disco fechado e limitado em $\mathbb{R}^2$, assume um valor mínimo em algum ponto em D (Teorema de Weierstrass).
- Existência de raízes quadradas de números positivos.

Raízes Quadradas

Como é sabido, a equação $z^2 = a + ib$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, é solúvel em $\mathbb{C}$ e temos

$$\pm z = \sqrt{\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}} \; + \; i\mathrm{sgn}(b)\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}}\,,$$

$$\text{onde o signal de } b \text{ é } \mathrm{sgn}(b) = \frac{b}{|b|} \text{ se } b \neq 0\,,\ \text{ e } \mathrm{sgn}(0) = 1.$$

Aplicando tal fórmula sucessivamente obtemos

$$\text{todas as } 2^j - \text{raízes}\,, j \in \mathbb{N}\,,\ \text{de } z = \pm 1 \text{ e } z = \pm i\ .$$

Com tal fórmula obtemos as duas raízes quadradas de $+1$, -1, $+i$ e $-i$.
Em seguida obtemos as quatro raízes quartas de $+1$, -1, $+i$ e $-i$.
Em seguida obtemos as oito raízes oitavas de $+1$, -1, $+i$ e $-i$.
Em seguida as 16 raízes de ordem 16 de $+1$, -1, $+i$ e $-i$ e assim por diante...

Teorema Fundamental da Álgebra. Seja $P(z)$ um polinômio complexo e não constante. Então,

(A) Existe z_0 em $\mathbb{C}$ tal que

$$|P(z)| \geq |P(z_0)|, \text{ para todo } z \text{ em } \mathbb{C}.$$

(B) Para tal z_0 temos $P(z_0) = 0$.

Prova.

Seja $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$, com $\text{grau}(P) = n \geq 1$ e $a_n \neq 0$.

(A) Já vimos que

$$\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty \ .$$

Assim, existe um raio $R > 0$ tal que

$$|P(z)| > |P(0)| \quad \text{se} \quad |z| > R.$$

A função $|P(z)|$ restrita ao disco fechado e limitado $D(0;R)$ (abaixo) é contínua e, pelo Teorema de Weierstrass, assume um valor mínimo em algum

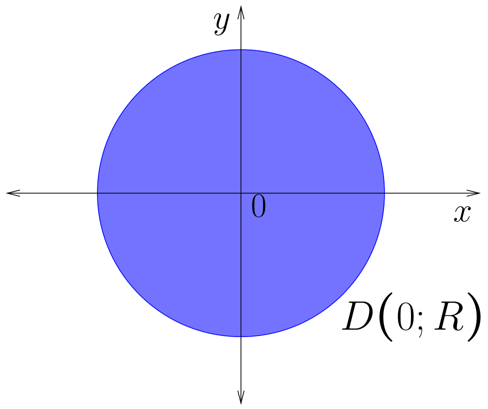

Figura 4: O disco fechado (e limitado) centrado na origem e de raio R.

ponto z_0 no disco $D(0;R)$. Isto é, temos

$$|P(z)| \geq |P(z_0)|\,, \text{ se } |z| \leq R.$$

Também temos $|P(0)| \geq |P(z_0)|$ já que 0 pertence a $D(0;R)$. Donde segue

$$|P(z)| \geq |P(z_0)|\,, \text{ para todo } z \text{ em } \mathbb{C}.$$

A prova da afirmação (A) está encerrada.

Duas simplificações e uma notação para provarmos (B).

(1) O polinômio $z \mapsto P(z+z_0)$ tem grau n, coeficiente dominante a_n e termo independente $P(z_0)$. Escrevamos

$$P(z+z_0) = P(z_0) + b_1 z + \cdots + b_{n-1}z^{n-1} + b_n z^n\,, \qquad \text{com } b_{j's} \in \mathbb{C}\,, \text{e } b_n = a_n.$$

Portanto, podemos assumir que $z_0 = 0$. Dessa forma temos

$$(1) \qquad |P(z)|^2 \;\geq\; |P(0)|^2\,, \text{ para todo } z \text{ em } \mathbb{C}.$$

(2) Sendo $P(z) = P(0) + b_1 z + \cdots + b_n z^n$ não constante, existe o menor inteiro $k \in \{1,\ldots,n\}$ tal que o coeficiente b_k é não nulo. Simplificamos

$$(2) \qquad P(z) = P(0) + z^k Q(z)\,, \text{ onde } Q \text{ é um polinômio e } Q(0) = b_k \neq 0\,.$$

A notação usual para o círculo unitário centrado na origem é:

$$\mathbf{S^1} = \{\omega \in \mathbb{C} \text{ tal que } |\omega| = 1\}\;.$$

(B) Para todo $r \geq 0$ e para todo ω em S^1 temos, utilizando (1) e (2),

$$|P(r\omega)|^2 \geq |P(0)|^2 \quad \text{e} \quad P(r\omega) = P(0) + r^k\omega^k Q(r\omega).$$

Substituindo obtemos

$$\left[\, P(0) + r^k\omega^k Q(r\omega)\, \right]\left[\, \overline{P(0) + r^k\omega^k Q(r\omega)}\, \right] \; - \; \left|P(0)\right|^2 \geq 0\,,$$

que simplificando acarreta

$$2r^k\mathrm{Re}\left[\overline{P(0)}\omega^k Q(r\omega)\,\right] + r^{2k}\left|Q(r\omega)\right|^2 \geq 0\,, \qquad \forall r \geq 0,\ \forall \omega \in S^1.$$

A seguir, fixando ω em S^1 e dividindo por $r^k > 0$ obtemos

$$2\mathrm{Re}\left[\, \overline{P(0)}\, Q(r\omega)\omega^k\, \right] \; + \; r^k\left|Q(r\omega)\right|^2 \; \geq 0\,, \qquad \forall r > 0,$$

com a expressão no lado esquerdo contínua em $r \in [0, +\infty]$. Donde, em $r = 0$,

(3) $$2\mathrm{Re}\left[\, \overline{P(0)}Q(0)\,\omega^k\, \right] \geq 0\,, \qquad \text{para todo } \omega \text{ em } S^1.$$

Seja $\alpha = \overline{P(0)}Q(0)$. Fatorando potências de 2 temos $k = 2^j m$, com m ímpar. Façamos quatro escolhas para ω na desigualdade (3).

Escolhendo $\omega = 1$ obtemos $\mathbf{Re}(\alpha) \geq \mathbf{0}$.

Escolhendo ω tal que $\omega^{2^j} = -1$, obtemos $\omega^k = \left(\omega^{2^j}\right)^m = (-1)^m = -1$ e concluímos $\mathbf{Re}[\alpha] \leq \mathbf{0}$. Até aqui temos $\mathbf{Re}[\alpha] = \mathbf{0}$.

Determinando ω tal que $\omega^{2^j} = i$ obtemos

$$\omega^k = \left(\omega^{2^j}\right)^m = i^m = \pm i \quad \text{e} \quad \overline{\omega}^k = \mp i$$

e então, substituindo tais ω e $\overline{\omega}$ em (3), obtemos duas desigualdades:

$$\mathbf{Re}[\pm\,\alpha\mathbf{i}] = \mp\,\mathbf{Im}[\alpha] \geq \mathbf{0}.$$

Donde segue $\alpha = 0$. Finalmente, como $Q(0) \neq 0$, temos $P(0) = 0$.

A prova de (B) está encerrada. A prova do TFA está completa$\blacksquare$

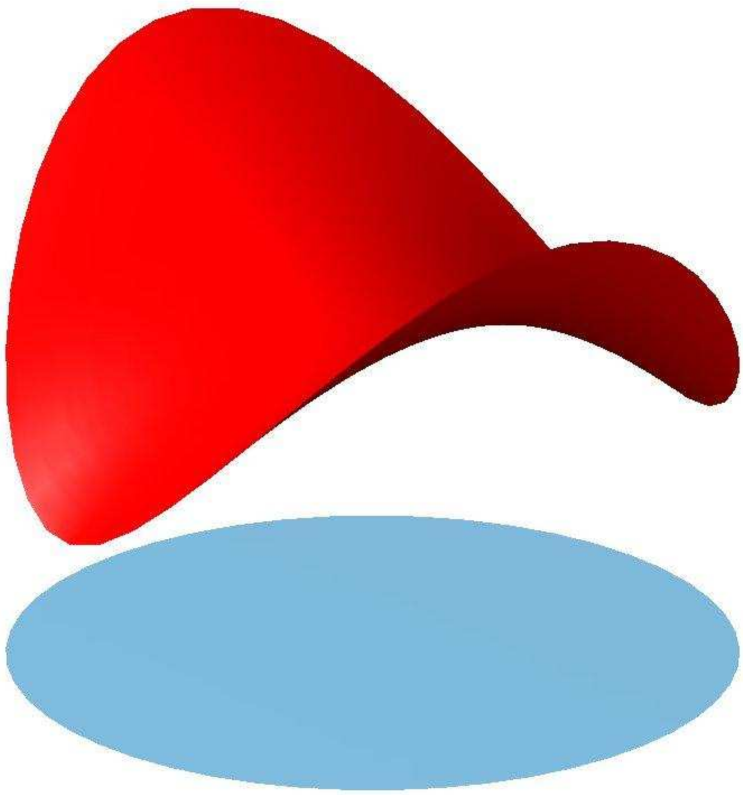

Figura 5: O gráfico da função $|\cos z|, |z| < 1$

Referências:

[1] Agarwal, R. P., Perera, K. and Pinelas, S., *An Introduction to Complex Analysis* Springer, 2011.

[2] Argand, J. R., "Réflexions sur la nouvelle théorie des imaginaires, suivies d'une application à la démonstration d'un théorème d'analyse", *Annales de Mathe mátiques Pures et Appliquées*, tome 5 (1814-1815), p. 197-209.

[3] Brenner, J. L., and Lyndon, R. C., "Proof of the Fundamental Theorem of Algebra", *Amer. Math. Monthly*, Vol 88, No. 4 (April 1981), pp. 253-256.

[4] Burckel, R. B., "Fubinito (Immediately) Implies FTA", *The American Mathematical Monthly*, Vol 113, No. 4 (April 2006), pp. 344-347.

[5] Burckel, R. B., "A classical proof of the Fundamental Theorem of Algebra dissected", *Mathematical Newsletter of the Ramanujan Mathematical Society*, Vol 7, No. 2 (2007), pp. 37-39.

[6] Cauchy, A. L., *Cours d'Analyse*, Vol VII, Première Partie, Chapitre X, Editrice CLUEB, Bologna 1990.

[7] Chrystal, G., *Algebra, An Elementary Text-book*, Part I, sixth edition, Chelsea Publishing Company, New York, N.Y., 1952.

[8] Estermann, T., "On The Fundamental Theorem of Algebra", *Journal of The London Mathematical Society*, 31 (1956), pp. 238-240.

[9] Fefferman, C., "An Easy Proof of the Fundamental Theorem of Algebra", *The American Mathematical Monthly*, Vol. 74, No. 7. (Aug. - Sep., 1967), pp. 854-855.

[10] Fine, B. and and Rosenberger, G., *The Fundamental Theorem of Algebra*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[11] Jong, Theo de, "Lagrange Multipliers and the Fundamental Theorem of Algebra", *The American Mathematical Monthly*, Vol 116, Nov. 2009, 828-830.

[12] Kochol, M., "An e Elementary Proof of the Fundamental Theorem of Algebra", *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30 (1999), pp. 614-615.

[13] Körner, T. W., "On The Fundamental Theorem of Algebra", *The American Mathematical Monthly*, Vol 113, No. 4 (April 2006), pp. 347-348.

[14] Littlewood, J. E., “Mathematical notes (14): Every polynomial has a root”, *Journal of The London Mathematical Society* 16 (1941), pp. 95-98.

[15] Milies, F. C. P., “A Emergência dos Números Complexos” - Notas de aula.

[16] Oliveira, O. R. B., “The Fundamental Theorem of Algebra: An Elementary and Direct Proof”, *The Mathematical Intelligencer* Vol 33, No 2 (2011), pp. 1-2.

[17] Oliveira, O. R. B., “The Fundamental Theorem of Algebra: From the Four Basic Operations”, *arXiv*: 1110.0165v1 [math.CA] 2 Oct 2011.

[18] Redheffer, R. M., “What! Another Note Just on the Fundamental Theorem of Algebra?”, *Amer. Math. Monthly*, Vol 71, No. 2. (Feb., 1964), pp. 180-185.

[19] Remmert, R., “The Fundamental Theorem of Algebra”, in H. -D. Ebbinghaus, et al., eds., *Numbers*, Graduate Texts in Mathematics, no. 123, Springer-Verlag, New York, 1991, Chapters 3 and 4.

[20] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Inc, Tokyo, 1963.

[21] Searcóid, M. O., *Elements of Abstract Analysis*, Springer-Verlag, London 2003.

[22] Smithies, F., “A forgotten paper on The Fundamental Theorem of Algebra”, *Notes and Recods of the Royal Society of London*, Vol. 54, No. 3, September 2000, pp. 333-341.

[23] Spivak, M., *Calculus*, 4th edition, Publish or Perish, Inc., 2008.

[24] Stillwell, J., *Mathematics and its History*, Springer-Verlag, New York, 1989, pp. 266-275.

[25] Terkelsen, F. “The Fundamental Theorem of Algebra”, *The American Mathematical Monthly*, Vol 83, No. 8. (October, 1976), p. 647.

[26] Vaggione, D., “On the Fundamental Theorem of Algebra”, *Colloquium Mathematicum*, Vol 73 (1997), p. 193-194.

[27] Vaggione, D., Errata to “On the Fundamental Theorem of Algebra”, *Colloquium Mathematicum*, Vol 73 (1998), p. 321.

[28] Výborný, R., “A simple proof of the Fundamental Theorem of Algebra”, *Mathematica Bohemica*, Vol 135, No. 1 (2010), p. 57-61.