

DISTÂNCIA ENTRE RETAS REVERSAS
 MAT105 - Geometria Analítica - Instituto de Geociências
 Primeiro semestre de 2016
 Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Sejam r e s duas retas reversas. Isto é, r e s não são coplanares. Mostre que

- (a) Existem **um único ponto** $A \in r$ e **um único ponto** $B \in s$ tais que

$$\overline{AB} \perp r \quad \text{e} \quad \overline{AB} \perp s.$$

Isto é, o segmento \overline{AB} é perpendicular à reta r e à reta s .

- (b) O comprimento $d = |\overline{AB}|$ é a menor distância entre um ponto arbitrário de r e um ponto arbitrário de s .

Solução. Destaquemos que as retas r e s não são paralelas (caso contrário, r e s seriam coplanares). Logo, os vetores diretores de r e s são L.I.

- (a) **Seja π_1 o plano que contém r e é paralelo a s .** Tal plano é único.

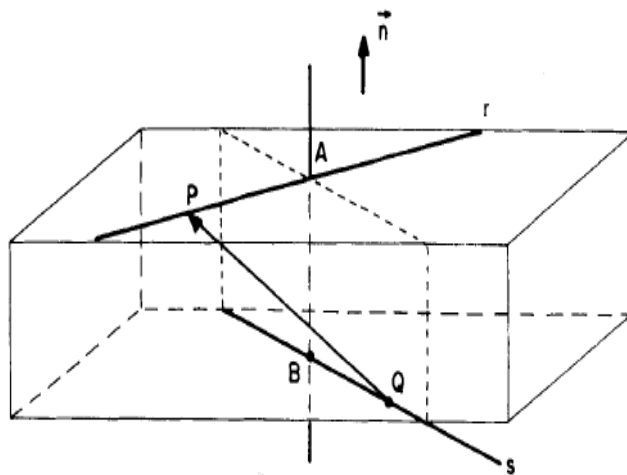
[O plano π_1 e a reta s não se intersectam. Caso contrário, temos a reta s contida no plano π_1 e então r e s são coplanares, contra a hipótese.]

Seja π_2 o plano que contém s e é paralelo a r . Tal plano é único.

[O plano π_2 e a reta r não se intersectam, analogamente ao caso acima.]

Os planos π_1 e π_2 não são idênticos, pois as retas r e s não são coplanares.

Os planos π_1 e π_2 são paralelos (ambos paralelos a r e a s) e distintos.



Seja s' a projeção da reta s sobre o plano π_1 .

As retas s e s' são paralelas pois a distância entre elas é uma constante.

As retas r e s' , contidas no plano π_1 , não são paralelas e se intersectam.

Seja r' a projeção da reta r sobre o plano π_2 .

Seja A o ponto intersecção entre as retas r e s' , no plano π_1 .

Seja B o ponto intersecção entre as retas s e r' , no plano π_2 .

A projeção do ponto A sobre o plano π_2 é um ponto que está em r' e em s .

Portanto, a projeção do ponto A é o ponto B .

Vice-versa, a projeção do ponto B sobre o plano π_1 é o ponto A .

Segue que o segmento \overline{AB} é perpendicular aos planos π_1 e π_2 .

Donde segue

$$\overline{AB} \perp r \quad \text{e} \quad \overline{AB} \perp s.$$

- (b) Seja P um ponto qualquer da reta r . Seja Q um ponto qualquer da reta s .
É evidente que a distância entre P e Q é maior ou igual à distância entre os planos π_1 e π_2 .

Donde segue

$$|\overline{PQ}| \geq d(\pi_1; \pi_2) = |\overline{AB}| \clubsuit$$