SOMA DE UM PONTO E UM VETOR: PROPRIEDADES

MAT105 - Geometria Analítica - Instituto de Geociências

1^o semestre de 2011

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

1 Definição. *Dado um ponto A e um vetor $\overrightarrow{v}$ é fácil ver que existe um único ponto B tal que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$. Chamamos o ponto B de* **soma do ponto A com o vetor $\overrightarrow{v}$**. *Notação:*

$$B = A + \overrightarrow{v} \ .$$

2 Definição. *Dado um vetor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$ pomos*

$$-\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BA} \ .$$

Indicamos, simplesmente,

$$A + (-\overrightarrow{v}) = A - \overrightarrow{v} \ .$$

3 Propriedades. *Temos as seguintes propriedades:*

(1) $A + \overrightarrow{AB} = B$

(2) $A + \overrightarrow{0} = A$

(3) $(A - \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{v} = A$

(4) $A + \overrightarrow{v} = B + \overrightarrow{v} \Longrightarrow A = B$ *(cancelamento do vetor)*

(5) $A + \overrightarrow{u} = A + \overrightarrow{v} \Longrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$ *(cancelamento do ponto)*

Prova.

(1) Pela definição, $A + \overrightarrow{AB}$ é o único ponto X tal que $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AB}$. Logo, $X = B$.

(2) Pela definição temos $A + \overrightarrow{0} = A$ já que $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}$.

(3) Definindo $A - \overrightarrow{v} = B$ temos $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{v}$ e portanto $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{v}$. Logo,

$$(A - \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{v} = B + \overrightarrow{BA} = A \ .$$

(4) **Geométrica:** Indicando $X = A + \overrightarrow{v} = B + \overrightarrow{v}$, por definição temos $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{BX}$. Assim, os segmentos $\overline{AX}$ e $\overline{BX}$ são paralelos e os pontos A, B e X são colineares (faça uma figura). Também temos $|\overline{AX}| = |\overline{BX}|$ e então, como $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{BX}$ tem mesmo sentido, temos $A = B$.

Algébrica: Escrevendo $X = A + \overrightarrow{v} = B + \overrightarrow{v}$ temos $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{v} = \overrightarrow{BX}$. Logo,

$$\overrightarrow{XA} = -\overrightarrow{v} = \overrightarrow{XB} \ .$$

Portanto, pela primeira propriedade, concluímos $A = X + \overrightarrow{XA} = X + \overrightarrow{XB} = B$.

(5) Indicando $X = A + \overrightarrow{u} = A + \overrightarrow{v}$ temos $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{u}$ e também $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{v}$. Logo, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}$.