MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT5798 - IMEUSP - 2016

Professor Oswaldo Rio Branco de Oliveira

Estas notas destinam-se aos alunos do curso Medida e Integração - MAT5798-IMEUSP - 2016 e baseiam-se 100% no livro de G. Folland, *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, second edition, John Wiley & Sons, além de uns 20% distribuídos por outros excelentes livros, citados na bibliografia, e alguns poucos artigos. Apesar de se constituírem em quase uma tradução do núcleo de apenas cinco capítulos do livro base, excetuando as maravilhosas notas e exercícios propostos, não devem ser tidas como tal visto que não sou tradutor profissional e uma boa quantidade de material foi alterada e outra introduzida. Os erros de tradução e/ou matemática são de minha responsabilidade. Para finalizar, recomendo a compra e o estudo do merecidamente famoso livro de G. B. Folland.

Capítulo 0 - INTRODUÇÃO

Capítulo 1 - MEDIDAS

Capítulo 2 - INTEGRAÇÃO

Capítulo 3 - MEDIDAS COM SINAL E DIFERENCIAÇÃO

Capítulo 4 - ESPAÇOS L^p

Capítulo 5 - MEDIDAS DE RADON

Capítulo 1

MEDIDAS

Capítulo 2

INTEGRAÇÃO

Capítulo 3

MEDIDAS COM SINAL E DIFERENCIAÇÃO

Capítulo 4

ESPAÇOS L^p

4.1 Teoria Básica dos Espaços L^p

Fixemos um espaço de medida, $(X, \mathcal{M}, \mu)$. Consideremos uma função complexa (i.e., a valores complexos) $f : X \to \mathbb{C}$ mensurável. Dado $0 < p < \infty$ definimos

$$\|f\|_p = \left[\int |f|^p \, d\mu \right]^{\frac{1}{p}} \in [0, +\infty] \quad \text{e}$$

$$L^p = L^p(X, \mathcal{M}, \mu) = \{ f : X \to \mathbb{C} \text{ tal que } f \text{ é mensurável e } \|f\|_p < \infty \},$$

No caso $p = \infty$ definimos

$$\|f\|_\infty = \inf \Big\{ M \geq 0 : \mu(\{ x : |f(x)| > M \}) = 0 \Big\}, \text{ com } \inf(\varnothing) = \infty, \text{ e}$$

$$L^\infty = L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu) = \{ f : X \to \mathbb{C} \text{ tal que } f \text{ é mensurável e } \|f\|_\infty < \infty \}.$$

Tal ínfimo é realizado (i.e., pertence ao conjunto sobre o qual é computado) pois

$$\Big\{ x : |f(x)| > M \Big\} = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ x : |\, f(x)\,| > M + \frac{1}{n} \right\}$$

e, se $M = \|f\|_\infty < \infty$, os conjuntos à direita têm medida nula. Assim, temos

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty \text{ q.s.}$$

Chamamos o valor $\|f\|_\infty$ de **supremo essencial** de $|f|$ e também escrevemos

$$\operatorname*{ess\,sup}_X |f| = \|f\|_\infty \ .$$

Se não há risco de confusão abreviamos $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ por $L^p(\mu)$, $L^p(X)$ ou L^p. Se $\|f\|_p = 0$, então $f = 0$ q.s. Por tal motivo, identificamos as funções em L^p que são iguais q.s.

Se $f : X \to [-\infty, +\infty]$ é mensurável e $|f|^p$ é integrável, então f é finita q.s. Neste caso podemos supor $f : X \to \mathbb{R}$, uma função real. Portanto, $f \in L^p(X)$.

Se A é um conjunto arbitrário não vazio, definimos $l^p(A)$ como o espaço $L^p(\mu)$ onde μ é a medida de contagem sobre $\big(A, \mathcal{P}(A)\big)$.

Se $A = \mathbb{N}$ denotamos $l^p(\mathbb{N})$ abreviadamente por l^p. Assim (cheque),

$$l^p = \left\{ x = (x_n)_{\mathbb{N}} \text{ em } \mathbb{C} : \|x\|_p = \left(\sum |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}, \text{ se } 0 < p < \infty,$$

e

$$l^\infty = \left\{ x = (x_n)_{\mathbb{N}} \text{ em } \mathbb{C} : \|x\|_\infty = \sup_n |x_n| < \infty \right\}.$$

O conjunto de funções L^p é um espaço linear complexo pois dadas duas funções $f, g \in L^p$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ é evidente que $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ e, no caso $p < \infty$, a desigualdade

$$(a+b)^p \leq \ [2\max(a,b)]^p \leq 2^p(a^p + b^p), \text{ onde } a \geq 0 \text{ e } b \geq 0,$$

mostra que $f + g \in L^p$. O caso $p = \infty$ é trivial (cheque). Veremos (no Teorema 4.2, de Minkowski) que no caso $p \geq 1$ a função $\| \,.\, \|_p$ satisfaz a desigualdade triangular e define uma norma sobre L^p. Mostremos que o mesmo não vale se $0 < p < 1$.

Se $0 < p < 1$ é elementar verificar a desigualdade

$$(1+t)^p < 1 + t^p, \text{ se } t > 0.$$

De fato, a função $1 + t^p - (1+t)^p$, para $t \geq 0$, se anula em $t = 0$ e tem derivada

$$pt^{p-1} - p(1+t)^{p-1} \ = \ pt^{p-1}\left[1 - \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{p-1}\right] > 0 \text{ se } t > 0.$$

Então, dados $a > 0$ e $b > 0$ e substituindo $t = a/b$ na desigualdade verificada tem-se

$$a^p + b^p > (a+b)^p\,, \quad \text{se} \quad a > 0,\ b > 0 \text{ e } 0 < p < 1.$$

Assim, supondo E e F dois subconjuntos de X, disjuntos e de medida positiva e finita, temos

$$\|\chi_E + \chi_F\|_p = [\,\mu(E) + \mu(F)\,]^{\frac{1}{p}} > \mu(E)^{\frac{1}{p}} + \mu(F)^{\frac{1}{p}} = \|\chi_E\|_p + \|\chi_F\|_p,$$

o que mostra que a função $\| \,.\, \|_p$ não é uma norma e em consequência muito da teoria desenvolvida para quando $p \geq 1$ não se presta ao caso $0 < p < 1$. Como os espaços L^p, com $p \geq 1$, são os mais usuais em análise focamos mais sobre eles, indicando alguns resultados válidos para o caso $0 < p < 1$.

Dada $f : X \to \mathbb{C}$, temos que $f \in L^p$ se e somente se $(\mathrm{Re\,f})^\pm \in L^p$ e $(\mathrm{Im\,f})^\pm \in L^p$. Neste capítulo todas as funções são mensuráveis.

Definição 4.1 *Dois valores p e p' são* **expoentes conjugados** *se*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,\ \textit{onde}\ 1<p\,,p'<\infty.$$

Convencionamos $p'=1$ se $p=+\infty$ e, vice-versa, $p'=+\infty$ se $p=1$.

Lema 4.1 (Desigualdade de Young). *Sejam $a,b\geq 0$ e um par de expoentes conjugados $p>1$ e $p'>1$ (i.e., ambos finitos). Então temos*

$$ab\leq\frac{a^p}{p}+\frac{b^{p'}}{p'}\qquad\left[\textit{vale a igualdade se e só se } a^p=b^{p'}\right].$$

Prova. A desigualdade de Young é trivial geometricamente. Vide gráfico abaixo.

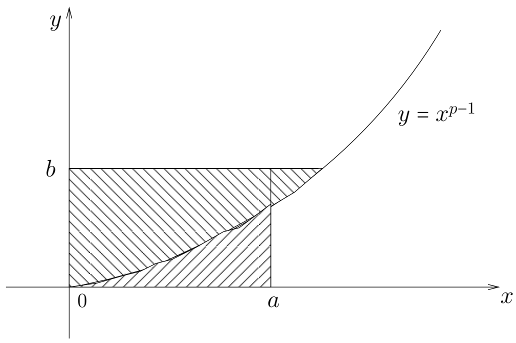

Figura 4.1: A área ab e as áreas abaixo de $y=x^{p-1}$ e de sua inversa $x=y^{p'-1}$.

Elaboremos um prova analítica. Considerando

$$c=a^p,\ d=b^{p'}\ \text{e}\ 0<\lambda=\frac{1}{p}<1$$

mostremos $c^\lambda d^{(1-\lambda)}\ \leq\ \lambda c+(1-\lambda)d$, com igualdade se e somente se $c=d$.

O caso $d=0$ é óbvio. Dividindo por $d\neq 0$ passamos a checar a desigualdade $\varphi(t)=t^\lambda-\lambda t\leq 1-\lambda$, para $t>0$, com igualdade se e só se $t=1$. É claro que $\varphi'=\lambda t^{\lambda-1}(1-t^{1-\lambda})$ é estritamente positiva em $(0,1)$ com $\varphi'<0$ em $(1,+\infty)$. Logo, $t=1$ é o único ponto de máximo absoluto e, ainda, $\varphi(1)=1-\lambda$ ♣

Teorema 4.1 (Desigualdade de Hölder). *Sejam p e p' expoentes conjugados (finitos ou não). Dadas duas funções mensuráveis f e g temos*

$$\|fg\|_1\leq\|f\|_p\,\|g\|_{p'}.$$

Em particular, dadas $f\in L^p$ e $g\in L^{p'}$ então temos $fg\in L^1$ e sob tais condições vale a igualdade na desigualdade acima se e somente

- *existem $\alpha\,,\beta\geq 0$, não ambos nulos, com $\alpha|f|^p=\beta|g|^{p'}$ q.s. (p e p' finitos).*
- *$|fg|=|f|\,\|g\|_\infty$ q.s. ($p=1$ e $p'=\infty$).*

Prova.

Admitamos $\|f\|_p$ e $\|g\|_{p'}$ não nulos e finitos, senão a desigualdade é óbvia.

O caso $p = 1$ (ou $p = \infty$). A desigualdade também é trivial, valendo a igualdade para $f \in L^1$ e $g \in L^\infty$ se e somente se

$$\int (\|g\|_\infty - |g|)|f|d\mu = 0,$$

o que ocorre se e só se o integrando (o qual é maior ou igual a 0) é nulo q.s. Isto é, $|fg| = |f|\|g\|_\infty$ q.s.

O caso p e p' finitos. Pela desigualdade de Young (Lema 4.1) segue

$$\int \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'}} d\mu \le \int \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} d\mu + \int \frac{1}{p'} \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}} d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

valendo a igualdade (cheque) se e somente se

$$\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} = \frac{|g(x)|^{p'}}{\|g\|_{p'}^{p'}} \text{ q.s.} \clubsuit$$

Teorema 4.2 (Desigualdade de Minkowski). *Seja* $p \in [1, \infty]$. *Então*

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Prova.

Podemos supor $\|f\|_p$ e $\|g\|_p$ finitos e $\|f + g\|_p \neq 0$ (cheque, é trivial).

O caso $p = 1$ segue de $|f + g| \le |f| + |g|$.

O caso $p = \infty$ segue de $|f + g| \le |f| + |g| \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ q.s.

Se $1 < p < \infty$, as desigualdades triangular e de Hölder e $p'(p-1) = p$ nos dão

$$\text{(4.2.1)} \qquad \begin{aligned} \|f+g\|_p^p &= \int |f+g|^{p-1}|f+g| \le \int |f+g|^{p-1}|f| + \int |f+g|^{p-1}|g| \\ &\le \| |f+g|^{p-1} \|_{p'} \|f\|_p + \| |f+g|^{p-1} \|_{p'} \|g\|_p \\ &= \|f+g\|_p^{p-1} (\|f\|_p + \|g\|_p). \end{aligned}$$

Por fim, dividindo por $\|f + g\|_p^{p-1}$ encontramos

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p \clubsuit$$

Comentário. Supondo (sem perda de generalidade) $g \neq 0$, as seguintes condições são necessárias e suficientes para a igualdade na desigualdade de Minkowski.

- Caso $p = 1$. A condição $\mathrm{sgn}(f) = \mathrm{sgn}(g)$ q.s. no conjunto de pontos onde $fg \neq 0$. Isto é, a condição $|fg|\,\mathrm{sgn}(f) = |fg|\,\mathrm{sgn}(g)$ q.s. Tais condições são equivalentes à condição $f|g| = g|f|$ q.s. e à condição $|f+g| = |f| + |g|$ q.s.
- Caso $1 < p < \infty$. Existe uma constante $\lambda \geq 0$ tal que $f = \lambda g$ quase sempre.
- Caso $p = \infty$. Se $f = \lambda g$, com $\lambda \geq 0$ uma constante, então vale a identidade

  $$\|f+g\|_\infty = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

  Entretanto, tal identidade não implica nenhuma condição análoga às condições encontradas nos casos $p = 1$ e $p \in (1, \infty)$.

Verificação.

◇ **Suficiência das condições.**

O caso $p = 1$. Temos $\mathrm{sgn}(f) = \mathrm{sgn}(g)$ em $\{x : fg \neq 0\}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int |f+g| &= \int_{\{x:fg\neq 0\}} |f+g| + \int_{\{x:fg=0\}} |f+g| \\
&= \int_{\{x:fg\neq 0\}} \Big||f|\,\mathrm{sgn}(f) + |g|\,\mathrm{sgn}(g)\Big| + \int_{\{x:fg=0\}} (|f| + |g|) \\
&= \int_{\{x:fg\neq 0\}} (|f| + |g|) + \int_{\{x:fg=0\}} (|f| + |g| \\
&= \int |f| + \int |g|.
\end{aligned}$$

Os casos $1 < p < \infty$ e $p = \infty$ são triviais (cheque)

◇ **Suponhamos $\|f+g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p$ (necessidade das condições).**

O caso $f + g = 0$. Então, $f = g = 0$ e nada há a provar.

O caso $f = 0$ é óbvio.

Portanto, podemos supor $f + g \neq 0$ e $f \neq 0$. Por hipótese, temos $g \neq 0$.

- O caso $p = 1$. [Notemos que se $z = a+ib$ e $a = |z|$ então $z = |z|$.] Supondo

$$\int \big(|f| + |g| - |f+g|\big) = 0,$$

temos $|f| + |g| = |f+g|$ (digamos que em todo ponto). Elevando ao quadrado segue

$$\mathrm{Re}\big[f\overline{g}\,\big] = |fg| \geq 0.$$

Logo, $f\overline{g} = |fg|$. Multiplicando por g segue $f|g|^2 = |fg|g$. Então, nos pontos em que $g \neq 0$, e nos pontos em que $g = 0$, temos $f|g| = |f|g$.

- O caso $p \in (1,\infty)$. Trocando $\|f\|_p + \|g\|_p$ por $\|f+g\|_p$ em (4.2.1) obtemos

$$\int |f+g|^{p-1}\,|f| = \|\,|f+g|^{p-1}\|_{p'}\,\|f\|_p \text{ e } \int |f+g|^{p-1}\,|g| = \|\,|f+g|^{p-1}\,\|_{p'}\,\|\,g\,\|_p.$$

Pela desigualdade de Hölder, existem duas constantes $\alpha, \beta > 0$ com $\alpha|f|^p = |f+g|^{(p-1)p'} = \beta|g|^p$ e portanto existe $\lambda > 0$ tal que $|f| = \lambda|g|$ q.s.
A função "quociente"

$$\Lambda(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{g(x)} & \text{se } g(x) \neq 0 \\ \lambda & \text{se } g(x) = 0, \end{cases}$$

é mensurável e satisfaz $f(x) = \Lambda(x)g(x)$, com $|\Lambda(x)| = \lambda$ quase sempre e $\|\Lambda g + g\|_p = \|\Lambda g\|_p + \|g\|_p$. Entretanto, temos $\Lambda g + g = (\Lambda+1)g$ e também a igualdade $\|\Lambda g\|_p + \|g\|_p = \|(1+\lambda)g\|_p$, pois $\lambda > 0$.
Segue a identidade integral

$$\int |1+\Lambda|^p\,|g|^p = \int (1+\lambda)^p|g|^p.$$

Assim, devido à desigualdade $|1+\Lambda| \leq 1+\lambda$, temos $|1+\Lambda(x)| = 1+\lambda$ q.s. Donde, elevando ao quadrado chegamos a

$$2\mathrm{Re}\Lambda(x) = 2\lambda = 2|\Lambda(x)| \text{ q.s.}$$

Concluímos então $\Lambda = \lambda$ q.s. Isto é, temos $f = \lambda g$ q.s.

- O caso $p = \infty$. Se $f = \lambda g$ para algum $\lambda \geq 0$, é claro que vale a identidade $\|f+g\|_\infty = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.
A seguir vejamos um contra-exemplo para o caso $p = \infty$.

O exemplo no intervalo $X = (0,2)$ com as funções $f, g : X \to (-1,1)$ dadas por

$f = g = 1$ em $(0,1)$ com $f : (1,2) \to (0,1)$ e $g : (1,2) \to (-1,0)$ arbitrárias,

satisfaz $\|f+g\|_\infty = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ mas não uma condição como nos casos $p = 1$ ou $1 < p < \infty$ vistos acima♣

Lema 4.2 *Um espaço normado $(X, \|\,.\,\|)$ é completo se e somente se toda série absolutamente convergente é convergente.*

Prova.

($\Rightarrow$) Se X é completo e $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ é finita, então a sequência das somas parciais $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ satisfaz

$$\|s_n - s_m\| \leq \sum_{j=n}^{j=m} \|x_j\| \xrightarrow{n,m\to\infty} 0.$$

Logo, a sequência (s_n) é de Cauchy e portanto convergente.

($\Leftarrow$) Inversamente, se (x_n) é uma sequência de Cauchy, sejam $n_1 < n_2 < \cdots$ tais que

$$\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{2^j}, \text{ para } m, n \geq n_j.$$

Definindo $y_1 = x_{n_1}$ e $y_j = x_{n_j} - x_{n_{j-1}}$, para $j > 1$, temos

$$\sum_{j=1}^{k} y_j = x_{n_k} \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\| \leq \|y_1\| + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \infty.$$

Assim, existe

$$\lim x_{n_k} = \sum_{j=1}^{\infty} y_j \in X.$$

Isto é, a subsequência (x_{n_k}) é convergente em X e assim sendo concluímos que a sequência de Cauchy (x_n) é convergente em X♣

Teorema 4.3 *Seja $p \in [1,\infty]$. Então, L^p é um espaço de Banach.*

Prova.

Preparação. Se $\|f\|_p = 0$, já vimos que $f = 0$ q.s. Também já mostramos que $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\|f\|_p$, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ e $p \in [1,\infty]$. Então, pela desigualdade de Minkowski, L^p é um espaço vetorial normado. Resta mostrar que L^p é completo.

- ◇ O caso p infinito. Se (f_n) é sequência de Cauchy em L^∞ então temos $|f_n - f_m| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$, exceto em Z_{nm}, com $\mu(Z_{nm}) = 0$. Logo, em $X \setminus \bigcup Z_{nm}$ a convergência é uniforme a uma função f limitada (cheque) e

$$f_n \xrightarrow{L^\infty} f.$$

- ◇ O caso p finito. Vejamos que toda série absolutamente convergente em $L^p(\mu)$ é convergente em L^p. Consideremos uma sequência $(f_j) \subset L^p$ tal que $\sum_{j=1}^\infty \|f_j\|_p = M < \infty$ e definamos as funções

$$G_n = |f_1| + \cdots + |f_n| \quad \text{e} \quad G = \sum |f_j|.$$

Então obtemos as desigualdades

$$\|G_n\|_p \leq \|f_1\|_p + \cdots + \|f_n\|_p \leq M, \ \text{para todo } n.$$

Pelo teorema da convergência monótona segue

$$\int G^p d\mu = \lim \int G_n^p d\mu \leq M^p.$$

Deduzimos então que $G \in L^p$ e portanto $G(x) < \infty$ q.s. e por conseguinte a série $F(x) = \sum_{j=1}^\infty f_j(x)$ converge q.s. É claro que $|F| \leq G \in L^p$ e também

$$\left|F - \sum_{j=1}^n f_j\right|^p \leq (2G)^p \in L^1.$$

Donde, pelo teorema da convergência dominada,

$$\left\|F - \sum_{j=1}^n f_j\right\|_p^p = \int \left|F - \sum_{j=1}^n f_j\right|^p d\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0 \clubsuit$$

Corolário 4.1 *$f_n \xrightarrow{L^\infty} f$ se e só se $f_n \xrightarrow{unif} f$ em algum Z^c com $\mu(Z) = 0$.*

Prova. Trivial. Vide Exercício 2, 6.1.

Proposição 4.1 (Densidade das Simples em $\mathbf{L^p}$). *Seja $p \in [1,\infty]$.*

(a) Se $p < \infty$, o conjunto das funções simples

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{E_j}, \ \textit{sob a condição} \ \ \mu(E_j) < \infty,$$

é denso em L^p.

(b) Se $p = \infty$, o conjunto das funções simples é denso em L^∞.

Prova.

Preparação. Os conjuntos de funções citados são sub-espaços lineares do espaço vetorial complexo L^p. Assim, para nosso propósito, dada $f \in L^p$ podemos supor f real e $f \geq 0$. Seja $(\varphi_n) \subset L^+$, com cada φ_n simples, tal que $\varphi_n \nearrow f$ pontualmente.

(a) Cada φ_n satisfaz $|\varphi_n - f|^p \leq 2^p |f|^p \in L^1$. Logo, $\varphi_n \in L^p$ e pelo teorema da convergência dominada $\|\varphi_n - f\|_p \longrightarrow 0$. Para a representação $\varphi_n = \sum a_j \chi_{E_j}$ com $E_{j's}$ disjuntos e $a_{j's} > 0$, temos $\mu(E_j) < \infty$ pois

$$\sum a_j^p \mu(E_j) = \int \varphi_n^p d\mu < \infty.$$

(b) Neste caso, a função f é limitada exceto em algum Z com $\mu(Z) = 0$. No capítulo 2 vimos que (φ_n) converge uniformemente a f em Z^c e portanto

$$\varphi_n \xrightarrow{L^\infty} f \text{ sobre } X \clubsuit$$

Em $\mathbb{R}^n$ temos um resultado importante e bem mais forte.

Teorema 4.4 (Separabilidade de $\mathbf{L}^p(E)$, onde $\mathbf{E} \subset \mathbb{R}^{\mathbf{n}}$). *Sejam $p \in [1,\infty)$ e $E \subset \mathbb{R}^n$, com E mensurável. Então $L^p(E)$ é separável.*

Prova.

Suponhamos inicialmente $E = \mathbb{R}^n$. Seja $\mathcal{C}$ a coleção de cubos diádicos em $\mathbb{R}^n$. Vejamos que o espaço vetorial complexo

$$D = \left\{ \sum_{j=1}^{n} z_j \chi_{I_j} : \ I_j \in \mathcal{C}, z_j \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}$$

é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$.

(a) É fácil ver que $\overline{D}$ é um sub-espaço vetorial complexo de $L^p(\mathbb{R}^n)$.

(b) Se $f_n \xrightarrow{q.s.} f$ e $|f_n| \leq \psi \in L^p$, então $\|f_n - f\|_p \to 0$. Isto segue de $|f_n - f|^p \xrightarrow{q.s.} 0$ e $|f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq (2\psi)^p$ e do teorema da convergência dominada.

(c) Se O é aberto e $m(O) < \infty$, então $\chi_O \in \overline{D}$. Pois, decompondo $O = \bigcup I_j$, com os $I_{j's}$ cubos diádicos de interiores disjuntos, temos

$$\chi_O = \sum \chi_{I_j} \text{ q.s.}$$

já que a união dos lados de tais cubos tem medida nula. Ainda mais,

$$D \ni \varphi_n = \sum_{j=1}^{n} \chi_{I_j} \xrightarrow{q.s} \chi_O \quad \text{e} \quad |\varphi_n| \leq \chi_O \in L^p.$$

Donde, por (b) segue $\varphi_n \xrightarrow{L^p} \chi_O$.

(d) Se Ω é um G_δ e $m(\Omega) < \infty$, então $\chi_\Omega \in \overline{D}$. De fato, seja (O_n) uma sequência de abertos decrescente a Ω, com $m(O_1) < \infty$. Então segue

$$\chi_{O_n} \xrightarrow{s} \chi_\Omega \quad \text{e} \quad 0 \leq \chi_{O_n} \leq \chi_{O_1} \in L^p.$$

Donde, por (b) segue $\chi_{O_n} \xrightarrow{L^p} \chi_\Omega$ e então por (c) segue $\chi_\Omega \in \overline{D}$.

(e) Se $m(A) < \infty$ então $\chi_A \in \overline{D}$. Pois, existe $\Omega \in G_\delta$ com $m(\Omega) < \infty$, tal que $A = \Omega \smallsetminus N$ e $m(N) = 0$ e então $\chi_A = \chi_\Omega$ q.s. A afirmação segue por (d).

Pelos itens (a) e (e), as combinações lineares de funções características de subconjuntos mensuráveis de medida finita pertencem a $\overline{D}$. A densidade das funções simples em L^p no caso p finito [Proposição 4.1(a)] garante

$$\overline{D} = L^p(\mathbb{R}^n).$$

Para encerrar, seja E um subconjunto mensurável arbitrário de $\mathbb{R}^n$. Vejamos que o conjunto enumerável

$$\left\{\varphi_{|_E} : \varphi \in D\right\}$$

é denso em $L^p(E)$. De fato, dada $f \in L^p(E)$, a função

$$f_1 = f \text{ em } E \quad \text{e} \quad f_1 = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \smallsetminus E$$

pertence a $L^p(\mathbb{R}^n)$ e assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\varphi \in D$ tal que

$$\int |f_1 - \varphi|^p dx < \epsilon \text{ e então } \int_E |f - \varphi|^p dx < \epsilon \clubsuit$$

Como regra geral temos

$$L^p \not\subset L^q \text{ para } p \neq q.$$

Os seguintes exemplos triviais são instrutivos para apreciar o problema.

Exemplos 4.1 *Consideremos, em* $(0,\infty)$, *a medida de Lebesgue e a função*

$$f(x) = \frac{1}{x^\lambda}, \ \textit{com } x \in (0,\infty) \ \textit{e } \lambda > 0.$$

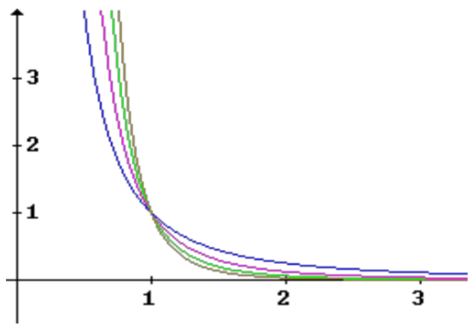

Figura 4.2: Gráficos para $\frac{1}{x^\lambda}$, com $\lambda < 1$, $\lambda = 1$ e $\lambda > 1$.

As seguintes afirmações são verdadeiras.

- $f \in L^p((0,1))$ *se e somente se* $p < \frac{1}{\lambda}$.
- $f \in L^p((1,\infty))$ *se e somente se* $p > \frac{1}{\lambda}$.

Importante. Tais exemplos evidenciam duas razões para f não pertencer a L^p.

Primeiro, $|f|^p$ pode ir ao infinito (explodir) muito rapidamente próximo a algum ponto.

Segundo, $|f|^p$ pode não decair suficientemente rápido a zero no infinito.

Na primeira situação o comportamento de $|f|^p$ piora quando p cresce ao passo que na segunda situação tal comportamento melhora. Em outras palavras, se $p < q$, as funções em L^p podem ser localmente mais singulares que as funções em L^q (dito de outra forma, a exigência para f pertencer a L^q é maior que a exigência para f pertencer a L^p), ao passo que as funções em L^q podem ser globalmente mais esparramadas que as funções em L^p. Tais interpretações, expressas de uma forma um tanto imprecisa, fornecem um guia bastante bom para a situação geral. Apoiados em tais idéias vejamos quatro resultados específicos. Os dois últimos resultados mostram que inclusões $L^p \subset L^q$ podem ser obtidas impondo condições sobre o espaço de medida que evitam um ou outro dos mal comportamentos descritos. Para um resultado mais geral, vide Exercício 5, 6.1.

Proposição 4.2 *Suponhamos* $0 < p < q < r \leq \infty$. *Então,*

$$L^q \subset L^p + L^r.$$

Prova.

Dada $f \in L^q$, seja $E = \{x : |f(x)| > 1\}$. Então

$$\begin{cases} f\chi_E \in L^p \ \text{ e } \ f\chi_{E^c} \in L^r \\ \text{e} \\ f = f\chi_E + f\chi_{E^c} \ \clubsuit \end{cases}$$

Proposição 4.3 *Suponhamos* $0 < p < q < r \leq \infty$. *Então temos*

$$L^p \cap L^r \subset L^q.$$

Ainda mais, dado $\lambda \in (0,1)$ *tal que*

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r},$$

temos

$$\|f\|_q \leq \ \|f\|_p^{\lambda} \ \|f\|_r^{1-\lambda}.$$

Prova.

- Caso $r = \infty$. Encontramos $|f|^q = |f|^p\,|f|^{q-p} \leq |f|^p\,\|f\|_\infty^{q-p}$ que integrando acarreta

$$\|f\|_q^q \leq \|f\|_p^p \ \|f\|_\infty^{q-p}.$$

Donde segue, com $\lambda = p/q$, a desigualdade

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^{\lambda}\|f\|_\infty^{1-\lambda}.$$

- Caso $r < \infty$. Escrevendo $|f|^q = |f|^{\lambda q}|f|^{(1-\lambda)q}$ e aplicando a desigualdade de Hölder com o par de expoentes conjugados

$$\frac{p}{\lambda q} \ \text{ e } \ \frac{r}{(1-\lambda)q},$$

obtemos

$$\int |f|^q d\mu \leq \|\,|f|^{\lambda q}\,\|_{\frac{p}{\lambda q}} \ \|\,|f|^{(1-\lambda)q}\,\|_{\frac{r}{(1-\lambda)q}} = \|\,f\,\|_p^{\lambda q} \ \|\,f\,\|_r^{(1-\lambda)q}.$$

Por fim, extraindo a raiz q-ésima encerramos a prova$\clubsuit$

Proposição 4.4 *Suponhamos* $0 < p < q \leq \infty$. *Dado um conjunto* A *temos*

$$l^p(A) \subset l^q(A) \quad e \quad \|f\|_q \leq \|f\|_p.$$

Prova.

◇ Caso $q = \infty$. É claro que

$$\|f\|_\infty^p = \sup_A |f(a)|^p \leq \sum_A |f(a)|^p.$$

Logo, $\|f\|_\infty \leq \|f\|_p$.

◇ Caso $q < \infty$. Basta aplicarmos a Proposição 4.3 com $r = \infty$. Obtemos

$$\|f\|q \leq \|f\|_p^{\frac{p}{q}} \|f\|_\infty^{1-\frac{p}{q}} \leq \|f\|_p^{\frac{p}{q}} \|f\|_p^{1-\frac{p}{q}} = \|f\|_p \clubsuit$$

Proposição 4.5 *Suponhamos* $0 < p < q \leq \infty$. *Se* $\mu(X) < \infty$, *então*

$$L^p \supset L^q \quad e \quad \mu(X)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p \leq \mu(X)^{-\frac{1}{q}} \|f\|_q.$$

Prova. [Note que então $p \mapsto \mu(X)^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p$ é uma função crescente.]

◇ Caso $q = \infty$. Trivial, pois

$$\|f\|_p^p = \int |f|^p d\mu \leq \|f\|_\infty^p \mu(X).$$

◇ Caso $q < \infty$. Utilizando a desigualdade de Hölder e os expoentes conjugados

$$\frac{q}{p} \text{ e } \frac{q}{q-p},$$

segue $\|f\|_p^p = \int |f|^p \cdot 1 d\mu \leq \||f|^p\|_{\frac{q}{p}} \|1\|_{\frac{q}{q-p}} = \|f\|_q^p \mu(X)^{1-\frac{p}{q}} \clubsuit$

Comentário. Os três espaços L^p mais obviamente importantes são

$$L^1, \ L^2 \text{ e } L^\infty.$$

Com o espaço L^1 já estamos familiarizados.

O espaço L^2 é especial por ser um espaço de Hilbert.

A topologia de L^∞ é muito próxima da topologia da convergência uniforme. Infelizmente, L^1 e L^∞ são patológicos em muitos aspectos e é mais frutificante lidar com espaços L^p intermediários. Uma ilustração para tais comentários é a teoria da dualidade em 4.2 e outra é o fato de que muitos operadores de interesse em análise de Fourier e em equações diferenciais são limitados sobre L^p para $1 < p < \infty$ mas não sobre L^1 ou sobre L^∞.

4.2 O dual de L^p

Seja X um espaço vetorial complexo e normado. Dizemos que um funcional linear $F : X \to \mathbb{C}$ é **contínuo**, ou **limitado**, se

$$\|F\| = \sup\left\{|F(x)| : \|x\| = 1\right\} < \infty.$$

O espaço **dual** de X é espaço vetorial complexo

$$X^* = \{F : X \to \mathbb{C} \text{ tal que } F \text{ é linear e contínuo}\}.$$

É trivial verificar que X^* é normado e que $F \mapsto \|F\|$ define uma norma sobre X^*.

Dados dois espaços vetoriais normados X e Y, uma **isometria** $T : X \to Y$ é uma aplicação linear tal que $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$. Assim, uma isometria é necessariamente injetora mas não necessariamente sobrejetora.

Sejam p e q expoentes conjugados. Pela desigualdade de Hölder, a cada $g \in L^q$ corresponde um funcional linear contínuo Φ_g definido sobre L^p pela expressão

$$\Phi_g(f) = \int fg d\mu,$$

e que a norma do operador Φ_g é no máximo $\|g\|_q$ [no caso específico $p = 2$, é bastante fácil ver que L^2 é um espaço normado completo munido de produto interno - isto é, um espaço de Hilbert - e então é mais apropriado definir

$$\Phi_g(f) = \int f\overline{g} d\mu].$$

De fato, a aplicação $g \mapsto \Phi_g$ é em quase todo caso uma isometria de L^q em $(L^p)^*$.

Proposição 4.6 (A norma do funcional Φ_g). *Sejam p e q expoentes conjugados, com $1 \le q < \infty$. Dada $g \in L^q$, temos*

$$\|g\|_q = \|\Phi_g\| = \sup\left\{\left|\int fgd\mu\right| : \|f\|_p = 1\right\}.$$

Se μ é semi-finita (em particular, para m) este resultado também vale para $q = \infty$.

Prova.

Preparação. A igualdade $\|\Phi\|_g = \sup\{\cdots\}$ é trivial (cheque).

Pela desigualdade de Hölder segue $\|\Phi_g\| \le \|g\|_q$ para todos $g \in L^q$ e $q \in [1, \infty]$.

A igualdade $\|\Phi\|_g = \|g\|_q$ é óbvia se $g = 0$ (q.s.) e então podemos supor $g \ne 0$.

Recordemos que μ é dita semi-finita se para todo E com $\mu(E) = \infty$, existe

$$F \subset E \text{ tal que } 0 < \mu(F) < \infty.$$

Podemos assumir que g é finita em todo ponto (pois $g \in L^q$).

◇ Caso $q = 1$. Definindo $f = \overline{\mathrm{sgn} g}$ temos $\|f\|_\infty = 1$ e

$$\|\Phi_g\| \geq \int fg = \|g\|_1.$$

◇ Caso $1 < q < \infty$. Definindo

$$g^* = \frac{|g|^{q-1}\overline{\mathrm{sgn} g}}{\|g\|_q^{q-1}} \qquad \text{(\textbf{a conjugada} de } g \text{ em } L^q)$$

obtemos

$$\|g^*\|_p^p = \frac{\int |g|^{p(q-1)}}{\|g\|_q^{p(q-1)}} = \frac{\int |g|^q}{\|g\|_q^q} = 1 \ e$$

$$\|\Phi_g\| \geq \int g^* g = \frac{\int |g|^q}{\|g\|_q^{q-1}} = \|g\|_q.$$

◇ O caso $q = \infty$ e μ semi-finita. Dado $\epsilon > 0$, seja $A = \{x : |g(x)| > \|g\|_\infty - \epsilon\}$. Devido à semi-finitude de μ, existe $B \subset A$ tal que $0 < \mu(B) < \infty$. Definamos

$$f = \frac{\chi_B \overline{\mathrm{sgn} g}}{\mu(B)}.$$

Temos $\|f\|_1 = 1$ e

$$\|\Phi_g\| \geq \int fg = \frac{\int_B |g|}{\mu(B)} \geq \|g\|_\infty - \epsilon \clubsuit$$

Vale também o reverso da desigualdade de Hölder.. Isto é, se o funcional linear

$$f \mapsto \int fg d\mu, \text{ onde } f \in L^p,$$

é contínuo, então $g \in L^q$ em quase todos os casos. Segue um resultado mais forte.

Teorema 4.5 (Reverso da desigualdade de Hölder - forma forte). *Sejam p e q expoentes conjugados quaisquer. Seja g uma função mensurável tal que $g\chi_E \in L^1$, para todo E de medida finita. Denotemos por Σ o espaço vetorial de funções simples gerado por tais funções características e*

$$M_q(g) = \sup\left\{\left|\int \varphi g d\mu\right| : \varphi \in \Sigma \text{ and } \|\varphi\|_p = 1\right\} \in [0, \infty].$$

Suponhamos que ou $S_g = \{x : g(x) \neq 0\}$ é σ-finito ou μ é semi-finita. Então temos

$$M_q(g) = \|g\|_q.$$

Em particular, sob tais condições, $g \in L^q$ se e somente se $M_q(g)$ é finito.

Prova.

Obs. 1. Pela desigualdade de Hölder temos $M_q(g) \leq \|g\|_q$. Para provar

$$M_q(g) \geq \|g\|_q,$$

podemos supor $M_q(g)$ finito e $g \neq 0$.

Obs. 2. As funções $-g$ e $\pm ig$ atendem as mesmas três condições que g. Ainda,

$$M_q(\pm g) = M_q(\pm ig) \;\text{ e }\; \| \pm g\|_q = \| \pm ig\|_q.$$

Obs. 3. Seja p finito. Seja $\varphi = \sum a_j \chi_{E_j}$ simples, na representação com cada $a_j \neq 0$. É trivial ver que $\varphi \in L^p$ se e só se temos $\mu(E_j) < \infty$ para cada j [cheque].

Obs. 4. Seja $b > 0$. Temos $|z|^b |\mathrm{sgn}(z)| = |z|^b$ para todo z. Note que $|\mathrm{sgn}(0)| \neq 1$.

Obs. 5. Vale $p + q = pq$, para todo $q \in [1, \infty]$. Vale $q = p(q-1)$, se $q > 1$.

Preparação I. Suponhamos q finito. Mostremos que neste caso podemos assumir que o conjunto S_g é σ-finito, verificando que esta condição é automaticamente satisfeita se μ é semi-finita (vide Exercício 17, 6.2).

Seja $E = \{x : |g(x)| > \epsilon\}$, onde $\epsilon > 0$. Por contradição, suponhamos $\mu(E) = \infty$. Dado $z = g(x)$, escrevamos $z = a + ib$ e observemos que

$$|z| \leq a^+ + a^- + b^+ + b^- \;\text{ e }$$
$$\{z : |z| > \epsilon\} \subset \left\{z : a^+ > \frac{\epsilon}{4}\right\} \cup \left\{z : a^- > \frac{\epsilon}{4}\right\} \cup \left\{z : b^+ > \frac{\epsilon}{4}\right\} \cup \left\{z : b^- > \frac{\epsilon}{4}\right\}.$$

A Observação 2 permite supor que

$$\mathcal{E} = \left\{x : (\mathrm{Re} g)^+(x) > \frac{\epsilon}{4}\right\} \text{ tem medida infinita.}$$

Pela semi-finitude de μ existem subconjuntos $F \subset \mathcal{E}$ tais que $0 < \mu(F) < \infty$ e com $\mu(F)$ arbitrariamente grande (vide Exercício 14 1.3). Então temos

$$\frac{\epsilon \mu(F)}{4\mu(F)^{\frac{1}{p}}} \leq \int \frac{\chi_F (\mathrm{Re} g)^+}{\mu(F)^{\frac{1}{p}}} = \int \frac{\chi_F \mathrm{Re} g}{\mu(F)^{\frac{1}{p}}} = \mathrm{Re} \int \frac{\chi_F g}{\mu(F)^{\frac{1}{p}}} \leq \left| \int \frac{\chi_F}{\mu(F)^{\frac{1}{p}}} g \right| \leq M_q(g),$$

com a convenção $1/p = 0$ se $q = 1$ (cheque). Donde segue

$$\mu(F) \leq \left[\frac{4M_q(g)}{\epsilon}\right]^q \lightning.$$

Logo, $\mu(E)$ é finita. Conclua a Preparação I (é trivial).

Preparação II. Sejam q finito e S_g σ-finito. Por hipótese, g é integrável em conjuntos de medida finita. Então, podemos supor g finita em todo ponto (cheque).

A seguir, executemos a demonstração propriamente dita.

◇ O caso q finito. Pela Preparação I existe uma sequência $E_n \nearrow S_g$ com $\mu(E_n) < \infty$. A Preparação II garante g finita em todo ponto. Existe (ψ_n) uma sequência de funções simples com $\psi_n \xrightarrow{s} g$ e $|\psi_n| \nearrow |g|$. Seja $g_n = \psi_n \chi_{E_n}$. Assim $g_n \xrightarrow{s} g$ e $|g_n| \nearrow |g|$, com g_n simples e nula no complementar de E_n. Como $g \neq 0$, podemos supor $g_n \neq 0$ para todo n.

No sub-caso $q > 1$, as observações 4 e 5 garantem que
$$f_n = \frac{|g_n|^{q-1}\overline{\operatorname{sgn}(g_n)}}{\|g_n\|_q^{q-1}} \quad \text{satisfaz} \quad \|f_n\|_p^p = \frac{\int |g_n|^{p(q-1)}|\overline{\operatorname{sgn} g}|}{\|g\|_q^{p(q-1)}} = \frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^q} = 1.$$

No sub-caso $q = 1$, é trivial ver que $\|f_n\|_\infty = 1$ [segue de $g_n \neq 0$].

Portanto temos $\|f_n\|_p = 1$, sendo f_n simples e nula em E_n^c, com $\mu(E_n) < \infty$. Pelo teorema da convergência monótona e a definição de M_q segue
$$\|g\|_q = \lim \|g_n\|_q = \lim \int |f_n g_n| \leq \limsup \int |f_n g| \leq M_q(g).$$

◇ O caso $q = \infty$. Dado $\epsilon > 0$, consideremos o conjunto
$$A = \{x : |g(x)| \geq M_\infty(g) + \epsilon\} \subset S_g.$$

Suponhamos, por contradição, $\mu(A) > 0$. Seja μ semi-finita ou S_g σ-finito,
$$\text{existe } B \subset A \text{ tal que } 0 < \mu(B) < \infty.$$

Por hipótese, $g\chi_B \in L^1$ e podemos supor $g\chi_B$ finita em todo ponto. Seja g_n uma sequência de simples com $g_n \xrightarrow{s} g\chi_B$ e $|g_n| \nearrow |g\chi_B|$. Podemos supor cada $g_n \neq 0$. É evidente que $g_n \equiv 0$ em B^c. Seja $S_{g_n} = \{x : g_n(x) \neq 0\} \subset B$. É claro que $0 < \mu(S_{g_n}) \leq \mu(B)$. Consequentemente,
$$f_n = \frac{\overline{\operatorname{sgn}(g_n)}}{\mu(S_{g_n})}$$
é simples, nula fora de B onde $\mu(B) < \infty$, e satisfaz $\|f_n\|_1 = 1$. Pelo teorema da convergência monótona e a definição de M_∞ segue
$$\begin{aligned} M_\infty(g) + \epsilon &\leq \frac{1}{\mu(B)} \int_B |g| = \lim \frac{1}{\mu(B)} \int |g_n| = \lim \left[\frac{\mu(S_{g_n})}{\mu(B)} \int f_n g_n\right] \\ &\leq \limsup \int |f_n g| \leq M_\infty(g) \lightning \end{aligned}$$

Assim, temos $\|g\|_\infty \leq M_\infty(g)$. A prova está completa.

[Outra idéia. Pela aproximação básica, teorema 2.1(b), para n grande o suficiente temos $|g_n| > 0$ em todo ponto de B e então $S_{g_n} = B$ e ... complete] ♣

A parte fundamental da descrição de $(L^p)^*$ é o fato de que a aplicação

$$g \mapsto \Phi_g$$

é, em quase todos os casos, sobrejetora. Estudemo o caso p finito.

Teorema 4.6 [A isometria entre $(L^p)^*$ e $L^{p'}$]. *Sejam (X, μ) um espaço de medida e p, q expoentes conjugados, com p finito.*

(a) Suponhamos $p \neq 1$. Para cada $\Psi \in (L^p)^*$ existe $g \in L^q$ satisfazendo

$$\Psi(f) = \int fgd\mu, \text{ para toda } f \in L^p.$$

A aplicação $\Phi : L^q \to (L^p)^*$, onde $\Phi(g) = \Phi_g$, é uma isometria sobrejetora.

(b) Se $p = 1$, valem conclusões análogas a (a) no caso em que μ é σ-finita.

Prova. Englobemos as demonstrações de (a) e (b) analisando três casos.

◇ O caso μ finita.

Neste caso, todas as funções simples estão em L^p. Se $\Psi \in (L^p)^*$ e E é mensurável, definamos a função de conjuntos

$$\nu(E) = \Psi(\chi_E).$$

Mostremos que ν é medida complexa. De fato, dado $E = \dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty} E_j$ temos

$$\chi_E = \sum_{j=0}^{\infty} \chi_{E_j} \qquad [\text{e } \sum \mu(E_j) = \mu(E) < \infty]$$

com a série convergindo em L^p [com p finito], pois

$$\left\| \chi_E - \sum_{j=1}^{n} \chi_{E_j} \right\|_p = \left\| \sum_{n+1}^{\infty} \chi_{E_j} \right\|_p = \mu \left(\dot{\bigcup_{n+1}^{\infty}} E_j \right)^{\frac{1}{p}} = \left[\sum_{n+1}^{\infty} \mu(E_j) \right]^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n \to \infty} 0,$$

e portanto [já que Ψ é linear contínua]

$$\nu(E) = \Psi(\chi_E) = \sum \Psi(\chi_{E_j}) = \sum \nu(E_j).$$

Ainda, se $\mu(E) = 0$ então $\chi_E = 0$ q.s. e $\chi_E = 0 \in L^p$. Donde concluímos que $\nu(E) = \Psi(\chi_E) = 0$ e $\nu \ll \mu$. Desta forma, pelo teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym complexo existe $g \in L^1(\mu)$ tal que $d\nu = gd\mu$ e por conseguinte

$$\Psi(\chi_E) = \nu(E) = \int_E gd\mu = \int \chi_E gd\mu, \text{ para todo } E.$$

Então, para toda φ simples temos (por linearidade)

$$\Psi(\varphi) = \int \varphi gd\mu \quad \text{e} \quad \left| \int \varphi gd\mu \right| \leq \|\Psi\| \, \|\varphi\|_p.$$

Logo, pelo Teorema 4.5 segue

$$\|g\|_q \leq \|\Psi\| \text{ e } g \in L^q.$$

Por fim, dada $f \in L^p$, pela densidade das simples em L^p [Proposição 4.1(a), onde p é finito] existe uma sequência (φ_n) de funções simples tal que

$$\varphi_n \xrightarrow{L^p} f.$$

Logo, $\Psi(\varphi_n) \to \Psi(f)$. Ainda mais,

$$\left|\Psi(\varphi_n) - \int fg\right| = \left|\int \varphi_n g - \int fg\right| \leq \|\varphi_n - f\|_p \|g\|_q \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

e então concluímos

$$\Psi(f) = \int fg d\mu.$$

Donde, pela desigualdade de Hölder, $\|\Psi\| \leq \|g\|_q$. Assim, $\|\Psi\| = \|g\|_q$.

◇ O caso μ σ-finita.

Seja $E_n \nearrow X$ tal que $0 < \mu(E_n) < \infty$. Identifiquemos $L^p(E_n)$ e $L^q(E_n)$ com os respectivos subespaços das funções em $L^p(X)$ e $L^q(X)$ que são nulas fora de E_n. O caso anterior mostra que existe $g_n \in L^q(E_n)$ tal que

$$\Psi(f) = \int fg_n d\mu, \text{ para toda } f \in L^p(E_n) \text{ e } \|g_n\|_q = \|\Psi|_{L^p(E_n)}\| \leq \|\Psi\|.$$

É fácil ver que g_n é única [no particular caso

$$\int fg = 0 \text{ para toda } f \in L^p(E_n), \text{ escolha } f = \overline{\text{sgn} g} \ (\textsf{cheque})].$$

Desta forma, para $m > n$ temos $g_m = g_n$ sobre E_n, o que nos permite definir $g : X \to \mathbb{C}$ por $g(x) = g_n(x)$ se $x \in E_n$. Com o teorema da convergência monótona garantimos que $g \in L^q$, pois

$$\|g\|_q = \lim \|g_n\|_q \leq \|\Psi\|.$$

Ainda mais, dada $f \in L^p$, pelo teorema da convergência dominada temos que $f\chi_{E_n} \xrightarrow{L^p} f$ e portanto

$$\Psi(f) = \lim \Psi\left(f\chi_{E_n}\right) = \lim \int_{E_n} fg = \int fg,$$

donde segue $\|\Psi\| \leq \|g\|_q$. Assim, $\|\Psi\| = \|g\|_q$.

- ⋄ O caso μ arbitrária e $p \neq 1$ [logo, como p é finito, também q é finito].

  Analogamente ao caso "μ σ-finita" imediatamente acima, para cada conjunto σ-finito $E \subset X$ temos que existe uma única $g_E \in L^q(E)$ tal que

  $$\Psi(f) = \int f g_E, \text{ para toda } f \in L^p(E), \text{ e } \|g_E\|_q \leq \|\Psi\|.$$

  Assim, dado F σ-finito com $F \supset E$, temos $g_F = g_E$ sobre E e $\|g_F\|_q \geq \|g_E\|_q$. É evidente que

  $$M = \sup\left\{\|g_E\|_q : E \text{ é } \sigma\text{-finito}\right\} \leq \|\Psi\|.$$

  Seja (E_n) uma sequência de conjuntos σ-finitos tal que $\|g_{E_n}\|_q \to M$ e o conjunto $G = \bigcup E_n$. Temos que G é σ-finito e

  $$\|g_{E_n}\|_q \leq \|g_G\|_q \leq M \leq \|\Psi\|.$$

  Segue $\|g_G\|_q = M \leq \|\Psi\|$ e $g_G \in L^q$. Assim, como o expoente q é finito, dado um conjunto σ-finito $H \supset G$ temos

  $$\int |g_G|^q + \int |g_{H \setminus G}|^q = \int |g_H|^q \leq M^q = \int |g_G|^q.$$

  Isto mostra que $g_{H \setminus G} = 0$ e $g_H = g_G$.

  Finalmente, dada uma função arbitrária $f \in L^p$ temos que o conjunto

  $$I = G \cup \{x : f(x) \neq 0\}$$

  é σ-finito, contém G e $g_I = g_G$, e pela definição de g_I segue

  $$\Psi(f) = \int f g_I = \int f g_G.$$

  Logo, $g = g_G$ é a função desejada e temos $\|\Psi\| \leq \|g\|_q$. Assim, $\|\Psi\| = \|g\|_q$♣

Para a forma usual do reverso da desigualdade de Hölder, vide "Measure and Integral", Wheeden & Zygmund .

Corolário 4.2 (Reflexividade de L^p). *Suponhamos $1 < p < \infty$. Então, temos*

$$(L^p)^{**} = L^p \text{ isometricamente.}$$

Neste caso, dizemos que L^p é **reflexivo***.*

Prova. Trivial♣

Comentários. Sobre a excepcionalidade dos casos $p = 1$ e $p = \infty$.

- Qualquer que seja a medida μ, a correspondência

$$g \mapsto \Phi_g$$

aplica L^∞ em $(L^1)^*$, mas em geral tal função não é nem injetora nem sobrejetora. A injetividade falha quando μ não é semi-finita. De fato, fixado um conjunto $E \subset X$ de medida infinita que não contém subconjuntos de medida finita e maior que zero, e considerando f qualquer em L^1, temos que o conjunto $\{x : f(x) \neq 0\}$ é σ-finito e intersecta E em um conjunto nulo. Assim, temos

$$\Phi_{\chi_E}(f) = \int \chi_E f = 0, \text{ para toda } f \in L^1, \text{ e } \Phi_{\chi_E} = 0 \text{ mas } \chi_E \in L^\infty \setminus \{0\}.$$

Porém, este problema é contornável se redefinirmos L^∞ (vide Exercícios 23-25 6.2).

- Sejam X um conjunto não enumerável, μ a medida de contagem sobre $\big(X, \wp(X)\big)$, a σ-álgebra $\mathcal{M}$ dos conjuntos enumeráveis ou co-enumeráveis, e $\mu_0 = \mu|_{\mathcal{M}}$. Toda $f \in L^1(\mu)$

$$\left[\text{notemos que } \int f d\mu = \sum f(x)\right],$$

se anula fora de um conjunto enumerável e portanto temos

$$L^1(\mu) = L^1(\mu_0).$$

Por outro lado, é claro que $L^\infty(\mu)$ consiste de todas as funções limitadas definidas em X enquanto, como verificamos a seguir, $L^\infty(\mu_0)$ consiste das funções limitadas que são constantes exceto em um conjunto enumerável. De fato, dada $f \in L^\infty(\mu_0)$ e portanto $\mathcal{M}$-mensurável, temos que $f(X)$ é enumerável pois, caso contrário, através de alguma reta $\mathrm{Re} z = c$, com c uma constante real, particionamos $f(X)$ em dois conjuntos não enumeráveis

$$A = \{z \in f(X) : \mathrm{Re} z < c\} \quad \text{e} \quad B = \{z \in f(X) : \mathrm{Re} z \geq c\}$$

e escrevemos $X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, com $f^{-1}(A)$ e $f^{-1}(B)$ mensuráveis e não enumeráveis ↯

Logo, existe $\{z_1, z_2, \ldots, \}$ tal que

$$X = \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} f^{-1}(z_n)$$

e portanto para algum z_N temos $X \setminus f^{-1}(z_N)$ enumerável, como desejávamos. Com tal observação, é fácil mostrar que o dual de $L^1(\mu_0)$ é o espaço $L^\infty(\mu)$ e não seu subespaço $L^\infty(\mu_0)$ (cheque).

- Quanto ao caso $p = \infty$, a aplicação

  $$g \mapsto \Phi_g \text{ é sempre uma isometria injetora de } L^1 \text{ em } (L^\infty)^*$$

  devido à Proposição 4.6, mas quase *nunca* é sobrejetora. Mais sobre este problema pode ser visto em Folland 6.6. Vide também Exercício 19 6.2.

4.3 Algumas Desigualdades Úteis

Estimativas e desigualdades são parte central das aplicações de espaços L^p em análise. As mais básicas são as desigualdades de Hölder e Minkowski. Nesta seção apresentamos uns poucos e importantes resultados adicionais. O primeiro é quase uma trivialidade, mas é útil o suficiente para merecer atenção especial.

Desigualdade 4.1 (Chebyshev). *Seja $f \in L^p$, com $0 < p < \infty$, e $\alpha > 0$. Então,*

$$\mu\big(\{x : |f(x)| > \alpha\}\big) \leq \left(\frac{\|f\|_p}{\alpha}\right)^p.$$

Prova.

É claro que

$$\|f\|_p^p \geq \alpha^p \mu\big(\{x : |f(x)| > \alpha\}\big) \clubsuit$$

A próxima desigualdade é um teorema razoavelmente geral sobre estimativas para operadores integrais em espaços L^p. A desigualdade que segue generaliza a chamada desigualdade de Young para o produto de convolução (vide Teorema 4.8).

Teorema 4.7 (Desigualdade de Young Generalizada). *Sejam* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *e* $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ *espaços de medidas* σ*-finitas e seja* K *uma função* $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$*-mensurável sobre* $X \times Y$ *e a valores complexos tal que exista um real* $C > 0$ *satisfazendo*

$$\int |K(x,y)| d\mu(x) \le C \text{ q.s. em } Y \quad e \quad \int |K(x,y)| d\nu(y) \le C \text{ q.s. em } X.$$

Seja $p \in [1, \infty]$*. Dada* $f \in L^p(Y)$*, temos que a integral*

$$Tf(x) = \int K(x,y) f(y) d\nu(y)$$

converge absolutamente μ*-q.s. (isto é, é finita* μ*-q.s.), a função* Tf *então definida está em* $L^p(X)$ *e*

$$\|Tf\|_p \le C \|f\|_p.$$

Prova. Por hipótese, temos $f : Y \to \mathbb{C}$ e então f é finita em todo ponto.

- Caso $1 < p < \infty$. Seja q conjugado a p. Aplicando Hölder ao produto

  $$|K(x,y)f(y)| = |K(x,y)|^{\frac{1}{q}}.|K(x,y)|^{\frac{1}{p}}|f(y)|$$

  encontramos

  $$\int |K(x,y)f(y)| d\nu(y) \le \left[\int |K(x,y)| d\nu(y) \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int |K(x,y)| \, |f(y)|^p d\nu(y) \right]^{\frac{1}{p}}$$
  $$\le C^{\frac{1}{q}} \left[\int |K(x,y)| \, |f(y)|^p d\nu(y) \right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{q.s. em } X.$$

  Por Tonelli, a integral inicial é uma função mensurável em X. Elevando-a a p, integrando em $d\mu(x)$ e mudando a ordem de integração (Tonelli) temos

  $$\int \left[\int |K(x,y)f(y)| d\nu \right]^p d\mu \le C^{\frac{p}{q}} \int \int |K(x,y)| |f(y)|^p d\mu d\nu$$
  $$\le C^{\frac{p}{q}+1} \int |f(y)|^p d\nu.$$

  Como a última integral é finita, a função $K(x,\cdot)f(\cdot) \in L^1(Y)$ μ-q.s. em X. Logo, Tf é finita μ-q.s. A mensurabilidade de Tf segue por Tonelli, se $K \ge 0$ e $f \ge 0$. Em geral, como Tf é finita μ-q.s., basta decompor K e f em partes reais e imaginárias e estas em partes positivas e negativas. Assim,

  $$\int |Tf(x)|^p d\mu \le C^{\frac{p}{q}+1} \|f\|_p^p.$$

  Extraindo a raiz p-ésima encontramos o resultado desejado.

- Caso $p = 1$. Basta utilizar $\int |K(x,y)| d\mu(x) \le C$. Cheque, é trivial.

- Caso $p = \infty$. Basta utilizar $\int |K(x,y)| d\nu(y) \le C$. Cheque, é trivial♣

Ingenuamente supondo y um parâmetro discreto variando em um conjunto finito e escrevendo $f^y(x) = f(x,y)$, temos a família de funções $\{f^y\}$. A forma discreta da desigualdade de Minkowski diz que

$$\left\|\sum_y f^y\right\|_p \leq \sum_y \|f^y\|_p.$$

Passando para a variável contínua y, e então integrando na variável y, vislumbramos a desigualdade integral de Minkowski abaixo ("cheque").

Desigualdade 4.2 (Minkowski para Integrais). *Sejam $(X,\mathcal{M},\mu)$ e $(Y,\mathcal{N},\nu)$ espaços de medidas σ-finitas e seja f uma função $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$-mensurável sobre $X\times Y$.*

(a) Seja $p \in [1,\infty)$. Se $f \geq 0$ (note a frugalidade das hipóteses) temos

$$\left[\int\left(\int f(x,y)d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \int\left[\int f(x,y)^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} d\nu(y).$$

(b) Seja $p \in [1,\infty]$. Suponhamos que $y \mapsto \|f(\cdot,y)\|_p$ é integrável em Y. Então,

$$x \mapsto \int f(x,y)d\nu(y) \text{ é finita quase sempre em } X\text{, mensurável e}$$

$$\left\|\int f(\cdot,y)d\nu(y)\right\|_p \leq \int \|f(\cdot,y)\|_p d\nu(y) < \infty.$$

[Note que (b) "é" (a) reescrita para funções e p arbitrários e integrais finitas.]

Prova.

(a) Analisemos os casos: $p = 1$ e $p \in (1,\infty)$.

- ◇ Caso $p = 1$. Este é imediato do Teorema de Tonelli.
- ◇ Caso $1 < p < \infty$. Seja q o expoente conjugado de p e $g \in L^q(X)$. Então, com o teorema de Tonelli e a desigualdade de Hölder em X obtemos

$$\begin{aligned}\int\left[\int f(x,y)d\nu(y)\right]|g(x)|d\mu(x) &= \int\left[\int f(x,y)|g(x)|d\mu(x)\right]d\nu(y)\\ &\leq \|g\|_q\int\left[\int f(x,y)^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} d\nu(y).\end{aligned}$$

Assim, a afirmação (a) segue do reverso da desigualdade de Hölder (forma forte). Vide Teorema 4.5.

[Para uma prova direta, vide Wheeden & Zygmund, p. 143.]

(b) Analisemos dois caso: p finito e $p = \infty$.

◇ Caso p finito. Aplicando (a) à função $|f|$ temos, pelas hipóteses,

$$\left[\int \left(\int |f(x,y)|d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}} \leq \int \|f(\cdot,y)\|_p d\nu(y) < \infty.$$

Logo, a função $f(x,\cdot)$ é ν-integrável para quase todo x e então a função

$$x \mapsto \int f(x,y)d\nu(y)$$

é finita q.s. Decompondo f em $\mathrm{Re}(f)^{\pm}$ e $\mathrm{Im}(f)^{\pm}$ vemos que a função

$$x \mapsto \int f(x,y)d\nu(y)$$

é mensurável. Agora é claro que

$$x \mapsto \int f(x,y)d\nu(y) \in L^p(X)$$

e satisfaz a desigualdade anunciada.

◇ Caso $p = \infty$. Dado y em Y notemos que

$$\|f(\cdot,y)\|_\infty = \|f(\cdot,y)\|_{L^\infty(X)}.$$

Por hipótese temos

$$\int \|f(\cdot,y)\|_\infty d\nu(y) < \infty.$$

Logo, $\|f(\cdot,y)\|_\infty$ é finita exceto para y em algum conjunto $\mathcal{Y} \subset Y$, tal que $\nu(\mathcal{Y}) = 0$. Redefinindo a função f pelo valor 0 no conjunto $X \times \mathcal{Y}$ [com $(\mu \times \nu)(X \times \mathcal{Y}) = 0$], podemos supor que a função mensurável $\|f(\cdot,y)\|_\infty$ é finita para todo $y \in Y$.

Notemos que o conjunto

$$E = \{(x,y) : |f(x,y)| > \|f(\cdot,y)\|_\infty\}$$

é mensurável e $E^y = \{x : (x,y) \in E\}$ é μ-nulo. Logo,

$$(\mu \times \nu)(E) = \int \mu(E^y)d\nu(y) = 0.$$

Assim, redefinindo f pelo valor 0 no conjunto E temos a desigualdade funcional $|f(x,y)| \leq \|f(\cdot,y)\|_\infty$, em $X \times Y$, e a desigualdade integral

$$\int |f(x,y)|d\nu(y) \leq \int \|f(\cdot,y)\|_\infty d\nu(y) \clubsuit$$

4.3.1 Aplicação: O Produto de Convolução

Nesta seção consideramos somente a medida de Lebesgue.

Lema 4.3 *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ mensurável. Então, a função*

$$K(x, y) = f(x - y) \text{ é mensurável em } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Prova.

A função $F(x, y) = f(x)$ é mensurável em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, pois o conjunto

$$F^{-1}\big(O\big) = f^{-1}\big(O\big) \times \mathbb{R}^n$$

é mensurável (cheque) para todo aberto $O \subset \mathbb{C}$. Gratos ao isomorfismo linear $T(x, y) = (x - y, x + y)$ concluímos que $F \circ T = K$ é mensurável (cheque)♣

Dadas duas funções (Lebesgue) mensuráveis $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, definimos a **convolução** $f * g\,(x)$ por

$$f * g\,(x) = \int f(x - y) g(y)\, dy,$$

nos pontos x tais que a integral acima existe. Dado um vetor $h \in \mathbb{R}^n$, definimos em $\mathbb{R}^n$ a (função) translação $\tau_h(x) = x - h$.

Proposição 4.7 *Assumindo que todas as integrais citadas existem, temos*

(a) $f * g = g * f$.

(b) $(f * g) * h = f * (g * h)$.

(c) $\tau_h(f * g) = (\tau_h f) * g$

(d) $supp(f * g) \subset \overline{supp(f) + supp(g)}$.

Prova.

(a) Mudando a variável de y para $z = x - y$ obtemos

$$f * g\,(x) = \int f(x - y) g(y) dy = \int f(z) g(x - z) dz = g * f\,(x).$$

(b) Utilizemos (a) e o teorema de Fubini:

$$(f * g) * h\,(x) = \int (g * f)(x-y)h(y)dy = \int\int g(x-y-z)f(z)h(y)dzdy =$$

$$\int (g*h)(x-z)f(z)dz = (g*h)*f\,(x) = f*(g*h)\,(x).$$

(c)

$$\tau_h(f*g)(x) = \int f(x-h-y)g(y)dy = \int (\tau_h f)(x-y)g(y)dy = (\tau_h f)*g\,(x).$$

(d) Se x não pertence a $\mathrm{supp}(f)+\mathrm{supp}(g)$, então para cada $y \in \mathrm{supp}(g)$ nós temos $x-y \notin \mathrm{supp}(f)$. Donde segue $f(x-y)g(y) = 0$ para todo y e, portanto, $f*g\,(x) = 0$. Logo,

$$\{x : (f*g)(x) \neq 0\} \subset \ \mathrm{supp}(f)+\mathrm{supp}(g)\,\clubsuit$$

Teorema 4.8 (Desigualdade de Young para convolução). *Consideremos $p \in [1,\infty]$, uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Então, a função produto de convolução $f*g$ está definida quase sempre, é mensurável, está em $L^p(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f*g\|_p \leq \|f\|_1\|g\|_p.$$

Prova.

- Podemos supor $f \geq 0$ e $g \geq 0$, pois $(f*g)(x) < \infty$ se e só se $(|f|*|g|)(x) < \infty$. Ainda, $|f*g| \leq |f|*|g|$. Ainda mais, $f*g$ é mensurável se $f \geq 0$ e $g \geq 0$.

- O teorema segue direto da desigualdade de Young generalizada (Teorema 4.7) aplicada ao núcleo/kernel mensurável $K(x-y) = f(x-y)$, que satisfaz

$$\int |K(x-y)|dx = \int |K(x-y)|dy = \|f\|_1,$$

e ao **operador de convolução**

$$Tg(x) = \int K(x-y)g(y)dy = \int f(x-y)g(y)dy = f*g\,(x)\clubsuit$$

Como consequência, o espaço $L^1(\mathbb{R}^n, m)$ munido do produto de convolução é uma álgebra de Banach abeliana.

REFERÊNCIAS

[1.] Bartle, R. G.., *An extension of Egorov's theorem*, Amer. Math. Monthly, **87** no. 8, pp. 628–633.

[2.] Cohn, D. L., *Measure Theory*, Birkhäuser, 1980.

[3.] de Oliveira, O. R. B., *Some simplifications in the presentations of complex power series and unordered sums*, arXiv:1207.1472v2, 2012.

[4.] Feldman, M. B., *A proof of Lusin's theorem*, Amer. Math. Monthly **88** (1981), 191–192.

[5.] Folland, G. B., *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, second edition, Pure and Applied Mathematics, John Wiley and Sons, 1999.

[6.] Hairer, E., and Wanner, G., *Analysis by Its History*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 2000.

[7.] Lima, E., *Curso de Análise* , Vol 1., IMPA, 2009.

[8.] Littlewood, J. E., *Lectures on the Theory of Functions*, Oxford University Press, 1941.

[9.] Loeb, P. A. and Talvila, E., *Lusin's Theorem and Bochner Integration*, Scientiae Mathematicae Japonicae Online, Vol. 10, (2004), 55-62.

[10.] Royden, H. L. and Fitzpatrick, P. M., *Real Analysis*, fourth edition, Prentice Hall, 2010.

[11.] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1964.

[12.] Rudin, W., *Real & Complex Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1987.

[13.] Severini, C., *Sulle successioni di funzioni ortogonali* (Italian), Atti Acc. Gioenia. (5) 3, 10 S (1910).

[14.] Spivak, M., *O Cálculo em Variedades*, Ed. Ciência Moderna, 2003.

[15.] Stein, E. M., and Shakarchi, R., *Real Analysis - Measure Theory, Integra tion, and Hilbert Spaces*, Princeton University Press, 2005.

[16.] Swartz, C., *Measure, Integration and Function Spaces*, World Scientific, 1994.

[17.] Wheeden, R. L. and Zygmund, A. *Measure and Integral*, Marcel Deker, 1977.