MAT5798 - MEDIDA E INTEGRAÇÃO - 2016 - IME-USP

Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

`http://www.ime.usp.br/~oliveira` oliveira@ime.usp.br

Estas notas destinam-se aos alunos do curso Medida e Integração - MAT5798-IMEUSP - 2016 e baseiam-se 100% no livro de G. Folland, *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, second edition, John Wiley & Sons, além de uns 20% distribuídos por outros ótimos livros citados na bibliografia e alguns artigos. Apesar de se constituírem em quase uma tradução do núcleo de apenas cinco capítulos do livro base, excetuando as maravilhosas notas e exercícios propostos, não devem ser tidas como tal visto que não sou tradutor profissional e uma boa quantidade de material foi alterada e outra introduzida. Os erros de tradução e/ou matemática são de minha responsabilidade. Para finalizar, recomendo a compra e o estudo do merecidamente famoso livro de G. B. Folland.

Capítulo 0 - INTRODUÇÃO

Capítulo 1 - MEDIDAS

CAPÍTULO 0

0.1 Introdução

por E. M. Stein and R. Shakarchi

Eu evito com susto e horror esta lamentável
praga de funções que não tem derivadas.
C. Hermite, 1893

A partir de 1870 começou a tomar forma uma mudança revolucionária na conceituação básica da análise, que acabou por conduzir a uma vasta transformação e generalização do entendimento de objetos básicos como funções e noções como continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade.

A visão anterior de que funções relevantes em análise eram dadas por fórmulas ou outras expressões "analíticas", que tais funções eram por sua própria natureza contínuas (ou quase), que por necessidade tais funções possuiam derivadas na maioria dos pontos e, ainda mais, eram integráveis pelos métodos então aceitos – todas estas idéias começaram a cair sob o peso de vários exemplos e problemas que surgiram no assunto, os quais não podiam ser ignorados e requeriam novos conceitos para serem entendidos. Em paralelo com tais desenvolvimentos surgiram novas idéias que eram a um só tempo mais geométricas e mais abstratas: um entendimento mais claro da natureza das curvas, sua possibilidade de serem retificáveis e seu comprimento; o início da teoria dos conjuntos, começando com subconjuntos da reta real, o plano, etc., e a "medida" que poderia ser associada a cada um.

Isto não quer dizer que não houve considerável resistência à mudança de ponto de vista que esses avanços requeriam. Paradoxalmente, alguns dos líderes matemáticos à época, aqueles que deveriam ser os mais aptos a apreciar os novos enfoques, figuravam entre os mais céticos. O fato de que as novas idéias por fim vieram a vingar pode ser melhor entendido em termos das muitas questões que agora poderiam ser abordadas. Descreveremos aqui, um pouco imprecisamente, vários dos problemas mais significativos.

1. Séries de Fourier: completamento.

Dada f uma função Riemann integrável em $[-\pi,\pi]$, associamos sua série de Fourier

$$f \sim \sum a_n e^{inx}, \quad \text{onde} \quad a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

É conhecida a identidade de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

No entanto, a relação acima entre funções e seus coeficientes de Fourier não é completamente recíproca quando limitada a funções Riemann integráveis. Desta forma, se considerarmos o espaço $\mathcal{R}$ de tais funções com a norma

$$\sqrt{\int |f(x)|^2 dx}$$

e o espaço $l^2(\mathbb{Z})$, das sequências de quadrado somável, com a norma

$$\sqrt{\sum |a_n|^2},$$

a cada função f em $\mathcal{R}$ associamos uma sequência correspondente em $l^2(\mathbb{Z})$, e as duas normas são iguais. Porém, é fácil construir sequências em $l^2(\mathbb{Z})$ que não correspondem a nenhuma função em $\mathcal{R}$. Observemos que $l^2(\mathbb{Z})$ é completo mas $\mathcal{R}$ não. Desta forma, somos levados as duas questões abaixo.

(1) Quais "funções" esperamos surgir ao completarmos $\mathcal{R}$? Em outras palavras: dada uma sequência arbitrária $(a_n) \in l^2(\mathbb{Z})$, qual a natureza da função presumidamente correspondente a tais coeficientes ?

(2) Como integramos tais funções f (e checamos a fórmula para os coeficientes)?

Adendo. O chamado "problema das séries de Fourier" foi resolvido em 1966 por L. Carleson (Professor em UCLA).

2. Limites de funções contínuas.

Suponha que (f_n) é uma sequência de funções contínuas sobre $[0,1]$ e a valores reais. Assumamos que

$$\lim f_n(x) = f(x), \text{ para todo } x,$$

e questionemos a natureza da função limite f.

Se supormos que a convergência é uniforme, então o problema é bem trivial e f é contínua em todo ponto. Entretanto, eliminando tal hipótese, a mudança é radical e as questões que surgem podem ser bastante sutis. Um exemplo é dado pelo fato de que um pode construir uma sequência de funções contínuas (f_n) convergindo em todo ponto a uma função f tal que

(a) $0 \leq f_n(x) \leq 1$, para todo x.

(b) (f_n) é decrescente.

(c) f não é Riemann integrável.

Entretanto, em vista de (a) e (b), a sequência

$$\int_0^1 f_n(x)dx$$

converge a um limite. Portanto, é natural perguntar: qual método de integração pode ser utilizado para integrar f e obter

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim \int_0^1 f_n(x)\,dx?$$

É com a integral de Lebesgue que podemos resolver estes problemas e o anterior.

3. Comprimento de curvas.

O estudo de curvas no plano e o cômputo de seus comprimentos estão entre os primeiros ensinamentos do cálculo. Consideremos uma curva contínua γ no plano, descrita parametricamente por

$$\gamma = \{(x(t), y(t)) : t \in [a, b]\}$$

com $x = x(t)$ e $y = y(t)$ funções contínuas. Definamos o **comprimento** $L(\gamma)$ [com L para "lenght", comprimento em inglês] de γ da forma usual: como o supremo dos comprimentos das linhas poligonais conectando sucessivamente uma quantidade finita de pontos de γ, ordenados segundo o crescimento do parâmetro t.

Dizemos que γ é **retificável** se seu comprimento é finito. Se $x(t)$ e $y(t)$ são continuamente diferenciáveis temos a fórmula

$$L(\gamma) = \int_a^b [x'(t)^2 + y'(t)^2]^{\frac{1}{2}} dt. \tag{3.1}$$

Os problemas começam a surgir quando consideramos curvas gerais. Mais especificamente, duas indagações são naturais.

(1) Quais condições sobre $x(t)$ e $y(t)$ garantem a retificabilidade de γ?
(2) Satisfeitas tais condições, vale (3.1) para o comprimento de γ?

A primeira questão tem uma resposta completa em termos da noção de funções de "variação limitada". Para a segunda, ocorre que se x e y são funções de variação limitada então a integral (3.1) sempre faz sentido, porém a igualdade desejada em geral não se dá apesar de que é possível recuperar tal igualdade através de uma reparametrização conveniente da curva γ.

Surgem ainda outras questões. As curvas retificáveis, já que possuem comprimento, são objetos genuinamente uni-dimensionais. Será que existem curvas (não retificáveis) que são bi-dimensionais?

De fato, existem curvas no plano que preenchem um quadrado (e.g., curva de Peano). Mais geralmente, existem curvas de qualquer dimensão entre 1 e 2, se uma definição apropriada de dimensão fracionária é adotada.

4. Diferenciação e integração.

O chamado "teorema fundamental do cálculo" expressa o fato de que a diferenciação e a integração são operações inversas e isto pode ser formulado de duas formas distintas, as quais abreviamos como segue

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx. \tag{4.1}$$

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x). \tag{4.2}$$

No que tange à primeira afirmação, a existência de funções contínuas F que não são diferenciáveis em nenhum ponto, ou para as quais $F'(x)$ existe para todo x mas ainda assim F' não é integrável, conduz ao problema de encontrar a classe de funções F para as quais (4.1) é válida. Quanto à segunda afirmação, a questão é formular apropriadamente e estabelecer tal afirmação para toda a classe das funções integráveis f que surgem como soluções de qualquer um dos dois primeiros problemas comentados nesta introdução. Estas questões podem ser respondidas com a ajuda de certos argumentos de "cobertura" e com a noção de **continuidade absoluta**.

5. O problema da medida

Expondo bem claramente, o tópico fundamental que deve ser entendido para tentarmos responder todas as questões levantadas acima é o problema da medida. Formulado (imprecisamente) em sua versão bi-dimensional, temos o problema de associar a cada subconjunto E de $\mathbb{R}^2$ sua medida bi-dimensional $m_2(E)$, isto é, sua "área", estendendo a noção usual definida para conjuntos elementares.

Em vez desse caminho enunciemos mais precisamente o problema uni-dimensional que lhe é análogo, o de construir uma medida uni-dimensional $m_1 = m$ que generaliza a noção de comprimento em $\mathbb{R}$.

Estamos procurando uma função positiva m, definida sobre a família de subconjuntos E de $\mathbb{R}$, a qual permitimos assumir o valor $+\infty$. Requeremos:

(1) $m(E) = b - a$ se $E = [a, b]$, com $a \leq b$, de comprimento $b - a$.

(2) $m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$, se $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, com os conjuntos $E_{n's}$ disjuntos.

A condição (2) é a **aditividade enumerável** da medida m e implica o caso especial

(2') $m(E_1 \bigcup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$, se E_1 e E_2 são disjuntos.

No entanto, para justificar os vários argumentos por limites que surgem na teoria, o caso geral (2) é indispensável e (2') é definitivamente inadequado.

Aos axiomas (1) e (2) adicionamos a invariância por translação de m,

(3) $m(E + t) = m(E)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Um resultado básico da teoria é a existência (e unicidade) de tal medida, a medida de Lebesgue, se nos limitamos a uma classe de conjuntos razoáveis, que são chamados **mensuráveis**. Esta classe, além de fechada para reuniões enumeráveis, intersecções enumeráveis e complementares, ainda contém os conjuntos abertos, fechados e assim por diante. Não é possível definir uma tal medida sobre todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ pois, como veremos, existem conjuntos **não mensuráveis**.

É com a construção de tal medida que iniciamos nosso estudo. Dela fluirá a teoria geral da integração e, em particular, as soluções dos problemas discutidos acima.

Uma cronologia.

Concluímos esta introdução citando alguns dos principais eventos que marcaram o desenvolvimento do assunto.

1872 - Weierstrass constrói uma função não diferenciável em todo ponto.

1881 - Jordan introduz as funções de variação limitada e posteriormente (1887) sua conexão com retificabilidade.

1883 - Cantor apresenta o conjunto ternário.

1887 - Jordan conecta a noção de retificabilidade com funções de variação limitada.

1890 - Peano apresenta uma curva que preenche o espaço.

1898 - Borel apresenta os conjuntos mensuráveis hoje ditos borelianos.

1902 - Lebesgue apresenta sua teoria da medida e da integração.

1905 - Vitali apresenta uma construção de conjuntos não mensuráveis.

1906 - Fatou aplica a teoria de Lebesgue à análise complexa.

0.2 A reta estendida

Definimos a reta estendida por

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

[a reta acrescida dos **valores** $+\infty$ e $-\infty$]. Também indicamos $\overline{\mathbb{R}}$ por $[-\infty, +\infty]$. Dados $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ definimos a seguinte relação de ordem. Escrevemos $a < b$ se:

$$a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a < b, \text{ ou } a = -\infty \text{ e } b \neq -\infty, \text{ ou } a \neq +\infty \text{ e } b = +\infty.$$

Tal relação de ordem sobre $\overline{\mathbb{R}}$ é total [dados a e b, ambos na reta estendida, temos $a < b$ ou $b < a$ ou $a = b$] e completa [todo subconjunto não vazio A da reta estendida admite um único supremo, $\sup A$, e um único ínfimo, $\inf A$]. Notemos que $+\infty$ [respectivamente, $-\infty$] é um majorante [respectivamente, minorante] de qualquer subconjunto não vazio da reta estendida.

Estão bem definidas, de maneira óbvia, a adição

$$+ : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \smallsetminus \{(-\infty, +\infty), (+\infty, -\infty)\} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

e a multiplicação $\cdot : \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \smallsetminus \{(0, \pm\infty), (\pm\infty, 0)\} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$. Por conveniência definimos

$$0. \pm \infty = 0 \text{ e } \pm \infty.0 = 0.$$

0.2.1 Sequências na reta estendida

Consideremos X um conjunto não vazio. Uma sequência em X é uma função $x : \mathbb{N} \to X$. Indicamos a sequência x por $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, onde $x_n = x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Também denotamos x por $(x_n)_{\mathbb{N}}$ ou, brevemente, (x_n).

Seja (x_n) uma sequência na reta estendida $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. Dizemos que (x_n) converge a $L \in \mathbb{R}$ se, para todo $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que temos

$$|x_n - L| < \epsilon, \text{ para todo } n \geq N.$$

Dizemos que (x_n) converge [na reta estendida] a $+\infty$ se, para todo real $M > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que temos $x_n > M$, para todo $n \geq N$.

Dizemos que (x_n) converge [na reta estendida] a $-\infty$ se a sequência $(-x_n)$ converge a $+\infty$.

Se (x_n) converge a algum valor $L \in \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ (números também são valores), escrevemos

$$\lim x_n = L \quad \text{ou} \quad \lim_{n \to +\infty} x_n = L \quad \text{ou} \quad x_n \xrightarrow{n \to +\infty} L.$$

Também escrevemos, brevemente,

$$x_n \to L.$$

O limite de uma sequência na reta estendida, se existir, é único. (Cheque.)

Se a sequência (x_n) não converge a nenhum valor em $[-\infty, +\infty]$, dizemos que (x_n) diverge [na reta estendida].

Terminologia para sequências reais. Seja (x_n) uma sequência real.

Se

$$\lim x_n = L \in \mathbb{R},$$

dizemos que (x_n) converge [na reta real $\mathbb{R}$] a L.

Se

$$\lim x_n = \pm\infty,$$

dizemos que (x_n) diverge [na reta real $\mathbb{R}$] a $\pm\infty$.

Se a sequência real (x_n) não converge a um número real, dizemos que (x_n) diverge [na reta real].

O conjunto das sequências reais e convergentes em $\mathbb{R}$, munido das operações

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) \quad \text{e} \quad \lambda(x_n) = (\lambda x_n), \ \text{onde } \lambda \in \mathbb{R},$$

é um espaço vetorial real e temos

$$\lim(x_n + y_n) = \lim x_n + \lim y_n \quad \text{e} \quad \lim \lambda x_n = \lambda \lim x_n.$$

Seja X um conjunto e (x_n) uma sequência em X. Dado um subconjunto infinito de índices $\{n_1 < n_2 < n_3 < \cdots\}$ em $\mathbb{N}$, dizemos que a sequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de (x_n). Brevemente, escrevemos (x_{n_k}).

Observação 1. Seja (x_n) uma sequência em $[-\infty, +\infty]$. São equivalentes as afirmações abaixo.

- $x_n \to L$.
- Toda subsequência (x_{n_j}) converge a L.
- Toda subsequência $(x_{n_j}) = (y_j)$ admite uma subsequência $y_{j_k} \xrightarrow{k\to+\infty} L$.

Valor de Aderência. Dizemos que $L \in [-\infty, +\infty]$ é um valor de aderência de (x_n) se existe uma subsequência (x_{n_k}) tal que $x_{n_k} \to L$, se $k \to +\infty$.

Uma sequência $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ é crescente [decrescente] se temos

$$x_{n+1} \geq x_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \quad [x_{n+1} \leq x_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}].$$

Ainda, (x_n) é estritamente crescente [estritamente decrescente] se

$$x_{n+1} > x_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \quad [x_{n+1} < x_n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}].$$

Dizemos que (x_n) é monótona se (x_n) é crescente ou decrescente.

Teorema. *Toda sequência real $(x_1, x_2, \ldots)$ tem uma subsequência monótona.*

Prova. Exercício.

Assim, se (x_n) é limitada, tal subsequência monótona é convergente.

Toda sequência (x_n) em $\overline{\mathbb{R}}$ tem um valor de aderência em $\overline{\mathbb{R}}$. De fato, consideremos o conjunto

$$J = \{n : x_n = +\infty \text{ ou } x_n = -\infty\}$$

Se J é infinito, então ou $-\infty$ ou $+\infty$ [ou ambos] é valor de aderência de (x_n). Se J é finito, então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que a subsequência $(x_n)_{n\geq N}$ é real. Assim, se $(x_n)_{n\geq N}$ é ilimitada superiormente, ou inferiormente, em $\mathbb{R}$, então $+\infty$, ou $-\infty$, é valor de aderência de $(x_n)_{n\geq N}$ e, portanto, de (x_n) também. Se $(x_n)_{n\geq N}$ é limitada em $\mathbb{R}$, vimos acima que ela tem um valor de aderência em $\mathbb{R}$ e, portanto, a sequência (x_n) também tem.

A seguir, dada $(x_n)_{\mathbb{N}}$ em $[-\infty, +\infty]$, consideremos o conjunto (não vazio)

$$\mathcal{L} = \{L \in [-\infty, +\infty] : L \text{ é valor de aderência de } (x_n)\}.$$

Definimos os valores

$$\liminf x_n = \inf \mathcal{L} \quad \text{e} \quad \limsup x_n = \sup \mathcal{L}, \text{ ambos em } [-\infty, +\infty].$$

Observação 2. Para todo $N \in \mathbb{N}$, as sequências $(x_n)_{\mathbb{N}}$ e $(x_n)_{n>N}$ tem os mesmos valores de aderência e, portanto, os mesmos $\liminf$ e $\limsup$.

Teorema. *Seja (x_n) um sequência na reta estendida.*

(a) $\alpha = \liminf x_n$ é (o menor) valor de aderência de (x_n).

(b) $\beta = \limsup x_n$ é (o maior) valor de aderência de (x_n).

(c) $\lim x_n = L$ se e somente se $\liminf x_n = \limsup x_n = L$.

(d) Se (x_n) é limitada em $\mathbb{R}$, então $\liminf x_n$ e $\limsup x_n$ são reais.

Prova.

(a)
- ⋄ Caso $\alpha = -\infty$. É claro que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ com $x_{n_1} < -1$. Pela Observação 2, a sequência $(x_n)_{n>n_1}$ tem os mesmos valores de aderência que (x_n) e então existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} < -2$. Iterando, obtemos $x_{n_j} \to -\infty$.
- ⋄ Caso α real. Por definição de ínfimo, existe um valor de aderência de $(x_n)_{\mathbb{N}}$ em $[\alpha, \alpha+1)$. Logo, existe n_1 tal que $x_{n_1} \in (\alpha - 1, \alpha + 1)$. Como o $\liminf$ da subsequência $(x_n)_{n>n_1}$ é também α, por um raciocínio análogo ao anterior concluímos que existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in (\alpha - 1/2, \alpha + 1/2)$. Iterando tal processo obtemos uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente a α.
- ⋄ Caso $\alpha = +\infty$. Neste caso, temos $\mathcal{L} = \{+\infty\}$. Pela Observação 1 concluímos que $x_n \to +\infty$.

(b) Basta trocar (x_n) por $(-x_n)$.

(c) Neste caso, são trivialmente equivalentes as três seguintes afirmações: $\alpha = \beta = L$, o único valor de aderência é L, e $x_n \to L$.

(d) Trivial♣

Se (x_n) é uma sequência real ilimitada superiormente na reta, temos

$$\limsup x_n = +\infty.$$

Se (x_n) é uma sequência real ilimitada inferiormente na reta, temos

$$\liminf x_n = -\infty.$$

Dada uma sequência (x_n) na reta estendida, utilizamos as notações

$$\overline{\lim}\, x_n = \limsup(x_n) = \limsup x_n \quad \text{e} \quad \underline{\lim}\, x_n = \liminf(x_n) = \liminf x_n.$$

Observação 3. Uma sequência (x_n) tem uma subsequência convergente a L em $\mathbb{R}$ se e só se, dados quaisquer $\epsilon > 0$ e N em $\mathbb{N}$, existe $n > N$ tal que

$$|x_n - L| < \epsilon.$$

Verifique, é trivial.

Teorema. *Seja (x_n) uma sequência em $\overline{\mathbb{R}}$. Valem as identidades*

$$\liminf x_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{j\geq n} x_j = \lim_{n\to+\infty} \inf_{j\geq n} x_j$$

e

$$\limsup x_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{j\geq n} x_j = \lim_{n\to+\infty} \sup_{j\geq n} x_j.$$

Prova.

Trocando (x_n) por $(-x_n)$, vemos que basta analisar $\liminf x_n$. Pela Observação 2, para todo n temos

$$\inf_{j\geq n} x_j \leq \liminf (x_j)_{j\geq n} = \liminf x_n.$$

Logo,

$$a = \sup_{n\geq 1} \inf_{j\geq n} x_j \leq \liminf x_n.$$

Só resta vermos que a é valor de aderência de (x_n).

◇ Caso $a = -\infty$. É claro que

$$\inf_{j>n} x_j = -\infty, \text{ para todo } n.$$

Logo, existe $j_1 > 1$ tal que $x_{j_1} < -1$. Então, temos

$$\inf_{j>j_1} x_j = -\infty$$

e portanto existe $j_2 > j_1$ tal que $x_{j_2} < -2$. Iterando, obtemos $x_{j_k} \to -\infty$. Isto mostra que $-\infty$ é valor de aderência de (x_n).

◇ Caso a real. Sejam $\epsilon > 0$ e $N \in \mathbb{N}$. Como temos

$$\left(\inf_{j>n} x_j\right) \nearrow a,$$

segue que existe $m > N$ tal que

$$a - \epsilon < \inf_{j>m} x_j \leq a.$$

Por definição de ínfimo, existe $n > m > N$ tal que

$$a - \epsilon < \inf_{j>m} x_j \leq x_n < a + \epsilon.$$

Pela Observação 3, o número real a é valor de aderência de (x_n).

◇ Caso $a = +\infty$. Temos

$$x_n \geq \inf_{j\geq n} x_j \quad \text{e} \quad \inf_{j\geq n} x_j \xrightarrow{n\to\infty} +\infty.$$

Donde segue $x_n \to +\infty$♣

Sejam (x_n) e (y_n) duas sequências reais. Se a soma de limites inferiores está bem definida, temos (cheque)

$$\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf(x_n + y_n).$$

Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ escrevemos

$$\limsup_{x\to a} f(x) = \inf_{\delta>0}\left[\sup_{0<|x-a|<\delta} f(x)\right] \text{ e } \liminf_{x\to a} f(x) = \sup_{\delta>0}\left[\inf_{0<|x-a|<\delta} f(x)\right].$$

0.3 Somas Não Ordenadas e Séries em $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ e $\overline{\mathbb{R}}$

[Sobre tais tópicos sugiro também as palavras de Terence Tao (UCLA), *An Introduction to Measure Theory*, Preface pp. x–xiv e Chapter 1 pp. 38–40.]

Sejam X um conjunto e J um conjunto de índices, não vazios e quaisquer. Uma família em X, indexada em J, é uma função $x : J \to X$. Indicamos a família x por $(x_j)_{j\in J}$ ou $(x_j)_J$ ou, brevemente, (x_j).

Dada uma família (p_j) contida em $[0,+\infty]$, definimos

$$\sum_{j\in J} p_j = \sup\left\{\sum_{j\in F} p_j : \ F \text{ é subconjunto finito de } J\right\} \text{ em } [0,+\infty].$$

Tal sup é finito se e somente se existe um real $M \geq 0$ tal que

$$\sum_{j\in F} p_j \leq M, \text{ para todo subconjunto finito } F \text{ de } J \text{ (cheque)}.$$

Também escrevemos $\sum_J p_j$ para $\sum_{j\in J} p_j$ (ou, se J é subentendido, $\sum p_j$).

Sejam $(p_j)_J$ e $(q_j)_J$ famílias quaisquer em $[0,+\infty]$ e λ em $[0,+\infty]$. Verifique:

- $\sum(p_j + q_j) = \sum p_j + \sum q_j$.
- $\sum \lambda p_j = \lambda \sum p_j$.
- **(Propriedade Comutativa)** Se $\sigma : \mathcal{K} \to J$ é uma bijeção, então

$$\sum_J p_j = \sum_{\mathcal{K}} p_{\sigma(k)}.$$

Dada uma família $(p_j)_J$ em $[0,+\infty]$, se $\sum_J p_j$ é finito (um número real), dizemos que $(p_j)_J$ é uma **família somável** e que sua **soma** é o número $\sum_J p_j$. Escrevemos $\sum_J p_j < \infty$, indicando que $(p_j)_J$ é uma família somável (ou, brevemente, somável).

Teçamos alguns comentários sobre a associatividade para séries e somas.

A familiar *associatividade para séries* convergentes de números reais (ou complexos) reflete o fato de que é possível introduzir uma quantidade arbitrária de parenteses, com cada parentese abarcando uma quantidade finita de termos consecutivos na série, sem alterarmos o valor da soma da série considerada.

A *associatividade para uma soma* (não ordenada) enumerável $\sum_{\mathbb{N}} p_n$, diferentemente da restrita associatividade para séries, se dá mesmo particionando $\mathbb{N}$ em uma quantidade infinita de subconjuntos, com cada um de tais subconjuntos também infinito. Tal partição pode ser obtida, por exemplo, listando os números primos $J = \{1, 2, 3, 5, 7, \ldots\}$, em ordem crescente, e a seguir definindo $F_1 = \{1\}$, $F_2 = \{$os naturais múltiplos de $2\}$, $F_3 =$ os naturais múltiplos de 3 mas não de $2\}$, F_5 como o conjunto dos números naturais múltipos de 5 mas não de 2 ou 3, e assim sucessivamente e então escrevendo

$$\mathbb{N} = \bigcupdot_{p \in J} F_p, \text{ com } F_p \cap F_q = \varnothing \text{ se } p \neq q.$$

[O símbolo "$\bigcupdot$" indica uma união de conjuntos dois a dois disjuntos.]

Importante. A definição de famílias somáveis, em $\mathbb{R}$ ou em $\mathbb{C}$, que logo apresentaremos é equivalente a usualmente apresentada nos textos que abordam somas não ordenadas (ou, dito de outra forma, somabilidade). De fato, um dos resultados decorrentes da definição clássica de somabilidade estabelece que uma família $(v_j)_J$ em um espaço vetorial de dimensão finita normado e completo (isto é, as sequências de Cauchy são convergentes) é somável se e somente se ela é **absolutamente somável** (i.e., $\sum_J \|v_j\| < \infty$) . Ora, veremos (Teorema 2) que segundo a definição aqui adotada uma família de números em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ambos espaços vetoriais completos) é somável se e somente se ela é absolutamente somável.

Consideremos uma família de valores (termos) em $[0, +\infty]$. Mostraremos que podemos, sem alterar a somabilidade ou a não somabilidade da família,

(1) associar livremente os termos (da família) e

(2) dissociar cada termo livremente como uma família com valores em $[0, +\infty]$.

Em suma, para computarmos a soma (não ordenada) de uma família de números positivos podemos introduzir ou suprimir parenteses à vontade.

As somas não ordenadas são também chamadas, brevemente, **somas**.

Teorema 1 (Associatividade). *Seja $(p_j)_J$ uma família em $[0,+\infty]$ e J uma reunião de conjuntos J_k, com k em K, dois a dois disjuntos. Então,*

$$\sum_J p_j = \sum_{k\in K}\sum_{j\in J_k} p_j.$$

Prova. Mostremos duas desigualdades.

($\leq$) Dado F finito e contido em J, por hipótese existem índices distintos $k_1,\ldots,k_l$, todos em K, tal que $F \subset J_{k_1} \cup \ldots \cup J_{k_l}$. Donde segue,

$$\sum_F p_j = \sum_{F\cap J_{k_1}} p_j + \cdots + \sum_{F\cap J_{k_l}} p_j \;\leq\; \sum_{J_{k_1}} p_j + \;\cdots + \sum_{J_{k_l}} p_j \;\leq\; \sum_{k\in K}\sum_{j\in J_k} p_j$$

e, pela definição de $\sum_J p_j$, a primeira desigualdade:

$$\sum_J p_j \;\leq\; \sum_{k\in K}\sum_{j\in J_k} p_j.$$

($\geq$) Dados índices distintos $k_1,\ldots,k_l$ em K e conjuntos finitos F_{k_r}, com $F_{k_r} \subset J_{k_r}$ se $1 \leq r \leq l$, os conjuntos $J_{k_1},\ldots,J_{k_l}$ são dois a dois disjuntos e portanto os conjuntos $F_{k_1},\ldots,F_{k_l}$ também. Sendo assim, temos

$$\sum_{j\in F_{k_1}} p_j + \cdots + \sum_{j\in F_{k_l}} p_j \;\leq\; \sum_J p_j.$$

Então, fixando os conjuntos $F_{k_2},\ldots,F_{k_l}$ e computando o supremo sobre a família dos conjuntos finitos F_{k_1} contidos em J_{k_1} segue a desigualdade

$$\sum_{J_{k_1}} p_j + \sum_{F_{k_2}} p_j + \cdots + \sum_{F_{k_l}} p_j \leq \sum_J p_j.$$

Argumentando analogamente $(l-1)$-vezes, obtemos

$$\sum_{J_{k_1}} p_j + \sum_{J_{k_2}} p_j + \cdots + \sum_{J_{k_l}} p_j \;\leq\; \sum_J p_j.$$

Então, como $\{k_1,k_2,\ldots,k_l\}$ é qualquer subconjunto finito de K, temos

$$\sum_{k\in K}\sum_{j\in J_k} p_j \;\leq\; \sum_J p_j \clubsuit$$

Corolário (Teorema de Tonelli, para somas não ordenadas). *Sejam J e K conjuntos de índices. Seja $(p_{jk})_{J\times K}$ uma família em $[0,+\infty]$. Então,*

$$\sum_{J\times K} p_{jk} = \sum_J\sum_K p_{jk} = \sum_K\sum_J p_{jk}.$$

Definição. Seja $x \in \mathbb{R}$. Suas respectivas partes positiva e negativa são

$$p = \begin{cases} x\,, & \text{se } x \geq 0 \\ 0\,, & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad q = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x \geq 0 \\ -x\,, & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Temos,

$$\begin{cases} 0 \leq p \leq |x| \\ 0 \leq q \leq |x| \end{cases}, \quad \begin{cases} x = p - q \\ |x| = p + q \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} p = \frac{|x|+x}{2} \\ q = \frac{|x|-x}{2}. \end{cases}$$

São também úteis as notações

$$p = x^{+} = \max(x,0) \quad \text{e} \quad q = x^{-} = \max(-x,0) = -\min(x,0).$$

Definição. Seja J um conjunto de índices.

- Uma família (x_j) de números reais é **somável** se as famílias (p_j) e (q_j) das partes positivas e negativas de x_j, com j em J, respectivamente, são somáveis. Se (x_j) é somável, sua **soma (não ordenada)** é

$$\sum x_j = \sum p_j - \sum q_j.$$

- Uma família (z_j) de números complexos é **somável** se as famílias $\big(\mathrm{Re}(z_j)\big)_J$ e $\big(\mathrm{Im}(z_j)\big)_J$, das partes reais e imaginárias de z_j, com j em J, são somáveis. Se (z_j) é somável, sua **soma (não ordenada)** é

$$\sum z_j = \sum \mathrm{Re}(z_j) + i \sum \mathrm{Im}(z_j).$$

- Uma família (z_j), de números reais ou complexos, é uma família **absolutamente somável** se a família $(\,|z_j|\,)_J$ é somável. Isto é, se

$$\sum |z_j| < \infty\ .$$

Teorema 2. *Seja (z_j) uma família de números complexos. São equivalentes:*

(a) (z_j) é somável.

(b) (z_j) é absolutamente somável.

Prova.

Consideremos as famílias reais $\big(\mathrm{Re}(z_j)\big)_J$ e $\big(\mathrm{Im}(z_j)\big)_J$ e as famílias de suas partes positivas, denotadas (p_j) e (P_j), respectivamente, e de suas partes negativas, denotadas (q_j) e (Q_j), também respectivamente.

Para todo j em J, temos

$$0 \;\leq\; \min\{p_j, q_j, P_j, Q_j\} \leq \max\big\{p_j, q_j, P_j, Q_j\big\} \;\leq\; |z_j| \;\leq\; p_j + q_j + P_j + Q_j \;.$$

Logo, $\sum |z_j|$ é finita se e somente se $\sum p_j$, $\sum q_j$, $\sum P_j$ e $\sum Q_j$ são finitas. Portanto, a família $(|z_j|)$ é somável se e só se a família (z_j) é somável♣

Corolário 3. *Seja $(z_j)_J$ complexa e somável e $K \subset J$. Então, $(z_k)_{k\in K}$ é somável.*

Prova.

Pelo teorema acima temos $\sum_J |z_j| < \infty$. É fácil ver que

$$\sum_K |z_k| \leq \sum_J |z_j|.$$

Utilizando novamente o teorema acima, concluímos que $(z_k)_K$ é somável♣

Proposição 4. *Sejam $(z_j)_J$ e $(w_j)_J$ famílias complexas e somáveis e λ em $\mathbb{C}$. Então, as famílias $(z_j + w_j)_J$, $(\lambda z_j)_J$ e $(\overline{z_j})$ são somáveis e valem as propriedades abaixo.*

- $\sum(z_j + w_j) \;=\; \sum z_j \;+\; \sum w_j \;.$
- $\sum \lambda z_j \;=\; \lambda \sum z_j \;.$
- $|\sum z_j| \leq \sum |z_j|.$
- $\overline{\sum z_j} = \sum \overline{z_j}.$

Prova. Exercício.

Teorema 5 (Propriedade Comutativa). *Seja $(z_j)_J$ uma família somável de números complexos e $\sigma : K \to J$ uma bijeção. Então,*

$$\sum_J z_j = \sum_{k\in K} z_{\sigma(k)}.$$

Prova. Exercício.

Teorema 6 [Lei Associativa para Somas (Não Ordenadas)]. *Seja $(z_j)_J$ uma família somável em $\mathbb{C}$. Suponha J uma reunião de conjuntos J_k, com k em K, dois a dois disjuntos. Então, a família $(z_j)_{j\in J_k}$ é somável, para todo k em K, e*

$$\sum_J z_j = \sum_{k\in K}\sum_{J_k} z_j.$$

Prova.

Devido à definição de somável para famílias complexas e à linearidade da soma, podemos supor que $(z_j) = (a_j)$ é real. Por definição, temos

$$\sum a_j = \sum p_j - \sum q_j,$$

onde $p_j = a_j^+$ e $q_j = a_j^-$. A associatividade para somas de números em $[0, +\infty)$ e a linearidade para somas, garantem a tese (cheque)♣

Corolário (Teorema de Fubini, para somas não ordenadas). *Sejam J e K conjuntos de índices. Seja $(z_{jk})_{J\times K}$ somável em $\mathbb{C}$. Então,*

$$\sum_{J\times K} z_{jk} = \sum_{j\in J}\sum_{k\in K} z_{jk} = \sum_{k\in K}\sum_{j\in J} z_{jk}.$$

0.3.1 Somas não ordenadas em $[-\infty, +\infty]$

Atenção. Tal conceito se revela útil no Capítulo 3 (Medidas com Sinal e Diferenciação), precisamente para definir medidas com sinal.

Seja $(x_j)_{j\in J}$ uma família em $[-\infty, +\infty]$ que não assume ao menos um dos valores $-\infty$ e $+\infty$ [isto é, se assume $-\infty$ então não assume $+\infty$ e vice-versa]. Consideremos (p_j) e (q_j) as famílias (em $[0, +\infty]$) das partes positivas e negativas da família (x_j). Definimos,

$$\sum_J x_j = \begin{cases} \sum\limits_J p_j - \sum\limits_J q_j, & \textbf{se } \text{ao menos uma destas somas (não ordenadas) é finita,} \\ \\ \pm\infty, & \text{se existe algum } j \text{ tal que } x_j = \pm\infty. \end{cases}$$

É óbvio que o valor da soma $\sum_J x_j$ está bem definido e independe da ordem dos $x_{j's}$ e a chamamos então **soma não ordenada na reta estendida**.

Contra-exemplo. Seja $(x_j)_J$ tal que $\sum p_j = \sum q_j = +\infty$, com cada x_j real. Então, não está definida a soma não ordenada $\sum_J x_j$. Vide o caso, $J = \mathbb{N}$ e

$$x_j = \frac{(-1)^j}{j} \quad \text{(exemplo de Dirichlet).}$$

0.3.2 Séries em $[-\infty, +\infty]$ e em $\mathbb{R}$

Dada uma sequência $(x_n)_{\mathbb{N}}$ em $\overline{\mathbb{R}}$, que não assume ao menos um dos valores $-\infty$ ou $+\infty$, todas as suas n-ésimas somas parciais

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j$$

estão bem definidas. A **série** (ou **soma ordenada**), na **reta estendida**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$$

tem soma s em $\overline{\mathbb{R}}$ se $\lim s_n = s$. Neste caso, escrevemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = s.$$

Dizemos que uma série é **finita** se ela é convergente em $\mathbb{R}$ (logo, a série é real). Indicamos uma série finita pela notação

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n < \infty.$$

Uma série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n,$$

na reta estendida $\overline{\mathbb{R}}$, é dita **comutativamente/incondicionalmente convergente** se para toda **permutação** (ou, bijeção) $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_{\sigma(n)}$$

é convergente em $\overline{\mathbb{R}}$. Esta última série é dita um **rearranjo** da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

A série de números reais $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é dita **absolutamente convergente** se

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| < \infty.$$

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ uma série de números reais. Se (p_n) e (q_n) são as sequências das partes positivas e negativas de x_n, respectivamente, temos

$$0 \leq \min\{p_n, q_n\} \leq \max\{p_n, q_n\} \leq |x_n| = p_n + q_n.$$

Então, são equivalentes as três condições abaixo.

- A série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ é absolutamente convergente.
- As sequências (p_n) e (q_n) são somáveis.
- A sequência (x_n) é somável.

Nestas condições, é fácil ver que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n - \sum_{n=1}^{+\infty} q_n = \sum_{\mathbb{N}} p_n - \sum_{\mathbb{N}} q_n = \sum_{\mathbb{N}} x_n.$$

Donde segue que toda série real e absolutamente convergente é comutativamente convergente. Ainda, todos os seus rearranjos tem a mesma soma.

Por outro lado, suponhamos que a série real $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ satisfaz

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (p_n - q_n) < \infty$$

porém

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} (p_n + q_n) = +\infty.$$

Então, como o espaço das séries reais e convergentes é vetorial, segue que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n = +\infty.$$

Nesta situação, não é difícil obter um rearranjo não convergente da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x_n \quad \text{(cheque)}.$$

A não convergência absoluta garante a não convergência comutativa.

Portanto, uma série real é absolutamente convergente se e somente se ela é incondicionalmente/comutativamente convergente (sendo que os rearranjos tem mesma soma pois os valores das séries de termos positivos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} q_n$$

independem de ordenação).

Logo, todos os rearranjos de uma série (real ou na reta estendida) comutativamente/incondicionalmente convergente tem uma mesma soma (cheque).

Portanto, se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é uma série em $\overline{\mathbb{R}}$ e comutativamente convergente e

$$\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

é uma bijeção arbitrária, obtemos

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}.$$

Uma série real $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é dita **condicionalmente convergente** se

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge em } \mathbb{R} \text{ mas } \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| = \infty.$$

Um exemplo clássico (Dirichlet, 1837) é a série harmônica alternada

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

0.3.3 Séries em $\mathbb{C}$

Seja i a unidade imaginária, $i^2 = -1$.

Seja $(z_n)_{\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{C}$. A **série** (ou, **soma ordenada**) complexa $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ tem soma $z \in \mathbb{C}$ se $\lim s_n = z$, onde (s_n) é sequência das n-ésimas somas parciais $s_n = z_1 + \cdots + z_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, escrevemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = z.$$

É fácil ver que a série complexa $\sum_{n=1}^{+\infty} z_n$ é convergente se e somente se as séries reais $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Re} z_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Im} z_n$ são convergentes e, neste caso, temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{Im} z_n.$$

A série $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ é dita **absolutamente convergente** se $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| < \infty$. Devido às desigualdades

$$0 \le \min\left\{|\mathrm{Re} z_n|, |\mathrm{Im} z_n|\right\} \le \max\left\{|\mathrm{Re} z_n|, |\mathrm{Im} z_n|\right\} \le |z_n| \le |\mathrm{Re} z_n| + |\mathrm{Im} z_n|,$$

vemos que são equivalentes as afirmações abaixo (cheque).

- $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ é absolutamente convergente.
- As séries reais $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re} z_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im} z_n$ são absolutamente convergentes.
- As sequências $(\mathrm{Re} z_n)_{\mathbb{N}}$ e $(\mathrm{Im} z_n)_{\mathbb{N}}$ são somáveis.
- A sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é somável.

Em tais casos, temos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum z_n = \sum \mathrm{Re} z_n + i \sum \mathrm{Im} z_n.$$

O conjunto das séries complexas e convergentes e o conjunto das séries complexas absolutamente convergentes, com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar complexo, são espaços vetoriais complexos (isto é, sobre $\mathbb{C}$).

A definição para séries complexas incondicionalmente/comutativamente convergentes é análoga à correspondente definição empregada para séries reais.

0.4 Notações em $\mathbb{R}^n$

Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é também indicado pelo vetor $x = (x_1, \dots, x_n)$. Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, o produto interno em $\mathbb{R}^n$ é definido por

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

A norma euclidiana de x, ou o módulo de x, é

$$|x| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

O produto interno satisfaz a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$|x \cdot y| \leq |x|\,|y| \text{ quaisquer que sejam } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Prova. Temos,

$$\begin{aligned} |x \cdot y|^2 = (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2 &= \sum_i x_i^2 y_i^2 + 2 \sum_{i<j} x_i y_i x_j y_j \\ &\leq \sum_i x_i^2 y_i^2 + \sum_{i<j} (x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2) \\ &= \sum_{i,j} x_i^2 y_j^2 \\ &= (x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) \clubsuit \end{aligned}$$

A norma $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ definida sobre $\mathbb{R}^n$ possui as propriedades abaixo.

- $|x| \geq 0$, para todo x, e tem-se $|x| = 0$ se e somente se $x = 0$.
- $|\lambda x| = |\lambda|\,|x|$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
- $|x + y| \leq |x| + |y|$, quaisquer que sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ (desigualdade triangular)

A desigualdade triangular segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz. Pois,

$$|x + y|^2 = (x + y) \cdot (x + y) = x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y \leq |x|^2 + 2|x|\,|y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2 \clubsuit$$

Definição. *Seja Ω um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Dizemos que f é um* difeomorfismo *se f é diferenciável, bijetora, $f(\Omega)$ é um aberto e, ainda, $f^{-1} : f(\Omega) \to \Omega$ é também diferenciável.*

0.5 Espaços Métricos

Consideremos um conjunto não vazio X. Uma **métrica** sobre X é uma função $d : X \times X \to \mathbb{R}$ tal que

- $d(x,y) \geq 0$, para todo (x,y) em $X \times X$, e $d(x,y) = 0$ se e somente se $x = y$.
- (simetria) $d(x,y) = d(y,x)$, para todo (x,y) em $X \times X$.
- (Desigualdade triangular) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$, para todos x, y, z em X.

Notação. Consideremos x em X e um número $r > 0$.

- $B(x;r) = \{y \in X : d(y;x) < r\}$, é a **bola aberta** de centro x e raio r.
- $D(x;r) = \{y \in X : d(y,x) \leq r\}$, é a **disco** de centro x e raio r.
- $S_r(x) = \{y \in X : d(y,x) = r\}$, é a **circunferência** de centro x e raio r.

Definição. Seja E um subconjunto de X.

- E é **aberto** se para cada $x \in E$ existe $r > 0$ tal que $B(x;r) \subset E$.
- E é **fechado** se $E^c = X \setminus E$ é um conjunto aberto.
- Um ponto $x \in E$ é **ponto interior** a E se existir $r > 0$ tal que $B(x;r) \subset E$. O **interior** de E é, $\operatorname{int}(E) = \{x \in E : x \text{ é ponto interior a } E\}$. O interior de E é a reunião de todos os conjuntos abertos U tais que $U \subset E$. Isto é, $\operatorname{int}(E)$ é **o maior aberto** contido em E. Ainda, E é aberto se e somente se $\operatorname{int}(E) = E$.
- Um ponto $x \in X$ é um **ponto de aderência** de E (ou, **aderente** a E) se temos $B(x;r) \cap E \neq \varnothing$, qualquer que seja $r > 0$. O **fecho** do conjunto E é $\overline{E} = \{x \in X : x \text{ é ponto de aderência de } E\}$. O fecho de E é a intersecção de todos os conjuntos fechados F tais que $E \subset F$. Isto é, $\overline{E}$ é o menor fechado contendo E. Ainda mais, E é fechado se e somente se $\overline{E} = E$.

  Atenção. Evite confundir ponto de aderência (de um conjunto) com valor de aderência (de uma sequência).

- Um ponto $x \in X$ é **ponto de fronteira** de E se para todo $r > 0$ temos

$$B(x;r) \cap E \neq \varnothing \quad \text{e} \quad B(x;r) \cap E^c \neq \varnothing.$$

  A **fronteira** de E é $\partial E = \{x \in X : x \text{ é ponto de fronteira de } E\}$.

- Um ponto $x \in X$ é chamado um **ponto de acumulação** de E se temos

$$B(x;r) \cap (E \setminus \{x\}) \neq \varnothing, \text{ para todo } r > 0.$$

  O **derivado** de E é o conjunto $E' = \{x \in X : x \text{ é ponto de acumulação de } E\}$.

- Um ponto x, em E, é um **ponto isolado** de E se existe algum $r > 0$ tal que

$$B(x;r) \cap E = \{x\}.$$

  O conjunto E é **discreto** se todo ponto de E é isolado.

- O conjunto E é **denso** em X se $\overline{E} = X$.
- O conjunto E é **raro** se $\text{int}(\overline{E}) = \varnothing$.
- O **diâmetro** de E é $\text{diam}(E) = \sup\{d(x,y) : x, y \in E\}$.
- O conjunto E é **limitado** se $\text{diam}(E) < \infty$.
- Uma **cobertura** de E é uma família $\{V_j : j \in J\}$ de subconjuntos de X satisfazendo $E \subset \bigcup_{j \in J} V_j$.
- O conjunto E é **totalmente limitado** se, para cada $\epsilon > 0$, existe uma quantidade finita de bolas abertas de raio ϵ cobrindo E.
- E possui a **propriedade de Heine-Borel** se toda cobertura de E por conjuntos abertos (**cobertura aberta**) admite uma subcobertura finita.
- E é **compacto** se E tem a propriedade de Heine-Borel.
- E é **perfeito** se E é fechado e se todo ponto de E é um ponto de acumulação de E (isto é, se $E \subset E'$). Temos então que E é perfeito se e só se $E = E'$.

Definição. Seja $x \in X$, com X um espaço métrico. Um conjunto $V \subset X$ é uma **vizinhança** de x se existir uma bola $B(x;r)$, com $r > 0$, dentro de V.

Proposição. Seja X um espaço métrico. Valem as propriedades abaixo.

- X e $\varnothing$ são abertos e fechados.
- Toda bola aberta é um conjunto aberto.
- A união de qualquer família de conjuntos abertos é um conjunto aberto.
- A intersecção de uma família de conjuntos fechados é um conjunto fechado.
- A intersecção de uma família finita de conjuntos abertos é um aberto.
- A união uma família finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

Proposição. Seja $E \subset X$, com (X, d) métrico. São válidas as propriedades abaixo (verifique).

- $\partial E = \overline{E} \setminus \mathrm{int}(E)$.
- $\overline{E} = \mathrm{int}(E) \cup \partial E = E \cup E'$.
- E é fechado se e somente se $E \supset \partial E$.
- E é fechado se e somente se $E \supset E'$.

Definição. Seja $(x_n)_{\mathbb{N}}$ uma sequência contida em X. Dizemos que

- (x_n) converge a $x \in X$ se $\lim\limits_{n \to +\infty} d(x_n, x) = 0$. Utilizamos as seguintes notações: $x_n \to x$ se $n \to +\infty$ e, $\lim x_n = x$, e também $x_n \xrightarrow{X} x$.
- (x_n) é uma **sequência de Cauchy** se, para todo $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que temos $d(x_n, x_m) < \epsilon$, quaisquer que sejam $n, m \geq N$.

Proposição. Seja (X,d) um espaço métrico, $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset X$ e $x \in X$.

(a) Se (x_n) é de Cauchy e tem subsequência convergente a x, então $x_n \to x$.

(b) (x_n) admite uma subsequência convergente a x se e somente se para quaisquer $\epsilon > 0$ e N em $\mathbb{N}$, existe $n > N$ tal que $d(x_n, x) < \epsilon$.

(c) (x_n) converge a x se e somente se toda subsequência $(x_{n_j}) = (y_j)$ admite subsequência (y_{j_k}) convergente a x.

(d) Se $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é bijetora e $\lim x_n = x$, então $(y_j)_{\mathbb{N}}$, com $y_j = x_{\sigma(j)}$, converge a x. Alerta: $(x_{\sigma(j)})$ pode não ser subsequência de (x_n).

Definição. Seja (X,d) um espaço métrico. Dizemos que

- X é **separável** se X contém um subconjunto denso e enumerável.
- X possui um **base enumerável de abertos** se existe uma coleção enumerável de abertos de X tal que todo aberto de X é uma reunião de elementos da citada coleção.
- X é **completo** se toda sequência em X e de Cauchy, converge em X.

Proposição. Seja X um espaço métrico e $E \subset X$. Temos (**verifique**),

- X é separável se e só se X possui uma base enumerável de abertos.
- Dado x em X, temos que $x \in \overline{E}$ se e só existe $(x_n)_{\mathbb{N}} \subset E$ tal que $x_n \to x$.
- Suponha X completo. Então, E é completo se e só se E é fechado.

Definição. Sejam (X,d) e (Y,ρ) espaços métricos e $f : X \to Y$ uma função.

- Dizemos que f é **contínua em** $p \in X$ se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que temos $\rho\big(f(x), f(p)\big) < \epsilon$, para todo $x \in X$ tal que $d(x,p) < \delta$. Dizemos que f é **contínua** se f é contínua em cada ponto de X.
- Dizemos que f é **uniformemente contínua** se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que temos $\rho\big(f(x), f(x')\big) < \epsilon$, para todos $x, x' \in X$ tais que $d(x,x') < \delta$.

- Seja p um ponto não isolado de X (isto é, p é um ponto de acumulação de X) e $L \in Y$. Escrevemos $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{p}} \mathbf{f(x)} = \mathbf{L}$ se, para todo $\epsilon > 0$ existe algum $\delta > 0$ tal que temos $\rho(f(x), L) < \epsilon$, para todo x satisfazendo $0 < d(x,p) < \delta$.
- Dizemos que f é **localmente uniformemente contínua** se para cada $x \in X$ existir alguma vizinhança de x na qual f é uniformemente contínua.
- Dizemos que f é de **Lipschitz** ou **lipschtziana** se existe uma constante $M > 0$ tal que $\rho(f(x); f(x')) \leq Md(x; x')$, quaisquer que sejam $x, x' \in X$.
- Dizemos que f é **localmente lipschitziana** se para cada $x \in X$ existe alguma vizinhança V de x na qual f é lipschitziana.
- Dizemos que f é **bicontínua** ou um **homeomorfismo** se f é contínua, bijetora, e sua inversa $f^{-1} : Y \to X$ é também contínua.

Proposição. Seja $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ uma função. São verdadeiras as afirmações abaixo (verifique).

- f é contínua em um ponto $p \in X$ se e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f\big(B(p;\delta)\big) \subset B\big(f(p);\epsilon\big)$.
- f é contínua se e só se $f^{-1}(U)$ é aberto em X, para todo U aberto em Y.
- f é contínua em p se e somente se $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.
- f é contínua em p se e somente se, para toda sequência $(x_n) \subset X$ tal que $\lim x_n = x$, temos $\lim f(x_n) = f(p)$.

Teorema. *Seja $f : (X,d) \to (Y,\rho)$ uma função contínua e K um subconjunto compacto de X. Então, $f(K)$ é compacto em Y.*

Prova.

Consideremos uma cobertura aberta: $f(K) \subset \bigcup_J U_j$. Então, $K \subset \bigcup_J f^{-1}(U_j)$ é uma cobertura aberta. Como K é compacto, obtemos uma subcobertura finita $K \subset f^{-1}(U_{j_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(U_{j_N})$. Logo,

$$f(K) \subset U_{j_1} \cup \cdots \cup U_{j_N} \clubsuit$$

Definição. Sejam $E \subset X$ e $F \subset X$, com (X, d) um espaço métrico.

- **A distância** entre E e F é

$$d(E; F) = \sup\{d(x, y) : x \in E \text{ e } y \in F\}.$$

- A **bola aberta** centrada em E e de raio r é

$$B(E; r) = \{x \in X : d(x; E) < r\}.$$

Definição. Dado um conjunto X, a **diagonal** de $X \times X$ é

$$\Delta = \{(x, x) : x \in X\}.$$

Definição. Duas métricas d_1 e d_2, sobre X, são **métricas equivalentes** se existem constantes m e M tais que

$$md_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq Md_1(x, y), \text{ para todo } x, y \in X.$$

Métricas equivalentes induzem os mesmos abertos em X e as mesmas funções contínuas.

Proposição. Sejam (X, d) e (Y, ρ) espaços métricos. As três expressões abaixo definem métricas equivalentes sobre o produto cartesiano $X \times Y$.

$$\begin{aligned}
D_{\text{soma}}\big((x_1, y_1); (x_2, y_2)\big) &= d(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2), \\
D_{\text{máximo}}\big((x_1, y_1); (x_2, y_2)\big) &= \max\{d(x_1, x_2), \rho(y_1, y_2)\}, \\
D\big((x_1, y_1); (x_2, y_2)\big) &= \sqrt{d(x_1, x_2)^2 + \rho(y_1, y_2)^2}.
\end{aligned}$$

REFERÊNCIAS

[1.] Bartle, R. G.., *An extension of Egorov's theorem*, Amer. Math. Monthly, **87** no. 8, pp. 628–633.

[2.] Beardon, A. F., *Limits - a new approach to real analysis*, Springer, 1997.

[3.] Cohn, D. L., *Measure Theory*, Birkhäuser, 1980.

[4.] Feldman, M. B., *A proof of Lusin's theorem*, Amer. Math. Monthly **88** (1981), 191–192.

[5.] Folland, G. B., *Real Analysis - Modern Techniques and Their Applications*, second edition, Pure and Applied Mathematics, John Wiley and Sons, 1999.

[6.] Hairer, E., and Wanner, G., *Analysis by Its History*, UTM, Springer, 2000.

[7.] Lima, E., *Curso de Análise* , Vol 1., IMPA, 2009.

[8.] Littlewood, J. E., *Lectures on the Theory of Functions*, Oxford University Press, 1941.

[9.] Loeb, P. A. and Talvila, E., *Lusin's Theorem and Bochner Integration*, Scientiae Mathematicae Japonicae Online, Vol. 10, (2004), 55-62.

[10.] de Oliveira, O. R. B., *Some simplifications in the presentations of complex power series and unordered sums*, arXiv:1207.1472v2, 2012.

[11.]Royden, H. L. & Fitzpatrick, P. M., *Real Analysis*, 4 ed, Prentice Hall, 2010.

[12.] Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1964.

[13.] Rudin, W., *Real & Complex Analysis*, third edition, McGraw-Hill, 1987.

[14.] Severini, C., *Sulle successioni di funzioni ortogonali* (Italian), Atti Acc. Gioenia. (5) 3, 10 S (1910).

[15.] Spivak, M., *O Cálculo em Variedades*, Ed. Ciência Moderna, 2003.

[16.] Stein, E. M., and Shakarchi, R., *Real Analysis - Measure Theory, Integra tion, and Hilbert Spaces*, Princeton University Press, 2005.

[17.] Swartz, C., *Measure, Integration and Function Spaces*, World Scientific, 1994.

[18.] Tao, T., An Introduction to Measure Theory, AMS.

[19.]Wheeden, R. L. & Zygmund, A,. *Measure and Integral*, Marcel Deker, 1977.