1ª Prova de MAT5798 - MEDIDA E INTEGRAÇÃO - IMEUSP
12 de abril - 1º semestre de 2016

Q	N
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
E1	
E2	
Total	

Nome : __________**SEMI-GABARITO**________________
NºUSP : ____
Professor : **Oswaldo Rio Branco de Oliveira**

1. A prova tem duração de 3 horas e pode ser feita a lápis.
2. Escolha e resolva **5 (cinco)** questões. Justifique as suas afirmações.

Boa prova.

1. Seja x arbitrário em $[0,1]$.

   (a) Mostre que x tem ao menos uma expansão ternária
   $$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n} \text{ com cada } a_n \in \{0,1,2\}.$$

   (b) Seja $K = \{x : x \text{ tem uma expansão ternária com cada } a_n \text{ igual a 0 ou 2}\}$. Tal expansão é dita normalizada. Mostre que esta é única.

   (c) Mostre que K é compacto, tem medida nula e é totalmente desconexo.

   (d) Dado $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} \in K$ por sua expansão normalizada, definimos a função
   $$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2^n}, \text{ onde } b_n = a_n/2.$$

   Mostre que F está bem definida, é crescente (não estrita/e) e
   $$F(K) = [0,1].$$

2. Seja $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ uma álgebra. Considere $\mathcal{A}_\sigma$, a coleção das uniões contáveis de conjuntos pertencentes à álgebra $\mathcal{A}$, e a coleção $\mathcal{A}_{\sigma\delta}$ das intersecções de conjuntos pertencentes à coleção $\mathcal{A}_\sigma$. Seja μ_0 uma pré-medida sobre a álgebra $\mathcal{A}$ e μ^* a medida exterior induzida por μ_0. Verifique as afirmações abaixo.

   (a) Para todo $E \subset X$ e para todo $\epsilon > 0$ existe $A \in \mathcal{A}_\sigma$ tal que
   $$E \subset A \;\text{ e }\; \mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \epsilon.$$

   (b) Se $\mu^*(E) < \infty$, então E é μ^*-mensurável se e só se existe $B \in \mathcal{A}_{\sigma\delta}$ com
   $$E \subset B \;\text{ e }\; \mu^*(B \setminus E) = 0.$$

   (c) Extra. Se μ_0 é σ-finita, a restrição $\mu^*(E) < \infty$ no item anterior é supérflua.

Solução.

Pelo *Teorema de Carathéodory*, a família $\mathcal{M}$ dos conjuntos μ^*-mensuráveis é uma σ-álgebra. Ainda, todo conjunto de medida exterior zero é μ^*-mensurável. Ainda mais,
$$\mu = \mu^*\Big|_{\mathcal{M}} \quad \text{é medida completa.}$$
Pela proposição *A Pré-Medida e a Medida Exterior*, cada conjunto da álgebra $\mathcal{A}$ é μ^*-mensurável. Isto é, $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Ainda mais,
$$\mu^*|_{\mathcal{A}} = \mu_0.$$

(a) Por definição, $\mu^*(E) = \inf\Big\{ \sum \mu_0(A_n) : \; (A_n)_{\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \;\text{ e }\; E \subset \cup A_n \Big\}$.
Logo, dado $\epsilon > 0$ existe uma sequência $(A_n) \subset \mathcal{A}$ tal que
$$A = \cup A_n \supset E \;\text{ e }\; \sum \mu_0(A_n) \leq \mu^*(E) + \epsilon.$$
O conjunto A pertence a $\mathcal{A}_\sigma$ e, por definição de μ^*,
$$\mu^*\left(\cup A_n\right) \leq \sum \mu_0(A_n).$$
Com as duas últimas desigualdades obtemos a desigualdade desejada.

(b) Seja $E \subset X$ tal que $\mu^*(E) < \infty$.

($\Rightarrow$) Suponha $E \in \mathcal{M}$. Pelo item (a), dado $n \in \mathbb{N}$ existe $B_n \in \mathcal{A}_\sigma$ com
$$E \subset B_n \;\text{ e }\; \mu(B_n) \leq \mu(E) + \frac{1}{n}.$$
Logo, $E \subset B = \cap_{n=1}^\infty B_n \in \mathcal{A}_{\sigma\delta} \subset \mathcal{M}$. Para todo n temos $B \subset B_n$ e
$$\mu(E) \leq \mu(B) \leq \mu(B_n) \leq \mu(E) + \frac{1}{n}.$$
Donde concluímos $\mu(B) = \mu(E) < \infty$ e
$$\mu^*(B \setminus E) = \mu(B \setminus E) = \mu(B) - \mu(E) = 0.$$

($\Leftarrow$) Por *Carathéodory* segue que $B \setminus E \in \mathcal{M}$ e que $\mathcal{A}_{\sigma\delta} \subset \mathcal{M}$. Logo,
$$E = B \setminus (B \setminus E) \in \mathcal{M}.$$

(c) Extra. Por hipótese, temos

$$X = \bigcup_{\mathbb{N}} X_n, \quad \text{com cada} \quad X_n \in \mathcal{A} \;\; \text{e} \;\; \mu_0(X_n) < \infty.$$

Seja E um conjunto arbitrário μ^*-mensurável. Isto é, $E \in \mathcal{M}$.

($\Rightarrow$) Pelos resultados enunciados segue que $E_n = E \cap X_n$ é μ^*-mensurável. Segue também que $\mu^*(E_n) \leq \mu^*(X_n) = \mu_0(X_n) < \infty$.

Seja $0 < \epsilon < 1$. Pelo item (a) existe $C_n \in \mathcal{A}_\sigma \subset \mathcal{M}$ tal que

$$E_n \subset C_n \;\; \text{e} \;\; \mu^*(C_n) \leq \mu^*(E_n) + \frac{\epsilon}{2^n} < \infty.$$

Segue $E = \cup E_n$. Ainda, $C = C_\epsilon = \cup C_n \in \mathcal{A}_\sigma$. Ainda mais,

$$E \subset C \quad \text{e} \quad C \setminus E = (\cup C_n) \setminus (\cup E_n) \subset \cup(C_n \setminus E_n).$$

Encontramos então

$$\mu^*(C \setminus E) = \mu(C \setminus E) \leq \sum [\mu(C_n) - \mu(E_n)] = \sum [\mu^*(C_n) - \mu^*(E_n)] \leq \epsilon.$$

Logo, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $B_k \in \mathcal{A}_\sigma$ com $E \subset B_k$ e $\mu^*(B_k \setminus E) \leq 1/k$. Então temos

$$E \subset B = \cap B_k \in \mathcal{A}_{\sigma\delta} \;\; \text{e} \;\; \mu^*(B \setminus E) = 0.$$

($\Leftarrow$) Por *Carathéodory* segue que $B \setminus E \in \mathcal{M}$ e que $\mathcal{A}_{\sigma\delta} \subset \mathcal{M}$. Logo,

$$E = B \setminus (B \setminus E) \in \mathcal{M} \clubsuit$$

3. Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, μ^* a medida exterior induzida por μ, a σ-álgebra $\mathcal{M}^*$ dos conjuntos μ^*-mensuráveis e, por fim, $\overline{\mu}$ a restrição

$$\overline{\mu} = \mu^*\Big|_{\mathcal{M}^*} : \mathcal{M}^* \to [0, \infty].$$

   (a) Se μ é σ-finita então $\overline{\mu}$ é o completamento de μ. Seja ν tal completamento.
   (b) Defina medida saturada.
   (c) Em geral, $\overline{\mu}$ é a saturação do completamento de μ. Seja $\widehat{\nu}$ tal saturação.

Solução.

Afirmações.

1. Pelo *Teorema do Completamento* existe o completamento $\nu : \overline{\mathcal{M}} \to [0, \infty]$ da medida μ, onde ν é medida completa e estende μ. O domínio de ν é a **σ-álgebra**

$\overline{\mathcal{M}} = \{E \cup F : E \in \mathcal{M}$ e $F \subset N$ para algum N com $\mu(N) = 0\}$ e $\nu(E \cup F) = \nu(E)$.

2. Pelo *Teorema de Carathéodory* $\mathcal{M}^*$ é uma σ-álgebra, todo conjunto com medida exterior zero pertence a $\mathcal{M}^*$ e a restrição $\overline{\mu}$ é uma medida completa.

3. Obviamente, $\mathcal{M}$ é uma álgebra e a medida μ é uma pré-medida.

4. Pela *Proposição 1.7 (A Pré-Medida e a Medida Exterior)* segue

$$\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^* \text{ e } \mu^*|_{\mathcal{M}} = \mu.$$

5. Seja $F \subset X$.

$$\boxed{\text{Temos } F \subset N, \text{ para algum } N \text{ com } \mu(N) = 0, \text{ se e somente se } \mu^*(F) = 0.}$$

De fato, se existe um tal N, pela definição de μ^* obtemos $\mu^*(F) \leq \mu(N) = 0$. Inversamente, se $\mu^*(F) = 0$, pela definição de ínfimo existem $N_1, N_2, \ldots$ tais que $F \subset N_n$ e $\mu(N_n) \searrow 0$. Então, $F \subset \cap N_n = N \in \mathcal{M}$ e $\mu(N) = \lim \mu(N_n) = 0$.

6. É agora trivial ver que

$$\boxed{\overline{\mathcal{M}} = \{E \cup F : E \in \mathcal{M} \text{ e } \mu^*(F) = 0\}.}$$

Iniciemos a prova propriamente dita.

(a) Pela Afirmação 6 (*Simplificação de* $\overline{\mathcal{M}}$) e o *Teorema de Carathéodory*, segue

$$\overline{\mathcal{M}} \subset \mathcal{M}^*.$$

Dado $E \in \mathcal{M}^*$ (isto é, E é μ^*-mensurável), como μ é σ-finita segue que [vide questão Q.2(c)-extra] existe um mensurável $B \supset E$ com

$$\mu^*(B \setminus E) = 0 \text{ e } E = B \setminus (B \setminus E).$$

Portanto $B \setminus E \in \overline{\mathcal{M}}$. Obviamente $B \in \overline{\mathcal{M}}$. Donde segue $E \in \overline{\mathcal{M}}$ e

$$\mathcal{M}^* = \overline{\mathcal{M}}.$$

A seguir, provemos que $\overline{\mu} = \nu$.
Seja $E \cup F$ com $E \in \mathcal{M}$ e $\mu^*(F) = 0$. Então $\mu^*(F \setminus E) = 0$ e portanto $(F \setminus E) \in \overline{M} = \mathcal{M}^*$. Por tais condições e as observações acima, segue

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(E \cup F) &= \overline{\mu}[E \cup (F \setminus E)] = \overline{\mu}(E) + \overline{\mu}(F \setminus E) = \mu^*(E) + \mu^*(F \setminus E)\\ &= \mu(E) + 0 = \nu(E) = \nu(E \cup F).\end{aligned}$$

(b) Seja (X, μ) um espaço de medida. Dado um conjunto arbitrário $E \subset X$, dizemos que E é **localmente mensurável** se

$$E \cap A \in \mathcal{M}, \text{ para todo } A \in \mathcal{M} \text{ tal que } \mu(A) < \infty.$$

Definimos

$$\mathcal{M}_{\text{loc}} = \{E \subset X : \ E \text{ é localmente mensurável}\}.$$

É claro que $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_{\text{loc}}$.
Dizemos que a medida μ é **saturada** se

$$\mathcal{M}_{\text{loc}} = \mathcal{M}.$$

(c) Como acima, o **completamento de** μ é

$$\nu : \overline{\mathcal{M}} \longrightarrow [0, \infty].$$

Indiquemos a **saturação de** ν por

$$\widehat{\nu} : (\overline{\mathcal{M}})_{\text{loc}} \longrightarrow [0, \infty], \quad \text{onde } \ \widehat{\nu}(E) = \begin{cases} \nu(E) & \text{se } E \in \overline{\mathcal{M}}, \\ \\ \infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mostremos que

$$\begin{cases} \mathcal{M}^* = (\overline{\mathcal{M}})_{\text{loc}} \\ \text{e} \\ \overline{\mu}(E) = \widehat{\nu}(E), \quad \text{para todo } E \in \mathcal{M}^* = (\overline{\mathcal{M}})_{\text{loc}}. \end{cases}$$

Sejam $E \in \mathcal{M}^*$ e uma reunião $A \cup F \in \overline{\mathcal{M}}$, sob as condições

$$A \in \mathcal{M}, \quad \mu^*(F) = 0 \ \text{ e } \ \nu(A \cup F) = \mu(A) < \infty.$$

Mostremos que $E \cap (A \cup F) \in \overline{\mathcal{M}}$. Primeiro, é trivial ver que $E \cap F \in \overline{\mathcal{M}}$ [segue de $\mu^*(E \cap F) \leq \mu^*(F) = 0$]. Segundo, analisemos $E \cap A$.
É claro que $E \cap A \in \mathcal{M}^*$ e também que $\mu^*(E \cap A) \leq \mu^*(A) = \mu(A) < \infty$.
Pela questão Q2(b) segue que existe um mensurável $B \in \mathcal{M}$ tal que

$$E \cap A \subset B \ \text{ e } \ \mu^*[B \setminus (E \cap A)] = 0.$$

Assim, como já mostramos, $B \setminus (E \cap A) \in \overline{\mathcal{M}}$. Donde segue

$$E \cap A = B \setminus [B \setminus (E \cap A)] \ \in \ \overline{\mathcal{M}}.$$

Logo, $E \cap (A \cup F) \in \overline{\mathcal{M}}$ e concluímos que $E \in (\overline{\mathcal{M}})_{\text{loc}}$, como desejado.
A seguir, seja $P \in (\overline{\mathcal{M}})_{\text{loc}}$. Mostremos que $P \in \mathcal{M}^*$. Consideremos um arbitrário $Q \subset X$ tal que $\mu^*(Q) < \infty$. Por definição da medida exterior μ^*

$$\text{existe uma sequência } (Q_n) \subset \mathcal{M} \ \text{ tal que } \ Q \subset Q_n \ \text{ e } \ \mu(Q_n) \searrow \mu^*(Q).$$

Segue

$$\mu^*(Q \cap P) + \mu^*(Q \cap P^c) \leq \mu^*(Q_n \cap P) + \mu^*(Q_n \cap P^c).$$

Para cada n valem as condições $Q_n \in \mathcal{M} \subset \overline{\mathcal{M}}$ e $\nu(Q_n) = \mu(Q_n) < \infty$. Devido à hipótese sobre P, temos $P \cap Q_n \in \overline{\mathcal{M}}$. Assim, obtemos

$$Q_n \cap P = R_n \cup S_n, \quad \text{com } R_n \in \mathcal{M} \text{ e } \mu^*(S_n) = 0.$$

Destaquemos que $(\overline{\mathcal{M}})_{\text{loc}}$ é uma σ-álgebra e portanto $P^c \in (\overline{\mathcal{M}})_{\text{loc}}$. Então, analogamente ao feito para P, obtemos

$$Q_n \cap P^c = T_n \cup U_n, \quad \text{com } T_n \in \mathcal{M} \text{ e } \mu^*(U_n) = 0.$$

Segue

$$\begin{aligned} \mu^*(Q_n \cap P) + \mu^*(Q_n \cap P^c) &\leq \mu^*(R_n \cup S_n) + \mu^*(T_n \cup U_n) \\ &\leq \mu^*(R_n) + \mu^*(S_n) + \mu^*(T_n) + \mu^*(U_n) \\ &= \mu(R_n) + \mu(T_n). \end{aligned}$$

Temos $R_n \subset P$ e $T_n \subset P^c$. Logo, R_n e T_n são disjuntos. Segue então

$$\mu(R_n) + \mu(T_n) = \mu(R_n \cup T_n).$$

Os conjuntos R_n e T_n estão ambos contidos em Q_n. Segue então

$$\mu(R_n \cup T_n) \leq \mu(Q_n).$$

Resumindo, encontramos

$$\mu^*(Q \cap P) + \mu^*(Q \cap P^c) \leq \mu(Q_n), \text{ para todo } n.$$

Impondo $n \to \infty$ encontramos

$$\mu^*(Q \cap P) + \mu^*(Q \cap P^c) \leq \mu^*(Q).$$

Isto mostra que $P \in \mathcal{M}^*$ e que $(\overline{\mathcal{M}})_{\text{loc}} \subset \mathcal{M}^*$. Está completa a prova de

$$\mathcal{M}^* = \left(\overline{\mathcal{M}}\right)_{\text{loc}}.$$

A seguir, mostremos que a restrição $\overline{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{M}^*}$ é a saturação $\widehat{\nu}$ do completamento ν da medida μ.
Seja $V \in \overline{\mathcal{M}}$. Temos $V = W \cup Y$ com $W \in \mathcal{M}$ e $\mu^*(Y) = 0$. Por definição,

$$\widehat{\nu}(V) = \nu(V) = \mu(W).$$

Por outro lado, temos

$$\overline{\mu}(W) \leq \overline{\mu}(V) = \mu^*(W \cup Y) \leq \mu^*(W) + \mu^*(Y) = \mu^*(W) = \overline{\mu}(W).$$

Logo,

$$\overline{\mu}(V) = \overline{\mu}(W) = \mu^*(W) = \mu(W) = \widehat{\nu}(V).$$

Por fim, consideremos um conjunto $I \in \left(\overline{\mathcal{M}}\right)_{\text{loc}} \setminus \overline{\mathcal{M}}$. Por definição temos

$$\widehat{\nu}(I) = \infty.$$

Ainda, $I \in (\overline{\mathcal{M}})_{\text{loc}} \subset \mathcal{M}^*$. Logo, I é μ^*-mensurável mas $I \notin \overline{\mathcal{M}}$.
Temos $\mu^*(I) = \infty$. Caso contrário, temos $\mu^*(I) < \infty$ onde I é μ^*-mensurável. Logo, pela questão Q2(b) existe um mensurável J tal que

$$I \subset J \quad \text{e} \quad \mu^*(J \setminus I) = 0.$$

Assim, J e também $J \setminus I$ pertencem a $\overline{\mathcal{M}}$ e $I = J \setminus (J \setminus I) \in \overline{\mathcal{M}}$. Absurdo!
Concluímos então que

$$\overline{\mu}(I) = \mu^*(I) = \infty = \widehat{\nu}(I) \clubsuit$$

4. Considere a função $F : K \to [0,1]$ dada na primeira questão. É permitido utilizar os resultados anunciados na primeira questão. Particione o aberto

$$[0,1] \setminus K = \cup (c_n, d_n)$$

em uma união de intervalos abertos disjuntos (c_n, d_n).

(a) Mostre que $F(c_n) = F(d_n)$.
Dica: Identifique tais números c_n e d_n e suas expansões normalizadas.

(b) Defina $\overline{F}$ sobre cada intervalo (c_n, d_n) pela constante $F(c_n) = F(d_n)$ e mostre que a extensão $\overline{F} : [0,1] \to [0,1]$ é sobrejetora e contínua.
Dica: Utilize que $F : K \to [0,1]$ é sobrejetora e contínua.

Prova.

(a) **Para mais detalhes, solicito consultar o Exercício 18 na Lista 0.** Os extremos c_n e d_n do intervalo (c_n, d_n) tem forma $p/3^N$ e representações normalizadas (em que os coeficientes valem 0 ou 2)

$$c_n = \frac{a_1}{3} + \cdots + \frac{a_{N-1}}{3^{N-1}} + \frac{0}{3^N} + \frac{2}{3^{N+1}} + \frac{2}{3^{N+2}} + \frac{2}{3^{N+3}} + \cdots$$

$$d_n = \frac{a_1}{3} + \cdots + \frac{a_{N-1}}{3^{N-1}} + \frac{2}{3^N}.$$

Então, se $b_j = a_j/2$ (onde j percorre $\mathbb{N}$) temos

$$F(c_n) = \frac{b_1}{2} + \cdots + \frac{b_{N-1}}{2^{N-1}} + \frac{0}{2^N} + \frac{1}{2^{N+1}} + \frac{1}{2^{N+2}} + \frac{1}{2^{N+3}} + \cdots$$

$$F(d_n) = \frac{b_1}{2} + \cdots + \frac{b_{N-1}}{2^{N-1}} + \frac{1}{2^N}.$$

Logo, $F(d_n) = F(c_n)$.

(b) Pela questão 1 desta prova, $F : K \to [0,1]$ é crescente e sobrejetora. Então, pela definição da extensão $\overline{F}$ temos que

$$\overline{F} : [0,1] \to [0,1] \ \text{ é também sobrejetora e crescente.}$$

É fácil ver que toda função $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e sobrejetora é contínua. Analogamente, $\overline{F} : [0,1] \to [0,1]$ é contínua♣

5. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Mostre que as implicações abaixo são verdadeiras se e somente se μ é completa.

(a) Se f é mensurável e $f = g$ q.s., então g é mensurável.

(b) Se f_n é mensurável, para todo n em $\mathbb{N}$, e $f_n \to f$ q.s., então f é mensurável.

Solução. Temos $f : X \to \mathbb{R}$ ou $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ou $f : X \to \mathbb{C}$.

◇ **μ completa $\Rightarrow$ (a).** Sejam f mensurável e g tal que $g = f$ q.s. Então, existe N com $\mu(N) = 0$ tal que $g(x) = f(x)$ para todo $x \in N^c$. Seja O um aberto no contradomínio de f. Então,

$$g^{-1}(O) = \left[g^{-1}(O) \cap N\right] \bigcup \left[g^{-1}(O) \cap N^c\right] = \left[g^{-1}(O) \cap N\right] \bigcup \left[f^{-1}(O) \cap N^c\right].$$

Como $g^{-1}(O) \cap N \subset N$ e μ é completa, então $g^{-1}(O) \cap N$ é mensurável. Como$f$ é mensurável, então $f^{-1}(O) \cap N^c$ é mensurável. Logo, o conjunto $g^{-1}(O)$ é mensurável e portanto a função g é mensurável.

◇ **(a) $\Rightarrow$ μ completa.** Seja N tal que $\mu(N) = 0$ e um conjunto arbitrário $E \subset N$. Sejam as características

$$g = \chi_E \ \text{ e } \ f = \chi_N.$$

Então, f é mensurável e temos $g = f = 0$ em N^c. Segue $g = f$ q.s. Assim, por hipótese, a função $g = \chi_E$ é mensurável. Portanto, $E = g^{-1}(1)$ é mensurável e então μ é completa.

◇ **μ completa $\Rightarrow$ (b).** Seja (f_n) uma sequência de mensuráveis tal que $f_n \to f$ q.s. Então, existe N com $\mu(N) = 0$ tal que $f_n(x) \to f(x)$ para todo $x \in N^c$. Logo,

$$f_n \chi_{N^c} \to f \chi_{N^c} \ \text{ em todo ponto.}$$

Sabemos neste caso que $f\chi_{N^c}$ é mensurável. Seja O um aberto no contradomínio de f. Temos

$$f^{-1}(O) = \left[f^{-1}(O) \cap N\right] \bigcup \left[f^{-1}(O) \cap N^c\right] = \left[f^{-1}(O) \cap N\right] \bigcup (f\chi_{N^c})^{-1}(O).$$

Como $f^{-1}(O) \cap N \subset N$ e μ é completa, então $f^{-1}(O) \cap N$ é mensurável. Como $f\chi_{N^c}$ é mensurável, então $(f\chi_{N^c})^{-1}(O)$ é mensurável. Logo, $f^{-1}(O)$ é um conjunto mensurável e f é uma função mensurável.

◇ **(b) $\Rightarrow$ μ completa.** Seja N tal que $\mu(N) = 0$ e um conjunto arbitrário $E \subset N$. Sejam as características

$$f = \chi_E \ \text{ e } \ f_k = \chi_N, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Então, cada f_k é mensurável e $f_k(x) \to f(x) = \chi_E(x)$ para todo $x \in N^c$. Isto é, $f_k \to \chi_E$ q.s. Assim, por hipótese, χ_E é mensurável. Portanto $E = \chi_E^{-1}(1)$ é mensurável, donde segue que μ é completa♣

6. Suponha que $f_n, f \in L^1(X,\mu)$ e $f_n \to f$ q.s. Mostre que

$$\int |f_n - f| d\mu \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \int |f_n| d\mu \to \int |f| d\mu.$$

Prova.

ATENÇÃO: Em L^1 as funções são a valores **complexos** e não vale $|z| + z \geq 0$.

($\Rightarrow$) Temos

$$\left| \int |f_n| - \int |f| \right| = \left| \int (|f_n| - |f|) \right| \leq \int \big|\, |f_n| - |f| \,\big|$$
$$\leq \int |f_n - f| d\mu \to 0.$$

($\Leftarrow$) A função $|f_n| + |f| - |f_n - f|$ é positiva e converge a $2|f|$ q.s. Por Fatou

$$\int 2|f| \leq \liminf \int \Big(|f_n| + |f| - |f_n - f| \Big) = 2 \int |f| - \limsup \int |f_n - f|.$$

Logo, o $\limsup$ é finito e sendo assim obtemos

$$\limsup \int |f_n - f| d\mu \leq 0$$

e portanto

$$\int |f_n - f| d\mu \to 0 \clubsuit$$

7. Suponha que $|f_n| \leq g \in L^1(X, \mu)$ e que $f_n \to f$ em medida. Verifique:

   (a) $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$.

   (b) $f_n \to f$ em L^1.

   Prova.

   Atenção:

   (1) L^1 é um espaço com funções a valores em $\mathbb{C}$. Não vale $|z| + z \geq 0$.

   (2) É necessário verificar que $f \in L^1$, pois isto não faz parte das hipóteses.

   (3) Como (f_n) converge a f em medida, segue que (f_n) é de Cauchy em medida. Então, por um teorema provado em sala, (f_n) admite uma subsequência (f_{n_j}) convergente a f q.s. Também temos $|f_{n_j}| \leq g \in L^1$. Pelo TCD segue
   $$f \in L^1.$$

   (a) Por um resultado para sequências [vide Lista 0], basta vermos que toda subsequência da sequência
   $$(z_n) = \left(\int f_n d\mu \right)$$
   tem subsequência convergente ao número
   $$z = \int f d\mu.$$

   Seja (f_{n_j}) uma subsequência qualquer. Então, (f_{n_j}) converge a f em medida e (f_{n_j}) é de Cauchy em medida. Pelo teorema citado, (f_{n_j}) tem uma subsequência $(f_{n_{j_k}})$ convergente a f q.s. Já que $|f_{n_{j_k}}| \leq g$, pelo TCD segue
   $$z_{n_{j_k}} = \int f_{n_{j_k}} d\mu \to \int f d\mu = z \quad \text{se } k \to \infty.$$

   Portanto,
   $$\int f_n d\mu \to \int f d\mu.$$

   (b) Segue imediatamente de (a), pois
   $$|f_n - f| \leq (g + |f|) \in L^1 \quad \text{e} \quad |f_n - f| \to 0 \text{ em medida} \clubsuit$$

8. Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida σ-finita e $f \in L^+(X)$. Seja a região

$$R(f) = \{(x, y) \in X \times [0, \infty] : \ 0 \le y \le f(x)\}.$$

Verifique as afirmações abaixo.

(a) $$R(f) \text{ é mensurável segundo } \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}.$$

(b) $$(\mu \times m)[R(f)] = \int_X f d\mu.$$

Extra.

(*) Valem afirmações (A), análoga a (a), e (B), análoga a (b), para a região

$$\underline{R}(f) = \{(x, y) \in X \times [0, \infty] : 0 \le y < f(x)\}.$$

Notemos que se $(x, y) \in \underline{R}(f)$, então $0 < f(x) \le \infty$.

(**) O gráfico de f é mensurável e tem medida nula. Onde,

$$Gr(f) = \{(x, f(x)) : x \in X\} = R(f) \setminus \underline{R}(f).$$

Interpretação. *A integral de uma função é a área da região abaixo do gráfico.*

Primeira Prova (sem simplificações iniciais e sem Fubini).

Como μ e m são σ-finitas, então $\mu \times m$ é determinada por valores em retângulos.

(a) e (A). Seja (φ_n) uma sequência crescente de funções mensuráveis simples e positivas com $\varphi_n \nearrow f$ pontualmente. Representando φ_n na **forma padrão**

$$\varphi_n = \sum_{j=1}^{J_n} a_j^n \chi_{E_j^n}$$

obtemos (para $n = 1, 2, 3, \dots$ e $j = 1, \dots, J_n$)

$$\underline{R}(f) = \bigcup_n \bigcup_j \left[E_j^n \times [0, a_j^n)\right] \qquad \Big[\text{note } [0, a_j^n) = \emptyset \text{ se } a_j^n = 0\Big]$$

uma união contável, crescente em n, de retângulos mensuráveis em $\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$. Logo, a região $\underline{R}(f)$ é mensurável. Temos também

$$R(f) = \left[\bigcap_{k \ge 1} \underline{R}\left(f + \frac{1}{k}\right)\right] \bigcup \left[f^{-1}(\infty) \times \{\infty\}\right].$$

Logo, $R(f)$ é mensurável.

(B) Fixado n temos

$$\int \varphi_n d\mu = a_1^n \mu(E_1^n) + \dots + a_{N_n}^n \mu(E_{N_n}^n) \ \text{ e}$$

$$(\mu \times m)\left(E_j^n \times [0, a_j^n)\right) = a_j^n \mu(E_j^n).$$

Donde segue

$$\int \varphi_n d\mu = (\mu \times m)\left[\bigcup_{j=1}^{N_n}\Big(E_j^n \times [0, a_j^n)\Big)\right] \text{ (união disjunta).}$$

Obtemos

$$(\mu\times m)[\underline{R}(f)] = \lim_{n\to\infty}(\mu\times m)\left[\bigcup_j \Big(E_j^n \times [0, a_j^n)\Big)\right] = \lim_{n\to\infty}\int \varphi_n d\mu = \int f d\mu.$$

(b) É claro que

$$R(f) = \underline{R}(f) \cup Gr(f) \qquad \text{[união disjunta].}$$

Isto mostra que o gráfico de f é mensurável.

Logo, por (B), para provar (b) basta mostrar que $Gr(f)$ tem medida nula.

(**) **O gráfico $Gr(f)$ tem medida nula.**

Já vimos que o gráfico de f é mensurável.

Como X é σ-finito, para mostrar o desejado podemos supor $\mu(X) < \infty$.

O retângulo $\{(x, f(x)) \in Gr(f) : f(x) = 0\} = f^{-1}(0) \times \{0\}$ é mensurável e tem medida nula, pois $X \times \{0\}$ é nulo (medida nula).

O retângulo $\{(x, f(x)) \in Gr(f) : f(x) = \infty\} = f^{-1}(\infty)\times\{\infty\}$ é mensurável e nulo, pois $f^{-1}(\infty)$ e $\{\infty\}$ são mensuráveis e $\{\infty\}$ tem medida nula.

Logo, para provar o desejado podemos supor $0 < f < \infty$.

Seja $\epsilon > 0$. Consideremos $k = 1, 2, 3\ldots$. Definindo

$$X_k = \{x : k\epsilon \leq f(x) < (k+1)\epsilon\},$$

segue $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots$ com união disjunta.

Temos

$$Gr(f) \subset \bigcup Gr\left(f|_{X_k}\right).$$

Logo,

$$(\mu \times m)\Big[Gr(f)\Big] \leq \sum \mu(X_k)\epsilon = \epsilon\mu(X).$$

Donde segue que o gráfico de f tem medida nula♣

Vide segunda prova a seguir.

Segunda Prova (com simplificações iniciais e sem Fubini).

◇ **Preparação.**

(1) - Como μ e m são σ-finitas, $\mu\times m$ é determinada por valores em retângulos.

(2) - O conjunto $f^{-1}(\infty)\times[0,\infty]$ é $\mathcal{M}\times\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ mensurável e

$$(\mu\times m)\left(f^{-1}(\infty)\times[0,\infty]\right)=\mu\left(f^{-1}(\infty)\right)\cdot\infty=\int_{f^{-1}(\infty)}\infty d\mu.$$

Analogamente quanto ao conjunto $f^{-1}(\infty)\times[0,\infty)$.

Assim, para provar (a), (b), (A) e (B) podemos supor $f<\infty$.

(3) - O retângulo $f^{-1}(0)\times\{0\}$ é mensurável e

$$(\mu\times m)\left(f^{-1}(0)\times\{0\}\right)=\mu\left(f^{-1}(0)\right)\cdot 0=0=\int_{f^{-1}(0)}0d\mu.$$

Assim, para provar (a), (b), (A) e (B) podemos supor $f>0$.

(4) - O retângulo $\{(x,f(x))\in Gr(f):f(x)=\infty\}=f^{-1}(\infty)\times\{\infty\}$ é mensurável e de medida nula pois $f^{-1}(\infty)$ e $\{\infty\}\in\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$ são mensuráveis e o conjunto $\{\infty\}$ tem medida zero. Já verificamos em (3) que o retângulo $\{(x,f(x))\in Gr(f):f(x)=0\}=f^{-1}(0)\times\{0\}$ tem medida nula.

Para computar a medida (se existir) do gráfico podemos supor $0<f<\infty$.

I - A área da região $\underline{R}(f)$.

(A) Seja (φ_n) uma sequência crescente de funções mensuráveis simples e positivas tais que $\varphi_n\nearrow f$ pontualmente. Representando φ_n na **forma padrão**

$$\varphi_n=a_1^n\chi_{E_1^n}+\cdots+a_{J_n}^n\chi_{E_{J_n}^n}$$

obtemos (para $n=1,2,3,\ldots$ e $j=1,\ldots,J_n$)

$$\underline{R}(f)=\bigcup_n\bigcup_j\Big(E_j^n\times[0,a_j^n)\Big),$$

uma união contável, crescente em n, de retângulos mensuráveis em $\mathcal{M}\otimes\mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}}$.

(B) Fixado n temos

$$\int\varphi_n d\mu=a_1^n\mu(E_1^n)+\cdots+a_{J_n}^n\mu(E_{J_n}^n)\ \text{ e}$$

$$(\mu\times m)\Big(E_j^n\times[0,a_j^n)\Big)=a_j^n\mu(E_j^n).$$

Donde segue

$$\int\varphi_n d\mu=(\mu\times m)\left[\bigcup_{j=1}^{N_n}\Big(E_j^n\times[0,a_j^n)\Big)\right]\ \text{(a união é disjunta)}.$$

Donde segue

$$(\mu\times m)[R(f)]=\lim_{n\to\infty}(\mu\times m)\left[\bigcup_j\Big(E_j^n\times[0,a_j^n)\Big)\right]=\lim_{n\to\infty}\int\varphi_n d\mu=\int fd\mu.$$

II - Área da região $R(f)$.

(a) Sejam $D(x,y) = f(x) - y$, $F(x,y) = (f(x), y)$ e $T(z,y) = z - y$. Segue

$$D(x,y) = (T \circ F)(x,y).$$

Como F é mensurável em cada coordenada, então F é mensurável. Como T é contínua, segue que $D = T \circ F$ é mensurável. Logo,

$$R(f) = D^{-1}([0,\infty)) = \{(x,y) \in X \times [0,\infty] : f(x) - y \geq 0\}$$

é mensurável.

(b) É claro que

$$R(f) = \underline{R}(f) \cup Gr(f) \qquad \text{[união disjunta]}.$$

Isto mostra que o gráfico de f é mensurável.
Pelos casos (A) e (a) segue trivialmente que $Gr(f)$ é mensurável.
Ainda mais, para provar (b) basta mostrar que $Gr(f)$ tem medida nula.

(**) **O gráfico $Gr(f)$ tem medida nula.**
Como X é σ-finito, para mostrar o desejado podemos supor $\mu(X) < \infty$.
Seja $\epsilon > 0$. Seja $k \in \mathbb{N}$, com $k = 1, 2, 3 \ldots$. Definindo

$$X_k = \{x : k\epsilon \leq f(x) < (k+1)\epsilon\}, \ \text{ segue } \ X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \ \text{[união disjunta]}.$$

Temos

$$Gr(f) \subset \bigcup Gr\left(f|_{X_k}\right).$$

Logo,

$$(\mu \times m)\Big[Gr(f)\Big] \leq \sum \mu(X_k)\epsilon = \epsilon\mu(X).$$

Donde segue que o gráfico de f tem medida nula♣

A seguir, apresentamos uma terceira prova, agora com o *Teorema de Fubini*.

VIDE VERSO.

Terceira prova (com Teorema de Fubini e baseada na segunda prova).

Assumamos a **Preparação** à segunda prova.

II - A área da região $R(f)$.

(a) Copiemos II-(a), vide segunda prova.
Sejam $D(x, y) = f(x) - y$, $F(x, y) = (f(x), y)$ e $T(z, y) = z - y$. Segue

$$D(x, y) = (T \circ F)(x, y).$$

Como F é mensurável em cada coordenada, então F é mensurável. Como T é contínua, segue que $D = T \circ F$ é mensurável. Logo,

$$D^{-1}([0, \infty)) = \{(x, y) \in X \times [0, \infty] : f(x) - y \geq 0\} = R(f)$$

é mensurável.

(b) Pelo *Teorema de Fubini* encontramos

$$(\mu \times m)[R(f)] = \int_{X \times [0,\infty)} \chi_{R(f)} d(\mu \times m) = \int_X \int \chi_{[0,f(x)]} dm \, d\mu = \int_X f(x) d\mu.$$

III- O gráfico $Gr(f)$ **tem medida nula.**

(**) Pelos casos I e II [vide segunda prova] segue que $Gr(f)$ é mensurável.
Pelo *Teorema de Fubini* encontramos

$$(\mu \times m)[Gr(f)] = \int_{X \times [0,\infty)} \chi_{Gr(f)} d(\mu \times m) = \int_X \int \chi_{\{f(x)\}]} dm \, d\mu = \int_X 0 d\mu = 0 \clubsuit$$

9. (a) Compute o limite abaixo e justifique os cômputos.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}\,dx.$$

(b) Seja $E = [0,1]\times[0,1]$. Investigue a existência e a igualdade das integrais

$$\int_E f dm^2,\ \int_0^1\int_0^1 f(x,y)dxdy \text{ e } \int_0^1\int_0^1 f(x,y)dydx,$$

para a função

$$f(x,y) = \frac{1}{(1-xy)^a},\ \text{ onde } a>0.$$

Atenção: É necessário identificar o uso das integrais de Lebesgue e de Riemann.

10. Considere a função
$$f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$
Verifique as afirmações abaixo.

(a)
$$\int_0^\infty |f(x)|dx = \infty.$$

(b)
$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)dx = \frac{\pi}{2}.$$

Atenção: É necessário identificar o uso das integrais de Lebesgue e de Riemann.

Solução. As integrais acima são ambas de Lebesgue.

(a) (Dada por Thiago Costa Raszeja).
Devido ao primeiro limite fundamental, a função $f = f(x)$ e a função positiva $|f| = |f(x)|$, onde x percorre $[0, \infty)$, são contínuas e então mensuráveis. Então temos (utilizando integrais de Lebesgue)

$$\int_0^\infty |f(x)|dx \geq \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \int |f|\chi_{\left[n\pi+\frac{\pi}{6}, n\pi+\frac{5\pi}{6}\right]}dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int |f|\chi_{\left[n\pi+\frac{\pi}{6}, n\pi+\frac{5\pi}{6}\right]}dx.$$

Toda função contínua em um intervalo compacto é Riemann-integrável. Ainda, toda função contínua em um intervalo compacto é Lebesgue-integrável e sua integral de Lebesgue coincide com sua integral de Riemann.

Portanto, segue (abaixo, a integral à direita é de Riemann)

$$\int |f|\chi_{\left[n\pi+\frac{\pi}{6}, n\pi+\frac{5\pi}{6}\right]}dx = \int_{n\pi+\frac{\pi}{6}}^{n\pi+\frac{5\pi}{6}} |f(x)|dx < \infty.$$

Destaquemos as desigualdades

$$\begin{cases} |\sin x| & \geq \frac{1}{2} \\ \text{e} & \\ \frac{1}{x} & \geq \frac{1}{n\pi+\frac{5\pi}{6}}, \end{cases} \qquad \text{se } x \in \left[n\pi + \frac{\pi}{6}, n\pi + \frac{5\pi}{6}\right].$$

Logo,
$$\int_{n\pi+\frac{\pi}{6}}^{n\pi+\frac{5\pi}{6}} |f(x)|dx \geq \int_{n\pi+\frac{\pi}{6}}^{n\pi+\frac{5\pi}{6}} \frac{dx}{2\left(n\pi+\frac{5\pi}{6}\right)} = \frac{1}{3\left(n+\frac{5}{6}\right)}.$$

Donde segue

$$\int_{[0,\infty)} |f(x)|dx \geq \sum \frac{1}{3\left(n+\frac{5}{6}\right)} = \infty, \qquad \text{pois } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \infty.$$

(b) Por (a), a função $|f(x)|$ não é Lebesgue integrável em $[0,\infty)$. Logo, f não é Lebesgue integrável em $[0,\infty)$. O item (b) pede então para mostrar que existe a **integral de Riemann imprópria** de f e que temos

$$\int_0^\infty f(x)dx = \frac{\pi}{2} \qquad \left[\text{por definição, } \int_0^\infty f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b f(x)dx\right].$$

===

Primeira solução (via integrais próprias e impróprias de Riemann e a regra de Leibnitz para a derivação sob o sinal de integração). A função $x \mapsto 1/x^2$, onde $x \in [1,\infty)$, é integrável impropriamente.
A função contínua $(\cos x)/x^2$, onde $x \in [1,\infty)$, satisfaz

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

e é portanto integrável impropriamente.

Seja $r > 1$. Por integração por partes para integrais de Riemann temos

$$\int_1^r \frac{\sin x}{x}dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^r - \int_1^r \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Donde segue (abaixo, a integral à direita é imprópria)

$$\lim_{r\to+\infty}\left[\int_1^r \frac{\sin x}{x}dx\right] = \cos 1 - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx.$$

Isto mostra que existe (é finita) a integral imprópria

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx < \infty.$$

É trivial ver que (abaixo, a integral é imprópria)

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \leq 1 \quad \text{e} \quad \int_0^\infty e^{-\alpha x}dx < \infty, \text{ se } \alpha > 0.$$

◇ **Famílias de integrais no parâmetro α.** Por acima estão bem definidas as funções (dadas por integrais impróprias)

$$F(\alpha) = \int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx \text{ se } \alpha \geq 0, \quad \text{e} \quad G(\alpha) = -\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx \text{ se } \alpha > 0.$$

Para todo $\alpha \geq 0$ temos (por definição de integral imprópria e pela regra de Leibnitz para derivação sob o sinal de integral própria de Riemann),

$$F_n(\alpha) = \int_0^n e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx \longrightarrow F(\alpha) \text{ se } n \to \infty, \quad \text{e} \quad F_n'(\alpha) = -\int_0^n e^{-\alpha x}\sin x\,dx.$$

◇ **A integral representando $F'(\alpha)$ para $\alpha > 0$.** Seja $\beta > 0$ arbitrário. Seja $\epsilon > 0$. Para todo $\alpha \geq \beta$ e $x \geq 0$ temos

$$|F_n'(\alpha) - G(\alpha)| = \left|\int_n^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx\right| \leq \int_n^\infty e^{-\beta x}dx < \epsilon, \text{ se } n \approx \infty.$$

Logo, F_n' converge uniformemente a G nos intervalos compactos de $(0,\infty)$. Já vimos que $F_n(\alpha) \to F(\alpha)$ para cada $\alpha \in (0,\infty)$. Logo, por um resultado de Cálculo Básico segue que F é derivável no semi-eixo aberto e positivo e

$$F'(\alpha) = G(\alpha) = -\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx \quad \text{para todo} \quad \alpha > 0.$$

◇ **Computando a integral para $F'(\alpha)$, onde** $\alpha > 0$. Neste caso, as funções $e^{-\alpha x}\sin x$ e $e^{-\alpha x}\cos x$ são integráveis impropriamente em $[0,\infty)$. Ainda,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx &= e^{-\alpha x}(-\cos x)\Big|_0^\infty - \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha x}\cos x\,dx\\ &= 1-\alpha\left[e^{-\alpha x}\sin x\Big|_0^\infty + \alpha\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx\right]\\ &= 1-\alpha^2\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx.\end{aligned}$$

Donde segue

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin x\,dx = \frac{1}{1+\alpha^2}.$$

É então imediato que

$$F'(\alpha) = -\frac{1}{1+\alpha^2}, \quad \text{se } \alpha > 0.$$

◇ **Computemos $F(\alpha)$, para** $\alpha > 0$. Existe uma constante real C tal que

$$F(\alpha) = -\arctan(\alpha) + C, \text{ para todo } \alpha \in (0,+\infty).$$

É trivial ver que (cheque)

$$\lim_{\alpha\to+\infty} F(\alpha) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\alpha\to+\infty} \arctan(\alpha) = \frac{\pi}{2}.$$

Segue então

$$\boxed{F(\alpha) = -\arctan(\alpha) + \tfrac{\pi}{2}, \quad \text{para todo } \alpha \in (0,\infty).}$$

◇ **A continuidade de F em $\alpha = 0$.** Seja $\alpha \geq 0$ arbitrário. Seja $\epsilon > 0$. Pelo critério de Cauchy para integrais impróprias, existe $N > 0$ tal que se $\rho \geq r \geq N$ então

$$\left|\int_r^\rho \frac{\sin x}{x}dx\right| \leq \epsilon.$$

Fixemos r, com $r \geq N$. Definamos

$$S(\rho) = \int_r^\rho \frac{\sin x}{x}dx, \quad \text{onde } \rho \in [r,\infty).$$

Segue

$$\int_r^\rho e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx = \int_r^\rho e^{-\alpha x}S'(x)\,dx = e^{-\alpha x}S(x)\Big|_r^\rho + \int_r^\rho \left[\alpha e^{-\alpha x}\right]S(x)\,dx.$$

Temos $S(r) = 0$ e $|S(x)| \leq \epsilon$ para todo $x \geq r$. Ainda, $\alpha e^{-\alpha x} \geq 0$. Logo,

$$\left|\int_r^\rho e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leq \epsilon e^{-\alpha\rho} + \epsilon\left[-e^{-\alpha x}\Big|_r^\rho\right] = \frac{\epsilon}{e^{\alpha r}}, \quad \text{para todo } \alpha \geq 0.$$

Notemos que $e^{\alpha r} \geq 1$. Impondo $\rho \to +\infty$, encontramos

$$(\mathbf{10.1}) \qquad \left|\int_r^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leq \epsilon, \quad \text{para quaisquer } \alpha \in [0,\infty) \text{ e } r \geq N.$$

Vejamos próximo à origem. Sabidamente, para todos $\alpha \geq 0$ e $x \geq 0$ temos

$$\left|\frac{\sin\, x}{x}\right| \leq 1 \quad \text{e} \quad e^{-\alpha x} \leq 1.$$

A função $-e^{-\alpha x}$ é crescente, qualquer que seja $\alpha \geq 0$. Segue

$$\left|\int_0^N e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx - \int_0^N \frac{\sin x}{x}dx\right| \leq \int_0^N (1-e^{-\alpha x})dx \leq (1-e^{-\alpha N})N.$$

Portanto, por continuidade existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$(\mathbf{10.2}) \qquad \left|\int_0^N e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx - \int_0^N \frac{\sin x}{x}dx\right| \leq \epsilon \text{ para todo } \alpha \in [0,\alpha_0].$$

Concluímos então que para todo $\alpha \in [0,\alpha_0]$ temos

$$|F(\alpha) - F(0)| = \left|\int_0^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx\right| =$$

$$\left|\ \left[\int_0^N e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx - \int_0^N \frac{\sin x}{x}dx\right] + \left[\int_N^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx - \int_N^\infty \frac{\sin x}{x}dx\right]\ \right| \leq$$

$$\left|\int_0^N e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx - \int_0^N \frac{\sin x}{x}dx\right| + \left|\int_N^\infty e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx\right| + \left|\int_N^\infty \frac{\sin x}{x}dx\right|.$$

Pelas equações (10.2) e (10.1) segue

$$|F(\alpha) - F(0)| \leq \epsilon + \epsilon + \epsilon, \quad \text{para todo } \alpha \in [0,\alpha_0].$$

Isto é,

$$\lim_{\alpha \to 0} F(\alpha) = F(0).$$

◇ Conclusão. Pelos passos acima, temos

$$F(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx \quad \text{e} \quad F(0) = -\arctan(0) + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Fim da primeira solução (baseada em integrais de Riemann e a regra de Leibnitz para a derivação sob o sinal de integração).

Vide também

`http://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-DERIVAR-SOB-INTEGRAL.pdf`.

==

Vide Próxima Página.

==

Segunda solução (via integrais próprias e impróprias de Riemann e o teorema de Fubini para integrais de Riemann de funções contínuas). Baseada na solução apresentada por André Porto.

A função $(x,y) \mapsto e^{-xy}\sin x$ é contínua no plano e Riemann integrável em retângulos compactos. Dado $b>0$, pelo teorema de Fubini para integrais duplas (de Riemann) segue

$$\int_0^b \int_0^b e^{-xy}\sin x\, dx\, dy = \int_0^b \int_0^b e^{-xy}\sin x\, dy\, dx. \tag{1}$$

O integrando no lado esquerdo da equação acima é dado por

$$\int_0^b e^{-xy}\sin x\, dx = -e^{-xy}\mathrm{cos}x\Big|_0^b - \int_0^b ye^{-xy}\mathrm{cos}x\, dx$$

$$= (1-e^{-by}\mathrm{cos}b) - ye^{-xy}\sin x\Big|_0^b - \int_0^b y^2e^{-xy}\sin x\, dx.$$

Isto é,

$$\int_0^b e^{-xy}\sin x\, dx = \frac{1-e^{-by}\mathrm{cos}b - ye^{-by}\sin b}{1+y^2}.$$

O integrando no lado direito da equação (1) é dado por

$$\int_0^b e^{-xy}\sin x\, dy = -\frac{e^{-xy}}{x}\sin x\Big|_{y=0}^{y=b} = (1-e^{-bx})\frac{\sin x}{x}.$$

Pelo primeiro limite fundamental sabemos que $x \mapsto (\sin x)/x$ é contínua. Substituindo estas fórmulas para tais integrandos na equação (1) segue

$$\int_0^b (1-e^{-bx})\frac{\sin x}{x}dx = \int_0^b \left[\frac{1}{1+y^2} - \frac{e^{-by}\mathrm{cos}b + ye^{-by}\sin b}{1+y^2}\right] dy.$$

Logo,

$$\int_0^b \frac{\sin x}{x}dx - \int_0^b \frac{\sin x}{x}e^{-bx}dx = \int_0^b \frac{dy}{1+y^2} - \int_0^b \frac{\cos b + y\sin b}{1+y^2}e^{-by}dy.$$

Tal identidade apresenta quatro parcelas. Computemos o limite das três últimas parcelas acima para $b\to+\infty$.

◇ A segunda parcela satisfaz (cheque)

$$\left|\int_0^b \frac{\sin x}{x}e^{-bx}dx\right| \leq \int_0^b e^{-bx}dx = -\frac{e^{-bx}}{b}\Big|_{x=0}^{x=b} = \frac{1-e^{-b^2}}{b} \longrightarrow 0 \,\text{se}\, b\to+\infty.$$

◇ A terceira é trivial, pois

$$\int_0^b \frac{dy}{1+y^2} = \arctan(y)\Big|_0^b = \arctan(b) \longrightarrow \frac{\pi}{2} \text{ se } b\to+\infty.$$

$\diamond$ A quarta parcela. Analisando os casos $0 \leq y \leq 1$ e $y \geq 1$, segue

$$1 + y \leq 2(1 + y^2), \text{ para todo } y \geq 0.$$

Retornando à quarta parcela temos (ver cômputo para segunda parcela)

$$\left| \int_0^b \frac{\cos b + y \sin b}{1 + y^2} e^{-by} dy \right| \leq \int_0^b \frac{1 + y}{1 + y^2} e^{-by} dy \leq 2 \int_0^b e^{-bx} dx \longrightarrow 0,$$

se $b \to +\infty$.

Concluímos então que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \clubsuit$$

Fim da seguda solução (via integrais próprias e impróprias de Riemann e o teorema de Fubini para integrais de Riemann de funções contínuas). Baseada na solução apresentada por André Porto.

Vide Próxima Página.

==

==

Terceira solução (via integração de Lebesgue) - apresentada em Apostol - Análisis Matemático.

Seja $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ arbitrária. Se g é Lebesgue integrável e Riemann-imprópria integrável então as corrrespondentes integrais coincidem.

Seja $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ contínua. Se g é Lebesgue integrável, então g é Riemann-imprópria integrável e as correspondentes integrais coincidem.

A função contínua $x \mapsto 1/x^2$, onde $x \in [1,\infty)$, é Lebesgue integrável.
A função $(\cos x)/x^2$, onde $x \in [1,\infty)$, é contínua, satisfaz a desigualdade

$$\frac{|\cos x|}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

e é então Lebesgue integrável [pois $1/x^2$ é Lebesgue integrável em $[1,\infty)$].

◇ **Famílias de integrais de Lebesgue no parâmetro α.** Seja

$$F_n(\alpha) = \int_0^n e^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}dx, \quad \text{onde} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Utilizando regra de Leibnitz para integrais próprias de Riemann e então integração por partes duas vezes encontramos

$$F_n'(\alpha) = -\int_0^n e^{-\alpha x}\sin x\,dx = -\frac{e^{-n\alpha}(-\alpha\sin n - \cos n) + 1}{1+\alpha^2}.$$

Impondo $n \to \infty$, encontramos

$$F_n'(\alpha) \longrightarrow -\frac{1}{1+\alpha^2}, \text{ para todo } \alpha.$$

Temos também

$$|F_n'(\alpha)| \leq \Phi(y) = \frac{e^{-\alpha}(\alpha+1)+1}{1+\alpha^2} \quad \text{para todo } \alpha \geq 0.$$

Segue que

$$G_n(\alpha) = F_n'(\alpha)\chi_{[0,n]}(\alpha) \text{ satisfaz } |G_n| \leq \Phi \in L^1([0,\infty)).$$

O teorema da convergência dominada de Lebesgue nos garante que

$$\int_0^n F_n'(\alpha)d\alpha = \int_0^\infty F_n'(\alpha)\chi_{[0,n)}(\alpha)d\alpha \longrightarrow -\int_0^\infty \frac{d\alpha}{1+\alpha^2} = -\frac{\pi}{2}.$$

◇ **Analisemos a integral**

$$\int_0^n F_n'(\alpha)d\alpha = F_n(n) - F_n(0).$$

Temos

$$|F_n(n)| = \left|\int_0^n e^{-xn}\frac{\sin x}{x}dx\right| \leq \int_0^n e^{-xn}dx = -\frac{e^{-xn}}{n}\Big|_0^n \leq \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Logo,

$$\boxed{F_n(0) \longrightarrow \tfrac{\pi}{2}.}$$

Dado $b > 0$, consideremos $n = [|b|]$, o maior inteiro inferior a b. Temos

$$\int_0^b \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^n \frac{\sin x}{x} dx + \int_n^b \frac{\sin x}{x} dx = F_n(0) + \int_n^b \frac{\sin x}{x} dx.$$

Impondo $b \to \infty$, é trivial ver que

$$\left| \int_n^b \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \int_{b-1}^b \frac{dx}{n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

Segue então

$$\lim_{b \to 0} \int_0^b \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{n \to \infty} F_n(0) = \frac{\pi}{2} \clubsuit$$

Fim da terceira solução (via integração de Lebesgue) - apresentada em Apostol - Análisis Matemático.

===

E1. (0,5) Seja $(p_j)_J$ uma família em $[0, +\infty]$ e J uma reunião de conjuntos J_k, com k em $\mathcal{K}$, dois a dois disjuntos. Então,

$$\sum_J p_j = \sum_{k \in \mathcal{K}} \sum_{j \in J_k} p_j.$$

E2. (0,5) Sejam $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente e contínua à direita e μ_F a medida de Lebesgue-Stieltjes induzida por F. Mostre que F é contínua se e somente se temos

$$\mu_F(\{x\}) = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$