MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT 5798 - IME 2016

Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

LISTA 9 DE EXERCÍCIOS

Resolva, no mínimo, os onze exercícios marcados com asterisco.

E1* Geométricamente, $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ é **convexa** se restrita a todo $[x_1, x_2]$, seu gráfico está abaixo do segmento (corda) unindo $\big(x_1, \varphi(x_1)\big)$ a $\big(x_2, \varphi(x_2)\big)$. Para simplificar, fixamos um arbitrário $[x_1, x_2] \subset (a,b)$.

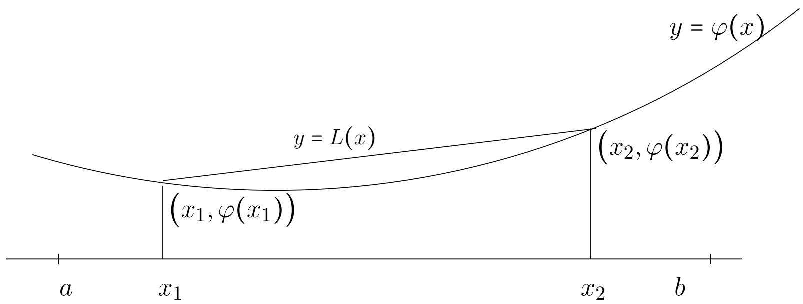

Figura 1: Gráfico de $y = \varphi(x)$ convexa e do segmento linear $y = L(x)$ (corda).

(a) São equivalentes as seguintes definições de convexidade para φ:

(i) $\varphi(x) \leq T(x) = \dfrac{\varphi(x_2) - \varphi(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + \varphi(x_1)$, para todo $x \in [x_1, x_2]$.

(ii) $\varphi\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leq \lambda\varphi(x_1) + (1-\lambda)\varphi(x_2)$ para todo $\lambda \in [0,1]$.

(iii) $\dfrac{\varphi(t) - \varphi(x_1)}{t - x_1} \leq \dfrac{\varphi(x_2) - \varphi(t)}{x_2 - t}$ para todo $x_1 < t < x_2$.

(iv) $\varphi\left(\dfrac{x_1}{p_1} + \dfrac{x_2}{p_2}\right) \leq \dfrac{\varphi(x_1)}{p_1} + \dfrac{\varphi(x_2)}{p_2}$ para todos $p_1, p_2 > 1$ com $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} = 1$.

Sugestão: (ii) (a definição usual) é trivialmente equivalente às demais.

(b) φ é convexa em (a,b) se e somente se

$$\frac{\varphi(s) - \varphi(x_1)}{s - x_1} \leq \frac{\varphi(x_2) - \varphi(t)}{x_2 - t}, \quad \text{se } s, t \in [x_1, x_2] \text{ com } s \neq x_1 \text{ e } t \neq x_2.$$

Leitura: a corda sobre $[t, x_2]$ têm maior inclinação que a sobre $[x_1, s]$.

(c) **Desigualdade (discreta) de Jensen.** Seja φ convexa em (a,b) e as sequências $\{x_j\}_1^n \subset (a,b)$ e $\{p_j\}_1^n$, com $p_j \geq 0$ e $\Sigma p_j > 0$. Temos,

$$\varphi\left(\frac{\Sigma p_j x_j}{\Sigma p_j}\right) \leq \frac{\Sigma p_j \varphi(x_j)}{\Sigma p_j}.$$

(d) Se φ é diferenciável então φ é convexa se e somente se φ' é crescente.
Dica: (a)(iii).

(e) Mostre que φ é convexa em (a,b) se e somente se, φ é contínua e

$$\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{\varphi(x_1)+\varphi(x_2)}{2},$$

quaisquer que sejam $x_1, x_2 \in (a,b)$.

(f) Seja $\Gamma = \{\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}, \text{ tal que } \varphi \text{ é convexa}\}$. Então, Γ é um **cone** (algebricamente fechado para soma e multiplicação por escalar positivo) fechado na topologia da convergência simples. O supremo, se finito, de uma família de funções convexas em (a,b) é uma função convexa. O mínimo de duas funções convexas não é necessariamente convexa.

(g) Seja φ duas vezes diferenciável. Então φ é convexa se e só se $\varphi'' \ge 0$.

(h) Verifique se são ou não são convexas as seguintes funções:

(i) x^p, onde $p \ge 1$ e $x \in (0, +\infty)$

(ii) e^{ax}, onde $x \in (-\infty, +\infty)$

(iii) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$, onde $x \in (0, +\infty)$.

(i) Sejam $a, b \ge 0$ e $p, p' > 1$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, então

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}.$$

Mostre que vale a igualdade se e somente se $a^p = b^{p'}$.

(j) Se φ é convexa em (a,b) e ψ é convexa e não decrescente em $\varphi\big((a,b)\big)$,

$$\psi \circ \varphi \quad \text{é convexa em } (a,b).$$

(k) Se $\varphi > 0$ e $\log \varphi$ é convexa então φ é convexa.

(l) Se φ é convexa em (a,b),

$$\varphi \quad \text{é de Lipschitz em subintervalos compactos.}$$

Sugestão: Procure um argumento unificado para (d) e a "ida" de (e). Uma função $F : X \to Y$ entre dois espaços métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) é de **Lipschitz** se existe um $M > 0$ (a constante de Lipschitz) tal que

$$d_Y\big(F(x_1), F(x_2)\big) \le M d_X(x_1, x_2), \text{ quaisquer que sejam } x_1, x_2 \in X.$$

E2* **Desigualdade Integral (simples) de Jensen.** Consideremos duas funções $f, p : K \to (a,b)$, com $K \subset \mathbb{R}$ e compacto e $(a,b) \subset \mathbb{R}$, com p e fp Riemann integráveis, $p \geq 0$ e

$$\int_K p dx > 0.$$

Se φ é convexa em (a,b) então,

$$\varphi\left(\frac{\int_K fpdx}{\int_K pdx}\right) \leq \frac{\int_K \varphi(f)pdx}{\int_K pdx}.$$

Dica: Fixo $t_0 \in (a,b)$, existe $\alpha \in \mathbb{R}$, com $\varphi(t) - \varphi(t_0) \geq \alpha(t - t_0)$, $\forall t$. Faça

$$t_0 = \frac{\int_K fpdx}{\int_K pdx} \quad \text{e} \quad t = f(x)$$

e multiplique por p. Observe que $y(t) = \varphi(t_0) + \alpha(t - t_0)$ é uma reta suporte de gráfico(φ) [o gráfico de φ] no ponto $(t_0, \varphi(t_0))$.

Interpretação físíca-geométrica: Como $\lambda x_1 + (1-\lambda)\, x_2$ é o centróide das massas λ e $(1 - \lambda)$ localizadas em x_1 e x_2, a função φ é convexa se seu valor no centróide é menor, ou igual, que a média ponderada dos valores $\varphi(x_1)$ e $\varphi(x_2)$. A desigualdade integral de Jensen generaliza este fato: *se μ é a distribuição de massa*

$$\mu(E) = \int_E fp,$$

então

$$\frac{\int_K fp}{\int_K p} \text{ é o centróide desta massa e}$$

$$\frac{\int_K \varphi(f)pdx}{\int_K pdx} = \int \varphi(x) d\mu \text{ é a média ponderada de } \varphi.$$

E3* *Seja $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ convexa. Mostre que suas derivadas laterais são finitas em todo ponto e, ainda,*

(a) $D^+\varphi(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} \leq D^-\varphi(x) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{\varphi(x) - \varphi(x-h)}{h}$, $\forall x$.

(b) $D^+\varphi$ e $D^-\varphi$ são monótonas crescentes.

(c) $D^+\varphi(x) \leq D^-\varphi(y)$, se $a < x < y < b$.

(d) $D^+\varphi$ e $D^-\varphi$ são contínuas q.s. e, nos pontos de continuidade,

$$D^+\varphi = D^-\varphi = \varphi'.$$

(e) φ é de Lipschitz em subintervalos compactos.

SEÇÃO 3.5, p. 107-109

27* *Sejam F e G funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$. Sejam $-\infty < a < b < +\infty$.*

(a) *Se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é crescente e limitada, então $F \in BV$. Ainda,*

$$T_F(x) = F(x) - F(-\infty).$$

(b) *BV é um espaço vetorial complexo.*

(c) *Se $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é diferenciável e F' é limitada, então $F \in BV([a,b])$.*

(d) *Se $F(x) = \sin x$, então $F \in BV([a,b])$ e $F \notin BV$.*

(e) *A função*

$$F(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

é contínua mas não pertence a $BV([0,b])$ ou a $BV([a,0])$, se $a < 0 < b$.

28* *Sejam $F \in NBV$ e $G(x) = |\mu_F|\big((-\infty, x]\big)$. Prove que $|\mu_F| = \mu_{T_F}$, verificando a identidade $G = T_F$. Como sugestão, use o seguinte roteiro:*

(a) *$T_F \leq G$.*

(b) *$|\mu_F(E)| \leq \mu_{T_F}(E)$ se E é um intervalo e, portanto, se E é boreliano.*

(c) *$|\mu_F| \leq \mu_{T_F}$, portanto $G \leq T_F$.*

29. *Se $F \in NBV$ assume valores reais, então*

$$\mu_F^+ = \mu_P \quad \text{e} \quad \mu_F^- = \mu_N,$$

onde P e N são as variações positiva e negativa de F.

30. *Construa uma função crescente $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e descontínua somente em $\mathbb{Q}$.*

31. *Sejam*

$$F(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{e} \quad G(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad \text{para} \quad x \neq 0 \text{ e } F(0) = 0 = G(0).$$

Mostre que

(a) *F e G são diferenciáveis em $\mathbb{R}$.*

(b) *$F \in BV([-1,1])$, mas $G \notin BV([-1,1])$.*

32. *Se* $F_1, F_2, \ldots, F \in NBV$ *e* $F_n \to F$ *pontualmente, então* $T_F \leq \liminf T_{F_n}$.

*33** *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é crescente, então*

$$f(b) - f(a) \geq \int_a^b f'(t)dt.$$

*34** *Sejam* $F, G \in NBV$ *e* $-\infty < a < b < \infty$.

(a) *Adaptando a prova da Fórmula de Integração por Partes, mostre que*

$$\int_{[a,b]} \frac{F(x) + F(x+)}{2} dG(x) + \int_{[a,b]} \frac{G(x) + G(x+)}{2} dF(x) =$$
$$= F(b)G(b) - F(a-)G(a-).$$

(b) *Se não houver pontos em* $[a, b]$ *em que* F *e* G *são ambas decontínuas, mostre que*

$$\int_{[a,b]} F dG + \int_{[a,b]} G dF = F(b)G(b) - F(a-)G(a-).$$

*35** *Se* F *e* G *são absolutamente contínuas em* $[a, b]$, *então* FG *também o é e:*

$$\int_a^b (FG' + F'G)(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

*36** *Seja* $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua crescente,* $G(a) = c$ *e* $G(b) = d$.

(a) *Se* $E \subset [c, d]$ *é um boreliano, então*

$$m(E) = \mu_G\big((G^{-1}(E)\big).$$

Dica: *considere primeiro o caso em que* E *é um intervalo.*

(b) *Se* f *é Borel-mensurável e integrável em* $[c, d]$, *então*

$$\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f\big(G(x)\big)dG(x).$$

Em particular,

$$\int_c^d f(y)dy = \int_a^b f\big(G(x)\big)G'(x)dx$$

se G *for absolutamente contínua.*

(c) *O item (b) não vale, em geral, se* G *for apenas contínua pela direita.*

37. *Seja* $F : [a,b] \to \mathbb{C}$*. São equivalentes:*

(a) F *é Lipschitziana com constante de Lipschitz* M.

(b) F *é absolutamente contínua e* $|F'| \le M$ *q.s.*

*38** *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*. Considere o gráfico de* f *como um subconjunto de* $\mathbb{C}$*. Isto é, identifique* $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$*. O comprimento* L *de tal gráfico é, por definição, o supremo dos comprimentos de todas as poligonais inscritas no mesmo.*

(a) *Seja* $F(t) = t + if(t)$*. Então* L *é a variação total de* F *em* $[a,b]$.

(b) *Se* f *for absolutamente contínua, então*

$$L = \int_a^b [1 + f'(t)^2]^{1/2} dt.$$

*42** *Uma função* $F : (a,b) \to \mathbb{R}$*, com* $-\infty \le a < b \le \infty$*, é dita* convexa *se, quaisquer que sejam* $s,t \in (a,b)$ *temos*

$$F(\lambda s + (1-\lambda)t) \le \lambda F(s) + (1-\lambda)F(t), \quad \text{para todo } \lambda \in (0,1).$$

Geometricamente, isto significa que quaisquer que sejam $s,t \in (a,b)$*, o gráfico de* F *fica abaixo do segmento que passa por* $(s,F(s))$ *e* $(t,F(t))$.

(a) F *é convexa se e somente se quaisquer que sejam* $s,t,s',t' \in (a,b)$ *tais que* $s \le s' < t'$ *e* $s < t \le t'$ *temos*

$$\frac{F(t) - F(s)}{t - s} \le \frac{F(t') - F(s')}{t' - s'}.$$

(b) F *é convexa se e só se* F *é absolutamente contínua em todo subintervalo compacto de* (a,b) *e* F' *é crescente (no conjunto onde estiver definida).*

(c) *Se* F *for convexa e* $t_0 \in (a,b)$*, então existe* $\beta \in \mathbb{R}$ *tal que para todo* $t \in (a,b)$ *temos*

$$F(t) - F(t_0) \ge \beta(t - t_0).$$

(d) **Desigualdade de Jensen**. *Sejam* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *um espaço de medida com* $\mu(X) = 1$*, uma função* $g : X \to (a,b)$ *em* $L^1(\mu)$*, e uma função* F *convexa em* (a,b)*. Então,*

$$F\left(\int g d\mu\right) \le \int F \circ g d\mu.$$

Sugestão: *Ponha* $t_0 = \int g d\mu$ *e* $t = g(x)$ *no item anterior e integre.*