MEDIDA E INTEGRAÇÃO - MAT 5798 - IME 2016
Prof. Oswaldo Rio Branco de Oliveira

LISTA 8 DE EXERCÍCIOS

E1. Sejam ν, ν_1 e ν_2 medidas complexas e μ uma medida positiva sobre $(X, \mathcal{M})$.

(a) ν é concentrada em A se e somente se $|\nu|$ também.

(b) Se $\nu_1 \perp \nu_2$ então $|\nu_1| \perp |\nu_2|$.

(c) Se $\nu_1 \perp \mu$ e $\nu_2 \perp \mu$ então $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$.

(d) Se $\nu_1 \ll \mu$ e $\nu_2 \ll \mu$, então $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$.

(e) Se $\nu \ll \mu$ então $|\nu| \ll \mu$.

(f) Se $\nu_1 \ll \mu$ e $\nu_2 \perp \mu$ então $\nu_1 \perp \nu_2$.

(g) Se $\nu \ll \mu$ e $\nu \perp \mu$ então $\nu = 0$.

(h) Se $\nu = f d\mu$, com f μ-integrável estendida então

$$\nu_r = (\mathrm{Re} f) d\mu \quad \text{e} \quad \nu_i = (\mathrm{Im} f) d\mu.$$

SEÇÃO 3.3, p. 94

19. Sejam ν e λ medidas complexas e μ uma medida positiva. Então,

(a) $\nu \perp \lambda$ se e somente se $|\nu| \perp |\lambda|$.

(b) $\nu \ll \mu$ se e somente se $|\nu| \ll \mu$.

20. Se ν é uma medida complexa em $(X, \mathcal{M})$ e $\nu(X) = |\nu|(X)$, então $\nu = |\nu|$.

21. Seja ν uma medida complexa sobre $(X, \mathcal{M})$. Todos os conjuntos a seguir pertencem a $\mathcal{M}$. Defina:

$$\mu_1(E) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} |\nu(E_j)| : \; n \in \mathbb{N} \text{ e } E = \dot{\bigcup_{j=1}^{n}} E_j\right\}$$

$$\mu_2(E) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |\nu(E_j)| : \; E = \dot{\bigcup_{j=1}^{\infty}} E_j\right\}$$

$$\mu_3(E) = \sup\left\{\left|\int_E f d\nu\right| : \; |f| \le 1\right\}.$$

Então $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = |\nu|$.

Sugestão. Primeiro mostre que $\mu_1 \le \mu_2 \le \mu_3$. Para verificar que $\mu_3 = |\nu|$, tome $f = \overline{\frac{d\nu}{d|\nu|}}$ e aplique a Proposição 3.4 (notas de aulas), ou Proposição 3.13 no livro texto. Para verificar que $\mu_3 \le \mu_1$, aproxime f por funções simples.

SEÇÃO 3.4, p. 100

23. Uma variante útil da função maximal de Hardy-Littlewood é:

$$H^* f(x) = \sup\left\{\frac{1}{m(B)} \int_B |f(y)| dy : \; B \text{ é uma bola e } x \in B\right\}.$$

Mostre que $Hf \le H^* f \le 2^n Hf$.

24. Se $f \in L^1_{\text{loc}}$ e f é contínua em x, então x está no conjunto de Lebesgue de f.

25. Seja $E \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$. A **densidade** $D_E(x)$ de E em x é definida por:

$$D_E(x) = \lim_{r \to 0} \frac{m\big(E \cap B(x;r)\big)}{m\big(B(x;r)\big)},$$

sempre que o limite existir.

(a) Mostre que $D_E(x) = 1$ q.s. em E e $D_E(x) = 0$ q.s. em E^c.

(b) Dê exemplos de E e x tais que $D_E(x) \in (0,1)$ ou $D_E(x)$ não existe.